This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

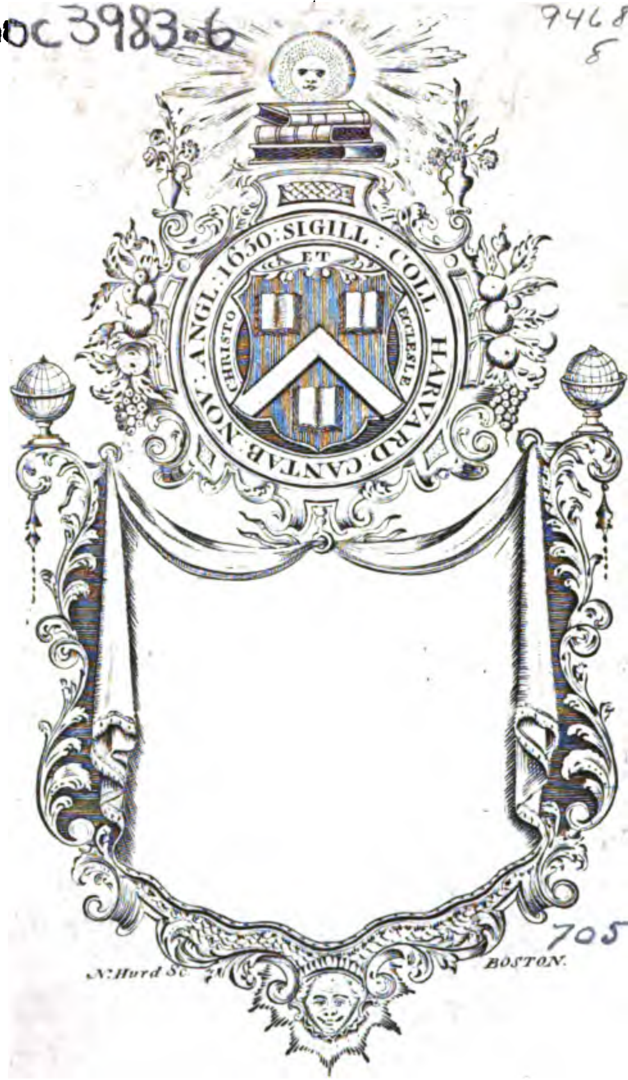
+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

L Soc 3983.6

LSoc3983.6 9468 8



705

NOVI
COMMENTARII
ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOM. X.

pro Anno MDCCLXIV.



PETROPOLI

TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM

c. MDCCLXVI.

LSoc 398.26

HARVARD UNIVERSITY LIBRARY

9468 53.43 8.13

SVMMARIVM
DISSERTATIONVM
QVAS CONTINET
NOVORVM COMMENTARIORVM
TOMVS X.

MATHEMATICA.

I.

De Reductione formularum integralium ad rectificationem ellipſis et hyperbolae.

Auctore Leon. Eulero pag. 3.

Quae quantitates numeris neque integris neque fractis, neque etiam ſurdis vel irrationalibus exhiberi poſſunt, tranſcendentes vocari ſolent, quarum ergo valores non aliter niſi proxime per numeros exprimere licet. Dari autem huiusmodi quantitates certiſſimum eſt, etiamſi ratio ob infinitudinem, quae eas excludere videtur, a plerisque minus diſtincte perſpiciatur; id quod exemplo notiſſimo peripheriae circuli, cuius diameter vnitate indicetur, euidenter declarari poteſt. Nullum enim eſt dubium, quin quantitas huius peripheriae valorem habeat omnino determinatum, quem adeo primo intuitu conſtat intra limites 3 et 4 contineri. Verum intra hos limites innumerabiles conſtitui poſſunt fractiones ratione denominatorum diſcrepantes, cuiusmodi ſimpliciores ſunt:

$$3\tfrac{1}{2},\ 3\tfrac{1}{3},\ 3\tfrac{2}{3},\ 3\tfrac{1}{4},\ 3\tfrac{3}{4},\ 3\tfrac{1}{5},\ 3\tfrac{2}{5},\ 3\tfrac{3}{5},\ 3\tfrac{4}{5},\ \text{etc.}$$

et generatim in hac forma $3\frac{m}{m+n}$ comprehenduntur: vbi cum tam pro m quam pro n omnes plane numeros ſubſtitui liceat, nulla tamen huiusmodi formula veram peripheriae quantitatem praebet; ſed quaecunque aſſumatur, ſemper a veritate recedit, etiamſi error continuo minor reddi poſſit. Deinde quantitates etiam ſurdas introducendo multitudo numerorum intra limites 3 et 4 contentorum vlterius in infinitum augetur, qui adeo omnes ab iis, qui in formula $3\frac{m}{m+n}$ continentur diſcrepant, neque tamen etiam in his vllus reperitur, qui circuli peripheriam exacte dimetiatur: quamobrem eius quantitas merito pro tranſcendente habetur. Quod idem multo magis de omnibus circuli arcubus eſt intelligendum, ita vt quicunque capiatur ſinus in circulo, arcus ipſi reſpondens ſemper ſit quantitas tranſcendens; ſicque ſolus circulus infinitam quantitatum tranſcendentium multitudinem ſuppeditet. Deinde vero etiam logarithmi ad claſſem numerorum tranſcendentium ſunt referendi, qui adeo ab illis, qui ex circulo naſcuntur, prorſus ſunt diverſi. Iam nemo non videt, ſi praeter fractiones et quantitates tranſcendentes ex circulo et logarithmis ortae in ſubſidium vocentur, tum inter binos quosuis numeros multitudinem numerorum mediorum multo magis in immenſum augeri; ex quo maxime mirum videbitur, ne hoc quidem modo interualla inter binos numeros integros ita numeris mediis expleri, vt iis omnes plane quantitates intra eosdem terminos conten-

tentae exprimi queant. Quin potius praeterea innumerabilia alia quantitatum tranſcendentium genera, tam inter ſe quam ab illis ex circulo et logarithmis natis maxime diſcrepantia, agnoſci oportet; inter quae potiſſimum notari merentur ea, quae ex rectificatione ellipſium et hyperbolarum originem ducunt, propterea quod hae curuae poſt circulum ſunt notiſſimae et facillime deſcribuntur. Quomodocunque autem tam in ellipſi; quam hyperbola arcus reſcindantur, eorum quantitas non ſolum nullis formulis irrationalibus exprimi, ſed etiam nullo modo neque ad arcus circulares neque ad logarithmos reuocari poſſunt: quin etiam ſinguli arcus tam elliptici quam hyperbolici peculiares quantitates tranſcendentes exhibent, quoniam ne inter ſe quidem, niſi pauciſſimis caſibus exceptis, comparari poſſunt. Ad innumerabilia alia autem quantitatum tranſcendentium genera calculus integralis perducit, dum omnibus formulis integralibus, quarum integratio algebraice expediri nequit, certae quantitates tranſcendentes deſignantur, in quarum natura euoluenda induſtria et ſagacitas analyſtarum maxime cernitur. Cum igitur nunc quidem ſit compertum omnes huiusmodi formulas integrales $\int V dx$, ſi V fuerit functio rationalis ipſius x, ſemper per logarithmos et arcus circulares exprimi poſſe, niſi forte algebraicam integrationem admittant: artificia integrandi pro iis caſibus, quibus V eſt functio irrationalis ipſius x adhuc potiſſimum deſiderantur, vbi quidem id imprimis eſſet optandum, vt eae formulae, quibus V eſt quantitas irrationalis, accuratius

ratius euoluerentur, quarum integratio per arcus ſiue ellipticos ſiue hyperbolicos expediri queat. Atque in hac inueſtigatione Auctor iſtius diſſertationis imprimis eſt occupatus, ſummumque ſtudium contulit ad hanc formulam integralem $\int dx \sqrt{\frac{f+gxx}{h+kxx}}$ explicandam, atque adeo ad arcus ſiue ellipticos ſiue hyperbolicos reducendam: quod negotium multo difficilius eſt, quam initio videatur. Prout enim quantitatum conſtantium f, g, h et k, aliae fuerint vel poſitiuae vel negatiuae, caſus oriuntur natura ſua maxime inter ſe diſcrepantes. Primo enim relatio inter has quatuor quantitates ita poteſt eſſe comparata, vt formula integralis arcum quendam ſiue ellipticum ſiue hyperbolicum ſimpliciter exprimat. Deinde fieri poteſt, vt integrale binis conſtet partibus, altera algebraica, altera arcum ſiue ellipticum ſiue hyperbolicum exprimente. Praeterea vero etiam eiusmodi dantur caſus quibus integrale neutro modo exhiberi poteſt, ſed praeter partem algebraicam duos arcus alterum ellipticum, alterum hyperbolicum requirit. In tractatione igitur formulae $\int dx \sqrt{\frac{f+gxx}{h+kxx}}$ ob iſtam varietatem Auctor coactus eſt duodecim caſus conſtituere, quos ſingulos operoſo calculo ita feliciter expediuit, vt iam facile ſit, quaecunque quantitates litteris f, g, h, k deſignentur, integrale conceſſa ellipſium et hyperbolarum rectificatione aſſignare. Saepenumero autem euenire poteſt, vt formulae integrales multo magis complicatae ope ſubſtitutionum idonearum ad talem formam perduci queant, quibus ergo

go omnibus caſibus integratio expedita eſt cenſenda; ex quo haec inueſtigatio calculo integrali haud leue incrementum attuliſſe eſt aeſtimanda.

II.

Elementa Calculi variationum

et III.

Analytica explicatio methodi Maximorum et Minimorum.

Auctore Leon. Eulero pag. 51. et 94.

Iam ante celeberrimum problema iſoperimetricum inſignia quaedam ſpecimina huc pertinentia a Geometris ſunt edita, cum antiquiſſimis iam fuerit exploratum, circulum inter omnes alias figuras pari perimetro incluſas maximam aream complecti; quam quidem proprietatem ex circuli natura concluſerunt, minime vero ipſam quaeſtionem directe aggredi ſunt auſi, vt inter omnes figuras aequali perimetro terminatas eam inueſtigarent, quae maximam aream includeret. Haec ſcilicet quaeſtio nimis eſt ardua, quam vt ante inſignem calculi infinitorum promotionem de ea ſaltem cogitare licuiſſet. Mox vero primis quaſi iactis huius calculi fundamentis ab acutiſſimo *Iohanne Bernoulli* quaeſtio de brachyſtochronis feliciſſimo ſucceſſu eſt reſoluta: quippe qua

 inter

inter omnes lineas a puncto ſublimiori ad humilius ductas ea quaerebatur, ſuper qua graue tempore breviſſimo deſcendat, quam egregiam proprietatem cycloidi competere inuenerat. Methodus autem, qua Vir celeberrimus erat vſus, fratri ipſius natu maiori *Iacobo Bernoulli* manifeſto occaſionem praebuiſſe videtur ſolutionem magni problematis iſoperimetrici, quod deinceps tractauit, meditandi. Latiſſimo ſcilicet ambitu omnes huius generis quaeſtiones in hoc problemate eſt complexus, vt inter omnes lineas intra data duo puncta ducendas, ſiue debeant eſſe eiusdem longitudinis, (vnde quidem nomen iſoperimetrici eſt natum) ſiue alia quadam indole communi praeditae, eam inueſtigaret, quae vel maximam aream, vel circa datum axem rotata maximum ſolidum, vel in genere quamcumque maximi minimiue proprietatem contineret. Methodum autem, qua ſummus illius temporis Geometra eſt vſus, perpendentes ancipites haeremus, vtrum magis eius incredibilem patientiam in prolixiſſimis et taedioſiſſimis calculis expediendis, an ſummam ſagacitatem in concluſionibus ſatis concinnis inde deducendis admirari debeamus. Ob hanc ipſam autem cauſam, quod concluſiones prodierint ſatis concinnae, mox ſuſpicari licebat, viam planiorem ac breuiorem dari eodem perducentem; quam etiam eius frater iunior *Iohannes* ſatis feliciter eſt ingreſſus, etiamſi ſtatim pro quibusdam caſibus nimis abſconditis negotium minus ſucceſſerit, quem tamen defectum deinceps, toto hoc argumento profundius retractato, largiter

gitem compenſauit. Longo poſtea interiecto tempore Auctor harum diſſertationum in eodem problemate euoluendo ſummum ſtudium collocauit, et cum perſpexiſſet, omnes huius generis quaeſtiones eo redire, vt eiusmodi linea curua aequatione inter coordinatas x et y exprimenda inueſtigetur, in qua talis formula integralis $\int V\,dx$ quomodocunque quantitas V per x et y fuerit data, maximum minimumue valorem obtineat. Nunc autem euidens eſt in iſta quantitate V infinitam varietatem locum habere poſſe, prout in eam praeter ipſas variabiles x et y tam earum differentialia cuiuscunque ordinis, quam nouae inſuper formulae integrales ingrediuntur. Quodſi iam ſolutiones *Bernoullianae* ad hanc normam examinentur, eae tantum ad eos caſus, quibus quantitas V ſola differentialia primi gradus inuoluit, reſtrictae reperiuntur, ac praeterea caſus, quibus in quantitate V nouae formulae integrales inſunt, inde penitus excluduntur, pauciſſimis exceptis, quos facile pro indole quaeſtionis ab hoc incommodo liberare licet. Hunc igitur defectum noſter Auctor feliciſſime cum in his Commentariis, tum in opere ſingulari de hoc argumento edito, ſuppleuit, vt vix quicquam quod amplius deſiderari queat, reperiatur. Interim tamen ipſa methodus, etiamſi totum negotium ſatis expedite conficiat, tamen ipſi non ſatis naturalis eſt viſa, propterea quod vis ſolutionis tota in conſideratione elementorum curuae inueſtigandae erat poſita, ipſa vero quaeſtio facile ita adornari poſſit, vt ex Geometria penitus ad ſolam Analyſin puram reuocetur.

tetur. Quaeſtio enim ita propoſita, vt data quantitate V vtcunque ex binis variabilibus x, y, earumque differentialibus cuiuscunque ordinis, quin etiam ex formulis integralibus vtcunque conflata, ea inter x et y relatio inueſtigari debeat, qua formulae integrali $\int V\,dx$ maximus minimusue valor concilietur? hoc inquam modo quaeſtio propoſita prorſus a Geometria ſegregatur; ex quo etiam methodus genuina eam reſoluendi a Geometria immunis eſſe debebat: et quo difficilius Analyſis ad hunc ſcopum accommodari poterat, eo maiora incrementa huius ſcientiae, ſi res ſucceſſerit, merito ſperare licebat. Tametſi autem Auctor de hoc diu multumque eſſet meditatus, atque amicis hoc deſiderium aperuiſſet, tamen gloriae primae inuentionis acutiſſimo Geometrae Taurinenſi la Grange erat reſeruata, qui ſola Analyſi vſus eandem plane ſolutionem eſt adeptus, quam Auctor ex conſiderationibus geometricis elicuerat. Verum ipſa illa ſolutio ita erat comparata, vt nouam plane Analyſeos ſpeciem conſtituere, eiusque fines non mediocriter promouere, videretur; ex quo Auctori occaſio eſt oblata hanc ſcientiam nouo Calculi genere locupletandi, quem *Calculum variationum* appellat, et cuius elementa hic tradere ac dilucide explicare conſtituit. Hic quidem calculus perinde ac differentialis in incrementis infinite paruis inter ſe comparandis verſatur, verum in ratione tractationis ab eo maxime diſcrepat. Cum enim in calculo differentiali ex data quantitatum variabilium relatione, relatio inter earum differentialia cuiusque ordinis inueſtigetur;

in

in calculo variationum ipſa relatio inter variabiles infinite paruṃ immutari concipitur; ita vt dum ſecundum relationem datam pro quouis alterius variabilis x valore, altera y certum valorem ſortitur, calculo variationum huic ipſi valori y incrementum quoddam infinite paruum adiiciatur, ex quo deinceps, quemadmodum formulae tam differentiales quam integrales varientur, definiri oportet. Incrementum illud cuicunque valori y adiectum ab Auctore eius variatio vocatur, ac ne cum differentialibus confundatur hoc charactere δy deſignatur: cum igitur hinc omnes formulae tam differentiales quam integrales, quatenus quantitatem y inuoluunt, certas variationes nanciſcantur, auctor in priore diſſertatione principia ac praecepta ſtabilit, quorum ope omnium huiusmodi formularum variationes definiri poſſunt: ita ſi W denotet huiusmodi formulam quamcunque; eius variationem δ W per regulas peculiares aſſignare docet. Quo ſingulari calculo conſtituto deinceps in ſequente diſſertatione eius applicationem ad omnia problemata, quae circa maxima et minima excogitari poſſunt, clariſſime oſtendit, inque negotio hoc imprimis obſeruari meretur, quod ita noua methodus mere analytica multo pleniores ac perfectiores ſolutiones ſuppeditet, quam prior illa ex Geometria petita.

IV.

De inſigni Promotione Methodi Tangentium Inuerſae.

Auctore Leon. Eulero pag. 135.

Notum eſt Analyſin infinitorum primam originem ex eo Geometrarum ſtudio traxiſſe, quo omnium linearum curuarum tangentes ducere ſunt conati. Cum enim iam pridem ante Geometrae maxime fuiſſent ſolliciti, vt methodum certam cuiusque lineae curuae tangentes inueniendi ſcrutarentur, atque ad hunc ſcopum continuo propius acceſſiſſent, ſagacitate tandem ſummorum ingeniorum *Newtoni* et *Leibnizii* calculus differentialis eſt inuentus, quo mox feliciſſime ſucceſſu ſunt vſi ad tangentes omnium linearum curuarum, cunctaque phaenomena ab ſitu tangentium pendentia definienda. Quoniam vero iam ante certa quaedam artificia ita etſi multo imperfectius praeſtandi erant explorata, tamen hinc nouae iſtius inuentionis gloria haud mediocriter imminui eſt viſa, niſi ea ad eiusmodi inueſtigationes accommodaretur, quae illorum artificiorum vim penitus ſuperarent. Hinc primis inuentoribus ſtatim in mentem venit ſtatum quaeſtionis, quae praecipue circa tangentes verſabatur, inuertere, iisque qui minus ſplendide de nouo iſto calculi genere ſentiebant, eiusmodi quaeſtiones proponere, quibus ex data quadam tangen-

tangentium proprietate ipſarum linearum curuarum natura eſſet inueſtiganda. Cum igitur methodus huiusmodi quaeſtiones reſoluendi etiam eſſet inuertenda, hinc methodus tangentium inuerſa eſt nata, quae quoniam a differentialibus ad ipſas quantitates reverti oportebat, hinc calculus integralis mox inſignia accepit incrementa, ita vt incredibilis promotio, ad quam hic calculus deinceps eſt perductus, potiſſimum methodo tangentium inuerſa accepta ſit referenda. Primum quidem in hoc genere eiusmodi tantum quaeſtiones ſunt tractatae, in quibus conditio quaedam tangentium in ſingulis curuae quaerendae punctis proponebatur, ita vt in iis ſoluendis ad vnicum curuae punctum, quod autem indefinite ſumtum ad omnia plane puncta transferri queat, reſpexiſſe ſufficiat. Cuiusmodi quaeſtio erat, quo quaerebatur curua, cuius tangens ad reſectam, ſeu differentiam inter abſciſſam et ſubtangentem, vbique datam teneret rationem: vocata enim pro curuae puncto quocunque abſciſſa $= x$, et applicata $= y$, quia tangens eſt $= \frac{y\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dy}$ et ſubtangens $= \frac{ydx}{dy}$, hac quaeſtione poſtulabatur, vt eſſet $\frac{y\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dy}$ ad $x - \frac{ydx}{dy}$ in data ratione: quae ratio ſi ponatur $= m:n$, ad hanc aequationem peruenitur:

$$m(xdy - ydx) = ny\sqrt{(dx^2+dy^2)}$$

quae integrata naturam curuae quaeſitae declarabit. Deinde vero etiam eiusmodi quaeſtiones ſunt agitatae, quibus tangentium conditio praeſcripta ſimul ad bina curuae puncta pertineret, cuiusmodi fuerat problema tra-

traiectoriarum reciprocarum, cuius ſolutiones a variis Auctoribus prolatae Analyſin infinitorum clariſſimis inuentis locupletarunt. Eodem quoque referenda eſt quaeſtio catoptrica ab ipſo Auctore huius diſſertationis olim euoluta, qua circa punctum lucidum eiusmodi linea curua deſcribenda proponitur, vt omnes radii ab iſta curua bis reflexi in ipſum punctum lucidum reuertantur: in qua quaeſtione reſoluenda omnino neceſſe eſt, vt bina ſimul curuae puncta, in quibus quilibet radius reflectitur, in calculum introducantur; quae bina puncta ita inter ſe eſſe relata manifeſtum eſt, vt inter ſe permutationem admittant. Cum igitur huiusmodi quaeſtiones longe aliam ſoluendi methodum requirant, ac queſtiones prioris generis, vbi vnicum curuae punctum conſideraſſe ſufficit, Auctor hinc duas claſſes quaeſtionum ad methodum tangentium inuerſam pertinentium conſtituit: iisque adeo in hac diſſertatione tertiam claſſem adiungit, quae eiusmodi quaeſtiones complectitur, in quibus ſimul ad innumerabilia curuae puncta, quae certo quodam modo inter ſe cohaereant, reſpici oportet. Quoniam igitur huiusmodi quaeſtiones methodum prorſus peculiarem poſtulant, quam Auctor in hac diſſertatione dilucide exponit, eiusque eximium vſum in variis problematibus ſoluendis oſtendit, nullum plane eſt dubium, quin haec ſpeculatio Analyſi inſignem promotionem ſit allatura.

V.

Dilucidationes de Tautochronis in medio reſiſtente.

Auctore Leon. Eulero pag. 156.

Cum primum pendula ad tempus dimetiendum motumque horologiorum temperandum adhiberi ſunt caepta, oſcillationes non prorſus aequalibus temporibus abſolui, ſed maiores excurſiones aliquanto plus temporis inſumere ſunt deprehenſa. Cuius inaequalitatis cauſa mox in eo poſita eſſe reperiebatur, quod corpus ſuper arcu circuli deſcendens aliquanto tardius ad punctum infimum pertingat, quo altius deſcenſum inceperit, etiamſi diſcrimen ſit tam exiguum, vt nonniſi accuratioribus obſeruationibus animaduerti queat. Cum igitur aequabile curuamen, quale in arcubus circularibus ineſt, non ſit aptum ad omnes deſcenſus iſochronos efficiendos, facile colligere licebat, ſi loco circuli alia curua adhibeatur, cuius curvatura aſcendendo continuo fieret maior, fieri poſſe, vt tum omnes deſcenſus ad temporis aequalitatem perducerentur. Verum tam ob Analyſeos quam Mechanicae defectum natura huius curuae definiri non poterat, donec Vir ſummo ingenii acumine praeditus oſtendiſſet, hanc proprietatem in cycloidem competere: et quoniam commodiſſime euenit, vt huius curuae euoluta iterum ſit cyclois, inuenti iſtius ap-

plicatio ad praxim eo facilior euaſerat, quod tantum pendulum intra binas cycloides ſuſpendi opus erat, ſiquidem tum imum penduli pondusculum iterum cycloidem eſſet deſcripturum. Verum tamen ne hoc quidem artificio omnis inaequalitas tolli videbatur, niſi motus fieret in vacuo, cum ob aëris reſiſtentiam motus non mediocriter ab ea lege, cui Theoria innitebatur, recederet, quare quamdiu natura huius reſiſtentiae minus erat perſpecta, vera curua quae omnes oſcillationes paribus temporis interuallis ederet, ne inueſtigari quidem poterat. Interim tamen ſummus *Neutonus* demonſtrauerat, ſiue aëris reſiſtentia fuerit conſtans, vel, eius loquendi more, momentis temporis proportionalis, ſiue ipſam celeritatum rationem ſequatur, nihilominus omnes oſcillationes in cycloide factas inter ſe iſochronas eſſe futuras, ita vt his caſibus reſiſtentia non impediret, quo minus cyclois pari ſucceſſu in vſum vocari poſſet, atque in vacuo. Deinde vero reſiſtentiae natura tam experimentis quam ratione accuratius explorata, ea neutiquam celeritatibus, ſed potius celeritatis quadratis proportionalis eſt deprehenſa; quae proportio nullo amplius modo cum cycloidis natura conſiſtere poterat, atque adeo iam non erat difficile per calculum accurate definire, quantum oſcillationes in cycloide factae ob aëris reſiſtentiam ab iſochroniſmi ratione recederent. Quantumuis autem tum temporis Geometrae in eo elaborauerint, vt veram curuam, quae in medio reſiſtente omnes oſcillationes iſochronas produceret, inueſtigarent; tamen in ipſa Analyſi tantas offen-

offenderunt difficultates, quae vix ſuperari poſſe viderentur. At poſtquam etiam Auctor huius diſſertationis diu multumque in hac inueſtigatione deſudauiſſet, voti tandem compos eſt factus, veramque curuam tautochronam in medio, quod ſecundum rationem celeritatum duplicatam reſiſtit, felici ſucceſſu elicuit. Interim tamen methodus, qua in hac inveſtigatione erat vſus, nullo modo ad alias reſiſtentiae hypotheſes transferri poterat; tametſi enim certum videbatur in natura aliam reſiſtentiae legem praeter duplicatam celeritatum rationem locum habere non poſſe, tamen eadem quaeſtio de tautochronis in aliis reſiſtentiae hypotheſibus non tam in Mechanica quam in ipſa Analyſi merito maximi momenti iudicabatur, propterea quod tantae difficultates, quae hanc inueſtigationem impedirent, ſuperari non poſſunt, quin ſimul Analyſis eximia inde accipiat incrementa. Verum quod in hoc negotio haud parum mirum videbitur, quod methodus Auctoris ne ad eam quidem hypotheſin, qua reſiſtentia ipſi celeritati proportionalis fingitur, extendatur, cum tamen hic caſus iam pridem fuiſſet exploratus. At hic quidem imprimis notari conuenit, a *Newtono* tautochronam in hac reſiſtentiae hypotheſi non a priori eſſe inuentam, ſed potius cum forte in motum ſuper cycloide inquireret, quaſi inopinato deprehendiſſe, tautochroniſmi proprietatem ab hac reſiſtentia non turbari; quamobrem hactenus methodus directa merito deſiderabatur, qua ſimul tam in ratione celeritatum ſimplici, quam duplicata curuae

tautochronae inueniri queant. Quo in negotio quidem Auctor ſibi nihil laudis vindicat, cum talis methodus a Celeb. *Fontaino* ſit excogitata, neque tamen ideo abs re fore eſt arbitratus, ſi idem argumentum ſuo more pertractauerit, hancque aeque nouam ac maxime ingenioſam methodum luculenter expoſuerit, quo eius ampliſſimus vſus in Analyſi magis in apricum collocaretur. Interim tamen maxime eſt dolendum, ne hanc quidem methodum vltra eas hypotheſes reſiſtentiae, quibus tautochronae iam erant cognitae, patere.

VI.

Demonſtratio Theorematis Bernoulliani.

Auctore Leon. Eulero pag. 179.

A *Hugenio* primum curuarum euolutio eſt inueſtigata, qua filum curuae cuique circumplicatum paulatim euolui eiusque termino nouam curuam deſcribi aſſumſit: hancque nouam curuam ex euolutione prioris natam, iſtam vero illius euolutam vocauit. Conſideratio autem tautochroniſmi Virum ſummum ad hanc meditationem impulerat, qua inuenit curuae cycloidis euolutam iterum eſſe cycloidem illi ſimilem at ſitu inuerſo poſitam: vnde viciſſim ſequebatur, ſi ſemiſſis cycloidis, a cuſpide vsque

ad

ad locum, vbi eius curuamen eſt minimum, ſumta, ita vt tangentes in his terminis ductae ſint inter ſe normales, ex loco minimi curuaminis euoluatur, curuam inde natam iterum eſſe cycloidem, hancque adeo ſimili modo euolutam denuo cycloidem producere, ſicque porro in infinitum innumerabiles naſci cycloides: quae ſpeculatio cum Geometris maxime placuiſſet, vir ſagaciſſimi ingenii *Ioh. Bernoulli* obſeruauit, ſi loco cycloidis initio alia quaecunque linea curua conſtituatur, cuius tangentes extremae inter ſe ſint normales, atque euolutio ſimili modo, vt in cycloide eſt factum, continuo repetatur, curuas hinc natas continuo propius ad cycloidis naturam accedere, ac tandem euolutione infinities repitita in perfectas cycloides abire. Inſigne igitur hoc Theorema ſoli quaſi obſeruationi innixum, Auctor huius diſſertationis ideo demonſtrare ſuſcepit, quoniam ipſa demonſtratio ad plurimas alias pulcherrimas ſpeculationes manuducit, cuiusmodi nonnullas euoluit, quae haud exigui momenti eſſe videntur. Ac certe cum hoc modo omnes curuae ad cycloidem tandem perducantnr, haecque curua rectificationem admittat, hinc eximias approximationes petere licet. Veluti ſi prima curua ſit quadrans circuli, ac poſito radio $= 1$, eius arcus vocetur $= q$, qui eſt ſemiſſis numeri $\pi = 3,14159265$ etc. longitudo curuarum ſequentium ex continua euolutione natarum ita ſe habere deprehenditur:

Longitudo curuae primae $= q$

\- - - - - ſecundae $= \frac{1}{1 \cdot 2} q^2$

\- - - - - tertiae $= \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} q^3$

\- - - - - quartae $= \frac{5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} q^4$

\- - - - - quintae $= \frac{16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} q^5$

\- - - - - ſextae $= \frac{61}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} q^6$

\- - - - - ſeptimae $= \frac{274}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} q^7$

\- - - - - octauae $= \frac{1385}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} q^8$

\- - - - - nonae $= \frac{7936}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} q^9$

etc.

quae ergo longitudines continuo propius ad rationem aequalitatis accedere eſt neceſſe, et cum infiniteſima ſit cyclois, eiusque longitudo $= \frac{2}{q}$, ſi hinc illae aequentur, continuo propius ad veritatem accedetur his ſcilicet formulis:

$$q^2 = 2\,;\; q^3 = 2 \cdot \frac{1 \cdot 2}{2}\,;\; q^4 = 2 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2}\,;\; q^5 = 2 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{5}\,;$$
$$q^6 = 2 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{16}$$

hic imprimis notandi ſunt numeratores illarum formularum quorum, qui ſunt ordine pares 1, 5, 61, 1385, etc. ita quisque per praecedentes definitur, vt ſit:

$$5 - \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot 1 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 0$$

$$61 - \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 5 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\, 1 - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 0$$

$$1385 - \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} \cdot 61 + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\, 5 - \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\, 1 + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 0$$

ac

ac ſi totae formulae pro locis paribus inuentae ponantur:

$1q^0;\ Aq^2;\ Bq^4:\ Cq^6;\ Dq^8;\ Eq^{10};\ Fq^{12};\ Gq^{14}$ etc,
habebimus vt ſequitur:

$A-\frac{1}{1.2}=0$

$B-\frac{A}{1.2}+\frac{1}{1\ldots4}=0$

$C-\frac{B}{1.2}+\frac{A}{1\ldots4}-\frac{1}{1\ldots6}=0$

$D-\frac{C}{1.2}+\frac{B}{1\ldots4}-\frac{A}{1\ldots6}+\frac{1}{1\ldots8}=0$

vnde concludimus fore hanc ſeriem

$$1q^0+Aq^2+Bq^4+Cq^6+Dq^8+\text{etc.}=\frac{1}{1-\frac{1}{1.2}q^2+\frac{1}{1..4}q^4-\frac{1}{1..6}q^6\ \text{etc.}}=\frac{1}{\text{coſ.}\,q}.$$

Haecque conſideratio ad plurimas alias ſpeculationes non ſpernandas perducere poterit.

VII.

Demonſtratio ſeriei

$$\frac{2.\ 6.\ 10.\ 14.\ 18.\ \ldots\ (4n-10)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ \ldots\ (n-1)}.$$

Auctore S. Kotelnikow pag. 199.

Cum Auctor in ſubſidium artis agrimenſoriae, occupatus fuiſſet in conſtructione polygonorum ex tot datis ſiue lateribus, ſiue angulis, ſiue diagonalibus, quot ad figurae determinationem requi-

quiruntur, euoluenda, caſus quo praeter omnia latera totidem, demtis tribus, dantur diagonales, (tot ſcilicet quaeſtiones determinatio poſtulat) hic inquam caſus ipſum perduxerat ad eandem ſpeculationem, qua in Vol. VII. Celeber. *Segner* oſtendit, quot variis modis quodque Polygonum per diagonales in triangula reſolui poſſit. Arctiſſime ſcilicet hae duae inueſtigationes inter ſe ſunt connexae, etiamſi conuenientia primo intuitu minus appareat. Incidit ergo Auctor in numeros 1, 2, 5, 14, 42, quorum autem progreſſionis legem, vtpote ſatis abſconditam ex ſola figurarum contemplatione perſpicere non poterat. At ex conſideratione horum ipſorum numerorum, quos iam elicuerat, ſatis ingenioſe in ipſam progreſſionis legem inquirit, ad eamque feliciter pertingit, coniectura maxime probabili adiutus, quod hi numeri ſecundum factores egregio ordine progredi debeant. In vberiorem quidem confirmationem ipſarum quoque polygonorum vnde hi numeri ſunt orti, rationem habet, ſed ea etiam praetermiſſa eiusdem coniecturae adminiculo totum negotium hoc modo confici poſſe videtur: Diuidatur iſtorum numerorum quilibet per praecedentem, vt obtineantur hi quoti:

$$\frac{2}{1}=2;\ \frac{5}{2}=\frac{5}{2};\ \frac{14}{5}=\frac{14}{5};\ \frac{42}{14}=3,$$

qui cum non ſint integri omnes per eiusmodi fractiones exhibeantur, quarum denominatores ſint 3, 4, 5, 6, quandoquidem in tertio denominator quinario minor eſſe nequit: ſicque habebitur:

$$\frac{2}{1}=\frac{6}{3};\ \frac{5}{2}=\frac{10}{4};\ \frac{14}{5}=\frac{14}{5};\ \frac{42}{14}=\frac{18}{6},$$

vbi

vbi cum etiam numeratores progreſſionem arithmeticam teneant, vix vllum dubium ſupereſſe poſſet, quo minus ſtatuamus omnes hos quotos ſequenti ordine progredi, in primo loco ob analogiam $\frac{2}{2}$ praefixo:

$$\frac{2}{2} \cdot \frac{6}{3} \cdot \frac{10}{4} \cdot \frac{14}{5} \cdot \frac{18}{6} \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{26}{8} \cdot \frac{30}{9} \text{ etc.}$$

Cum in VII volumine veritas huius formulae rigoroſiſſime ſit demonſtrata, aliaeque formae ipſi aequiualentes ſint exhibitae, vſu non carebit obſervaſſe hos numeros 1, 2, 5, 14, 42 etiam hoc modo per factores repraeſentari poſſe:

$$\frac{2}{2};\ \frac{3.4}{2.3};\ \frac{4.5.6}{2.3.4};\ \frac{5.6.7.8}{2.3.4.5};\ \frac{6.7.8.9.10}{2.3.4.5.6};\ \frac{7.8.9.10.11.12}{2.3.4.5.6.7};$$

quae formulae porro in has transformantur:

$$1;\ \frac{4}{2};\ \frac{5.6}{2.3};\ \frac{6.7.8}{2.3.4};\ \frac{7.8.9.10}{2.3.4.5};\ \frac{8.9.10.11.12}{2.3.4.5.6},\ \text{etc.}$$

tum vero ſuccinctius adhuc in has:

$$1;\ 2.1;\ 2.\frac{5}{2};\ 2.\frac{6.7}{2.3};\ 2.\frac{7.8.9}{2.3.4};\ 2.\frac{8.9.10.11}{2.3.4.5},$$

quarum prima pro triangulo, ſecunda quadrilatero, tertia pentagono etc. valet: vnde in genere pro polygono n laterum valebit haec forma:

$$2.\frac{n}{2}.\frac{n+1}{3}.\frac{n+4}{4} \ldots \ldots \frac{2n-5}{n-3}.$$

Verum nullum eſt dubium, quin forma ab Auctore conſiderata ad vſum multo magis ſit accommodata.

PHYSICO-MATHEMATICA.

I.

De motu corporis ad duo virium centra attracti.

Auctore Leon. Eulero pag. 207.

Argumentum huius diſſertationis Auctor in eius praefatione tam dilucide et copioſe explicauit, vt ſuperfluum foret de eius eximio vſu, cum in Aſtronomia tum vero in Analyſi, hic quicquam commemorare. Priorem ergo huius diſſertationis partem vberiori iſtius quaeſtionis explicatione deſtinatam hic tranſcriptam putemus, cum cuique a calculis etiam abhorrenti eam ante huius recenſionis lectionem euoluere liceat. In quaeſtione igitur, quam Auctor hic tractat, duo puncta fixa aſſumuntur: Ad quae corpus quodpiam attrahatur in ratione reciproca duplicata diſtantiarum, et poſtquam huic corpori motus quicunque fuerit impreſſus, qua lege deinceps ſit progreſſurum, quaeritur. Neutiquam vero Auctor in ſolutione imperfecta et ad veritatem tantum appropinquante, qua ratione huiusmodi quaeſtiones adhuc tractari ſunt ſolitae, acquieſcit, ſed potius omnes cum ingenii tam calculi vires eo intendit, vt motum illius corporis ad duo virium centra fixa attracti omni rigore geometrico definiat, atque

atque adeo aequationem pro curua deſcripta eliciat, ex qua eius conſtructio confici queat. Poſtquam autem aequationes differentiales ſecundi gradus, quas principia motus ſtatim ſuppeditant, felici ſucceſſu ad primum gradum perduxiſſet, aequationem tantopere complicatam eſt aſſecutus, vt inde vix plus ſubſidii quam ex primis formulis differentio-differentialibus expectandum videretur: propterea quod binae variabiles maxime inter ſe erant permixtae. Cum igitur quaſi de vlteriori ſucceſſu deſperaret, eum caſum quo alterutra vis centripeta euaneſcit, euoluendum ſuſcepit; quoniam aliunde conſtabat, curvam hoc caſu deſcriptam ſectionem conicam eſſe debere: in qua inueſtigatione, quae adhuc maximis difficultatibus erat implicata, Auctori vſu venit, vt in enormem errorem illaberetur. Quem lapſum, tantum abeſt, vt occultandum et reticendum putaret, vt eum potius ingenue confiteatur, cum huic ipſi errori, perfecta huius quaeſtionis ſolutio vnice accepta, ſit referenda. Poſtquam enim omni ſtudio in originem huius erroris inquiſiuiſſet, moleſtiſſimosque calculos expediuiſſet praeter omnem expectationem in eiusmodi methodum incedit, cuius beneficio ipſa quaeſtio latiſſimo ſenſu accepta ita ad exoptatum finem perduci poſſet, vt in ſolutione nihil amplius eſſet deſiderandum, ad quod eximium inuentum, quod non ſolum in Aſtronomia, ſed etiam in Analyſi maximi certe eſt momenti, nunquam pertigiſſet, niſi feliciſſimo euentu in errorem illum incidiſſet. Totam autem huius problematis ſolutionem

nem perduxit ad hanc aequationem differentialem primi gradus, in qua binae variabiles adeo a ſe invicem ſunt ſeparatae.

$$\frac{dr}{\sqrt{r(A+B+D+2Er-(A+B-D)rr)}} = \frac{ds}{\sqrt{s(-A+B-D+2Es+(A-B-D)ss)}}$$

vbi litterae A et B intenſiones vtriusque centri virium denotant. D vero et E ſunt conſtantes a prima motus impreſſione pendentes, at variabiles r et s per angulos $BAM = \zeta$ et $ABM = \eta$ ita definiuntur vt ſit $r = \text{tang.}\frac{1}{2}\zeta.\text{tang.}\frac{1}{2}\eta$ et $s = \frac{\text{tang.}\frac{1}{2}\zeta}{\text{tang.}\frac{1}{2}\eta}$, ex quo, ope aequationis inuentae, curua a corpore deſcripta facile conſtrui poteſt. Alio loco autem Auctor oſtendet, hanc aequationem infinitis caſibus algebraice integrari poſſe, ita, vt infinitis modis fieri queat, vt corpus circa duo haec centra virium A et B curuam adeo algebraicam deſcribat. Manifeſto ſcilicet haec ſequuntur ex iis, quae Auctor eſt commentatus de aequatione hac:

$$\frac{m\,dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma xx+\delta x^3+\varepsilon x^4)}} = \frac{n\,dy}{\sqrt{(\alpha+\beta y+\gamma yy+\delta y^3+\varepsilon y^4)}}$$

cuius integrale oſtendit ſemper algebraice aſſignari poſſe, quoties numeri m et n ſunt inter ſe commenſurabiles. Verum praeter hos caſus innumerabiles dantur alii duo maxime ſimplices, quos immediate ex aequatione differentiali inuenta deriuare licet. Oſtendit enim Auctor alibi, quoties habeatur aequatio differentialis ſeparata inter binas variabiles r et s, ei ſemper duobus modis ſatisfieri poſſe, altero quo ipſi r altero vero ipſi s certus tribuitur valor conſtans. Secundum praecepta autem, quae in

hac

hac inueſtigatione obſeruari oportet, ſi fiat $r=\alpha$, neceſſe eſt vt $\alpha-r$ ſit factor quantitatis $\sqrt{r(A+B+D+2Er-(A+B-D)rr)}$ ideoque ipſa quantitas $A+B+D+2Er-(A+B-D)rr$ factorem habeat $(\alpha-r)^2$ hinc diviſa illa forma per $D-A-B$ ſtatuatur $\frac{A+B+D}{D-A-B}=\alpha\alpha$ et $\frac{E}{D-A-B}=-\alpha$, et conſtantes ambae D et E a motus initio pendentes ita definiuntur, vt ſit $D=\frac{(\alpha\alpha+1)(A+B)}{\alpha\alpha-1}$ et $E=\frac{-2\alpha(A+B)}{\alpha\alpha-1}$. Quare ſi motus corpori initio impreſſus his valoribus fuerit conformis, curua deinceps deſcripta hac exprimetur aequatione: $\text{tang.}\frac{1}{2}\zeta.\text{tang.}\frac{1}{2}\eta=\alpha$: vnde cum poſitis $AP=x$, $BP=a-x=t$, $AM=v$, et $BM=u$ ſit $\text{tang.}\frac{1}{2}\zeta=\frac{v-x}{y}=\frac{y}{v+x}$ et $\text{tang.}\frac{1}{2}\eta=\frac{u-t}{y}=\frac{y}{u+t}$, fiet $\alpha=\frac{v-x}{u+t}$. Hinc cum ſit $x=\frac{aa+vv-uu}{2a}$ et $t=\frac{aa-vv+uu}{2a}$, erit

$$v-x=(u+v-a)(a+u-v) \text{ et } u+t=(u+v+a)(a+u-v)$$

ita vt iam ſit $\alpha=\frac{u+v-a}{u+v+a}$ et $u+v=\frac{(\alpha+1)a}{1-\alpha}$ ſeu $AM+BM$ conſtans. Ex quo manifeſtum eſt hoc caſu curuam a corpore deſcriptam fore ellipſin, cuius ambo foci in ipſis binis centris virium A et B ſint conſtituti.

En ergo obſeruationem notatu maxime dignam, qua nunc quidem conſtat fieri poſſe, vt corpus ad duo virium centra attractum etiam in conica ſectione reuoluatur, cuius adeo foci in illa centra virium incidant: ad hoc quippe requiritur vt corpus initio certa quadam ratione proiiciatur, quam inſignem proprietatem haud memini a quoquam eſſe animaduerſam.

Quemadmodum autem hic ponendo $r = \alpha$ omnis generis ellipſes ſumus adepti, ita ſi pro altera aequationis parte ſtatuamus $r = \beta$ ſimili modo ad hyperbolas perueniemus, quarum foci itidem in centris virium reperiuntur.

Ceterum Auctor hic aſſumſit motum fieri in eodem plano cum ambobus virium centris, verum etiamſi motus non abſoluatur in eodem plano, tamen methodus qua hic Auctor eſt vſus, pari ſucceſſu adhibetur, quemadmodum alia occaſione ab ipſo oſtendetur, quo ſimul ſpes Aſtronomorum non mediocriter confirmari videtur, fore aliquando, vt omnes perturbationes motuum coeleſtium ab actione plurium virium oriundae per calculum accurate queant definiri.

II.

De Motu vibratorio Tympanorum

item III.

Tentamen de Sono Campanarum.

Auctore Leon. Eulero pag. 243 et 261.

Duae inueſtigationes ad Acuſticam pertinentes atque in ſe tantopere difficiles ſuſcipiuntur, vt is iam plurimum praeſtitiſſe ſit cenſendus, qui ſaltem quodammodo hos ſonos ad calculum reuocare valuerit. Abunde nunc quidem conſtat, quantis difficultatibus

tatibus quaeſtio de motu vibratorio cordarum fuerit inuoluta, cum ante eam perfecte expedire non licuerit, quam noua quaſi calculi integralis pars tractari atque excoli ſit coepta. Cum igitur in his quaeſtionibus quae de ſono ſeu motu vibratorio tympanorum et campanarum inſtituuntur, non fili cuiusdam veluti cordae, ſed totius ſuperficiei atque adeo corporis agitationes inueſtigentur, facile intelligitur, ad hoc multo profundiora calculi myſteria requiri. Praecipuum autem negotium in eo conſiſtit, vt hi motus eorumque variationes debite ad calculum reuocentur; id quod ſine certis hypotheſibus pro ſtructura horum corporum ſtabilitis, nullo modo fieri poteſt. Hinc Auctor harum diſſertationum in priori rationem conſtituit, qua vibrationes membranae extenſae dum pulſatur, euenire concipi oportet; in poſteriori vero ſimilem rationem pro campanis definit, vnde deinceps formulas analyticas ſecundum motus principia deriuat, quarum euolutio tandem ad veram motus vtriusque cognitionem perducere debet. Formulae autem hae, quae pro tympanis ſunt differentiales ſecundi, pro campanis autem adeo quarti gradus, multo magis ſunt complexae quam eae, quibus cordarum motus exprimitur, neque etiam in genere, vti illae, inueſtigationem admittunt. Quamobrem Auctor etiam vtramque ſolutionem ad eum caſum reſtringit, quo oſcillationes regulares certis temporum interuallis diſtinctae oriuntur, quandoquidem hae maxime in ſenſus incurrunt, ſonosque certi tenoris repraeſentant. Deinde autem hic

idem

idem quoque vſu venit, quod in cordis eſt obſervatum, vt tam tympana quam campanae pro varia impulſionis ratione diuerſos ſonos ſimplices edere queant, tum vero etiam hoc potiſſimum, vt quos ſonos haec inſtrumenta ſeorſim edere valent eosdem quoque coniunctim producere poſſint, quemadmodum idem in cordis contingit. Verum cum diuerſi ſoni, quibus edendis eadem corda eſt apta, ſint inter ſe maxime harmonici, in ratione quippe numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, 5 etc. procedentes, hic in tympanis et campanis maximum cernitur diſcrimen, dum ſoni ſimul editi adeo inter ſe incommenſurabiles, ideoque maxime ab harmonia abhorrentes. Ex quo facile intelligitur, quid de illa inſignis Muſici Gallici de Rameau opinione ſit ſentiendum, qui memorata illa cordarum proprietate deceptus, verum omnis harmoniae principium in natura corporum ſonorum ſitum eſſe putauit, exiſtimans omnes ſonos ab eodem corpore ſimul editos natura ſua inter ſe eſſe conſonos. Ratione campanarum prouocat adeo ad experientiam, et affirmat campana pulſa ſe ſemper ſimul ſonum acutiorem, qui ad principalem eſſet *decima maior* ſeu in ratione 5 ad 2, exaudire. At Auctor noſter dilucide oſtendit hunc ſonum non rationem 5:2 ſed potius hanc irrationalem $\sqrt{6}:1$ illa tantillo minorem tenere, ita vt vel hoc experimento opinio illa funditus euertatur.

IV.

IV.

Obſeruationes quaedam ad Opticam pertinentes.

Auctore F. V. T. Aepino pag. 282.

In Commentariis Academiae Scientiarum Pariſinae anni 1743, proſtat Cel. *Buffoni* diſſertatio, titulo de Coloribus accidentalibus inſignita, quae praeter colores accidentales tractat etiam de morbo, vbi maculae nigrae tanquam muſcae oculo obuolitare videntur, nec non de coloribus vmbrarum a corporibus ſole oriente aut occidente proiectarum. Auctori huius Diſſertationis circa haec tria nonnullae Cel. *Buffono* ignotae ſeſe obtulerunt obſeruationes, atque idcirco eas hic perſequitur.

Diſſertatio haec continet tres obſeruationes: Prima ſpectat ſenſationem diuerſorum colorum in organo viſus ſuccedentium, ſi Sol, dum eſt horizonti propinquus, vel raris obtectus nubibus, vt ſplendor ipſius oculum laedere nequeat, per quartam partem minuti primi conſpiciatur. Auerſis enim tunc a Sole oculis ſenſationem durare per tria aut quatuor minuta prima expertus eſt Auctor, ſiue illi aperti, ſiue clauſi teneantur. Singulares et a nemine hucusque obſeruatas circumſtantias, quae ſenſationem hanc concomitantur, longum foret hic recenſere; idcirco qui illas concluſionesque inde deductas cognoſcere cupiunt, ad ipſam diſſertationem ablegandos eſſe cenſemus.

Secunda obſeruatio ſpectat morbum oculorum, quo ante oculum obiectum quoddam album aut lucidum contemplantem, maculae nigrae, tanquam muſcae, obuolitare videntur. Multi equidem hoc morbi genere laborant, aſt nemo maiori cura quam Auctor in ſedem morbi inquiſiuit. Plerique medicorum quaeſiuerunt infirmitatis huius cauſam in particulis opacis humori aqueo innatantibus, alii opacitati partium lentis cryſtallinae, et alii denique partibus tunicae retinae ſenſatione priuatis, ſiue paralyſi affectis, quae opinio Cel. *Buffono* quoque arridet, attribuerunt. Vltima ſententia, licet magis legibus dioptricis conſentiat, propria tamen experientia conuictus eſt Auctor, dari caſus, vbi hic morbus ſedem in tunica retina non habet, et in hanc ſententiam deſcendit, vt ſedem morbi non alibi quam in humore vitreo quaerendam eſſe, atque oriri a dilatatione ſubtiliſſimorum vaſorum lympham diaphanam vehentium, et introitum partibus craſſioribus et opacis praebentium, aliterque lumen ac lympha refringentium, exiſtemet. Obſeruationes et experientiae Auctoris ita comparatae eſſe videntur, vt nullum dubium relinquant, quin veram ſedem morbi ſaltem ſui ipſius, aſſignaſſe ſit cenſendus.

In obſeruatione tertia, quae de vmbrarum coloribus agit, refert primum Auctor obſeruationem, *Buffonianae* ſimilem aſt nouam, quod vmbrae a candela accenſa proiectae, tempore crepuſculi matutini aut veſpertini, non prout exſpectare fas videtur, nigrae, ſed nunquam non eleganter coeruleae inueniam-

niantur, ſi plano albo excipiantur; virides vero appareant, ſi in planum flaueſcens proiiciantur. Orta hinc erat ſuſpicio Auctori, qui inter innumeros caſus, nunquam viderat vmbras a Sole occidente productas, niſi coeruleas, irrepſiſſe in *Buffoni* obſeruata inaduertentiam aliquam, dum celeber. Vir ſaepe virides apparere vmbras has perhibuerat, quod quidem Auctori non niſi huic circumſtantiae attribuendum fuiſſe videbatur, quod in obſeruationibus *Buffoni* vmbrae in planum flauum inciderint. Aſt propriis poſt haec obſeruationibus edoctus fuit, apparere poſſe vmbras a Sole occidente productas, etiamſi plano albo excipiantur, virides, dum nempe aër ſparſis nubibus rubicundo aut aureo colore tinctis repletus eſt.

Tentat quoque Auctor rationem reddere horum phaenomenorum, non tamen illam pro vera proponere audet.

V.

Similitudinis effectuum vis Magneticae et Electricae nouum ſpecimen.

Auctore F. V. T. Aepino pag. 296.

Varia ab Auctore in lucem edita ſunt ſcripta, ſimilitudinem effectuum et analogiam vis magneticae atque electricae demonſtrantia. Prima huius rei fundamenta iecit in ſermone anno 1758. publice prae-

praelecto, et vberius eandem Theoriam expoſuit in egregio opere, cui titulus eſt: *Tentamen Theoriae Electricitatis et Magnetiſmi.* Quanquam itaque hac ex parte Auctor in ſcriptis ſuis nihil deſiderandum reliquerit, phaenomenon tamen, quod hic deſcribit, vtriusque vis tantam ſiſtit ſimilitudinem, vt obſeruator omnino diſtinguere nequeat, vtrum id pro operatione vis Electricae, an vero Magneticae habendum ſit. Haec eſt praecipua cauſa, ob quam experimentum hoc deſcribendum eſſe exiſtimauit. Simplex quidem illud eſt, ſed ſimilitudinem vtriusque vis luculentiſſime probat.

VI.

Deſcriptio duplicis Microſcopii Solaris apparatus obiectis opacis adaptati.

Auctore I. E. Zeihero pag. 299.

Microſcopium Solare ad inuenta recentiora pertinere ſatis conſtat. Tribuitur illius inuentio *Liberkühnio*, Academico celebri quondam Berolinenſi, quamuis non deſint, qui hoc inuentum antiquius eſſe volunt, et *Liberkühnium* tantum illud perfeciſſe contendunt.

Microſcopium ſolare variarum adhuc perfectionum eſt capax, vti ſolent recentiora inuenta, quae non ſtatim ab initio ſummo perfectionis gradu gaudere

gaudere ſolent, vti vel antlia pneumatica exemplo eſſe poteſt perſpicuo, a variis, aucta variis perfectionibus. Microſcopia ſolaria prima et ordinaria adcommodata tantum ſunt ad obiecta pellucida obſeruanda. Duplex perfectio eſt ab Auctore excogitata pro obiectis opacis Microſcopio ſolari adplicandis. Altera inſeruire debet obiectis minimis, valde amplificandis, quae alias commode in lentis foco collocari nequeunt; altera vero obiectis maioribus integris mediocriter augendis, vt monetis, gemmis et aliis. Hunc duplicem ſcopum Auctor ſibi in diſſertatione ſua propoſuit, ad quem obtinendum duas capſulas reperit cum adparatu coniungendas cum microſcopio ſolari. Sed quum hic adparatus duplex ſine figuris diſtincte intelligi et repraeſentari nequeat; lectorem ad ipſam diſſertationem remiſſum volumus.

VII.

Methodus expedita Velocitatem venti abſolutam determinandi.

Auctore I. E. Zeihero pag. 302.

Extant quidem iam multae methodi celeritatem ventorum determinandi, a variis auctoribus excogitatae, inter quas praecipue notatu digna eſt, ingenioſiſſima illa viri quondam celeberrimi *Ons-en-Bray*, quam deſcripſit in Memoriis Academiae

Pariſienſis anno 1734. Tamen in omnibus his methodis iure adhuc deſiderari poteſt, quod non ſatis ſint expeditae et commodae quauis occaſione celeritatem ventorum determinandi. Scopus igitur diſſertationis eſt methodum commodiorem et expeditiorem exhibere. Ad hunc ſcopum obtinendum coniunxit duo inſtrumenta ſatis iam nota, alterum eſt viri celeberrimi quondam *Bougueri*, alterum celeberrimi Smeatonii angli. Inſtrumentum *Bougueri* eſt deſcriptum in eius tractatu de naui, et eſt anemometrum ingenioſiſſime excogitatum, et ſimpliciſſime confectum. Conſiſtit illud generatim in elatere ſpirali tubo incluſo, qui a vento, maiore et minore, magis minusqus intrudi ſolet, ſi ſcilicet planum ex charta confectum elateri adfixum, vento obuertatur. Sed quum ſine figuris ſtructura huius anemometri diſtincte intelligi et repraeſentari nequeat: lectorem ad inſpiciendam figuram remittere cogimur. Si igitur anemometrum hoc *Bouguerianum* celeritatis abſolutae ventorum gradus monſtrare debet; opus eſt, vt celeritate aequali et vniformi contra aërem quietum moueatur et hac ratione velocitatis gradus ſimul in eo ſignari queant.

Motus circularis Auctori hic videtur aptiſſimus, quem ope machinae Smeatonii facillime perficere exiſtimat. Deſcripta eſt haec machina Vol. LI, Transact. angl. Vſus eſt ea Smeaton occaſione experimentorum circa aquae et venti vires inſtitutorum. Ipſa machina diſtincte per figuram eſt repraeſentata, ita vt vlteriore eius deſcriptione hic ſuperſedere

ſedere poſſimus, quae igitur eſt ipſa inſpicienda. Haec machina Smeatoniana ad ſcopum ſuum ab Auctore eſt accommodata. Tota igitur machina ex inſtrumento *Bougueriano*, et Smeatoniano ita eſt compoſita, vt mediante confibula anemometrum *Bouguerianum* parti ſuperiori machinae Smeatonii ſit affixum, vbi figura ipſa eſt inſpicienda. Vnicae eiusmodi machinae auxilio innumerabilia anemometra velocitatem ventorum abſolutam indicantia, confici et vbiuis mitti poſſe facile intelligitur.

Poteſt poſt tempus aliquod praeterlapſum elater ſpiralis fieri imperfectior. Verificandum igitur hoc inſtrumentum erit, et explorandum, an elater ſpiralis ab elaſticitate ſua aliquid amiſerit.

Quod quomodo ſit faciendum, vltimo loco exponitur.

PHYSI-

PHYSICA.

I.

Caloris diminuti et aucti Phaenomena noua paradoxa et Conſiderationes.

Auctore I. A. Braunio pag. 309.

In rerum natura multa euenire ſolent, quae paradoxa videntur, dum contrarium eius, quod ſecundum leges ordinarias fieri debet, conſpiciendum praebent. Deteguntur eiusmodi phaenomena paradoxa partim adcuratis obſeruationibus, in quantum ſcilicet illa a ſolis naturae viribus ſunt perducta eoque ſolius naturae ſunt effectus; partim et praecipue Experimentis, quatenus ſcilicet phaenomena eiusmodi accedente arte oriuntur, eoque effectus et naturae et artis ſimul ſunt, ita vt ſine arte, ſine diſpoſitione artificiali nunquam ſe conſpicienda praebuiſſent. Eiusmodi quaedam paradoxa phaenomena Auctor multis iisque adcuratiſſimis experimentis pro ſua, vt in arte obſeruandi, ſic in arte experimentandi peritia ſatis nota, detexit, quae in hac diſſertatione propoſuit, non nude, ſed explicare quoque pro ſuo acumine ſtuduit. Experimenta pertinent ad caloris diminutionem et auctionem paradoxam, h. e. quae legibus phyſicis ſtabilitis repugnare videtur, dum calor diminuitur, quum tamen augeri

augeri, ſaltim non variari, et e contrario augetur, quum diminui, certe idem manere debeat.

Pro diuerſitate fluidorum, quae ad haec experimenta ſunt electa, caloris diminutio maior et minor adparebat, quin in quibusdam fluidis nulla plane conſpiciebatur. Experimenta in conclaui ſunt inſtituta, quod vel eiusdem temperiei cum fluidis, vel calidius illis erat.

In caſu igitur priori thermometrum mercuriale quod eſt adhibitum, eundem caloris gradum monſtrare debebat, ex fluido extractum, quem habebat, fluido adhuc immerſum, et in caſu poſteriori calor augeri eoque thermometrum adſcendere debebat. Sed in vtroque caſu ſecus accidit. Calor enim eſt diminutus ſemper in plerisque fluidis tentatis, cum exceptione tamen quorundam, quae vel plane nullam caloris mutationem, vel parum aut nihil mutationis monſtrarunt. Ad ea fluida, quae frigoris nihil ſub dictis circumſtantiis producere ſolent, pertinent omnia olea expreſſa et deſtillata. Spiritus acidi quidam, vt ſpiritus nitri et ſalis, parum aut nihil mutationis oſtenderunt, excepto oleo vitrioli, quod loco frigoris 5. 6 et plures gradus caloris ſub dictis circumſtantiis produxit. Ceterum ſpiritus ſulphuris, aceti, acidum citri, acetum vini, ſpiritus ſalis ammoniaci frigoris gradus aliquot produxere.

In omnibus aliis fluidis tentatis, productio frigoris ſine omni exceptione cernebatur, vt in ſpiritu vini rectificatiſſimo, ſpiritu vini francico, in vinis omnibus tentatis, in cereuiſiis, in ſolutionibus ſali-

um, et aliis, de aqua iam ante conſtitit hoc phaenomenum extraordinarium. Sed haec hactenus de phaenomenis, quae hic ſufficere poſſunt. De explicatione horum phaenomenorum et experimentorum adhuc dicendum reſtat. Primum A. demonſtrat, neque frigus, neque calorem in recenſitis phaenomenis eſſe adparentem, ita ſcilicet, vt potius haec caloris diminuti et aucti phaenomena a contractione et dilatatione vitri, quam a contractione et dilatatione mercurii ipſius pendeat, ſed realem, revera enim in productione frigoris, mercurius in thermometro contrahitur, et in productione caloris dilatatur. Sed quaenam cauſſa phyſica producti frigoris paradoxi in plerisque fluidis, et quaenam ratio producti caloris paradoxi in oleo potiſſimum vitrioli? Phaenomenum frigoris paradoxi explicare A. ſtudet per ſolutionem frigidam, dum ſcilicet fluidum bulbo thermometri adhaerens in vapores reſoluitur, quemadmodum alias frigus augeri animaduertimus, dum madida corpora lintea etc. exſiccari ſolent. Eiusmodi frigoris productio durat, quamdiu reſolutio fluidi in vapores, durare ſolet. Hinc cur olea parum aut nihil mutationis caloris producere ſoleant intelligi poteſt, quia ſcilicet exſiccatio bulbi thermometri, eoque reſolutio in vapores, parum aut nihil omnino in oleis fieri ſolet. Contra caloris paradoxi cauſam in vitrioli oleo non dubitat Auctor deducere ex attracta ab oleo vitrioli aqua, quae cum oleo vitrioli mixta calorem ad tempus producere ſolent, quod multis experimentis oſtendi poteſt et eſt oſtenſum.

Tandem

Tandem adhuc notandum eſt, occaſione horum experimentorum errorem quorundam Phyſicorum magni nominis eſſe detectum, qui ſtatuerunt frigus quoque produci ſolerè, ſi ſpiritus vini oleis eſſentialibus miſceatur. Sed hi ſine dubiò ignari phaenomenorum paradoxorum recenſitorum miſtioni olei eſſentialis cum ſpiritu vini tribuerunt, quod effectus ſolius ſpiritus vini, (per antecedentia) eſſe ſolet, dum thermometrum extrahitur, et in aëre etiam calidiore ſuſpenditur. Multis experimentis hoc quoque egregie confirmatum eſt.

II.

Piſcium rariorum e Muſeo Petrop. exceptorum deſcriptiones continuae.

Auctore I. T. Koehlreutero pag. 329.

Tredecim a Clariſſ. Koehlreutero piſcium deſcriptiones nobis reſtare Tom. VIII. diximus. Harum deſcriptionum tres dicto Tomo inſeruimus. Sex in praecedente reperiuutur. Sequuntur in praeſenti quatuor reliquae. Prima earum, Lophium oſſiculo frontis tentaculis carnoſis, centralibus, terminato, depingit. Secunda Molam aculeatam, limbo abdominis producto, attenuato, carnoſo, monſtrat. Percis pinnae dorſualis radiis vndecim ſpinoſis, quatuordecim mollibus; faſciis duabus latis, albicanti-

 bus,

bus, tertiae diſſertationis eſt obiectum. Hunc piſcem Clar. Auctor vnum eundemque cum Sciaena lineis obliquis lacteis in vtroque latere, Gronou. Muſ. Ichthiol. eſſe opinatur. Sequitur, in Diſſertatione quarta, Percis faſciis tribus albicantibus, oſſe malae vtrinque in duas ſpinas, vnam longam alteram breuem, producto. In deſcribendis his piſcibus eadem methodo eademque ſolertia vſus eſt, quam lectores in antecedentibus forſitan obſeruarunt. Suo tempore et reliqui, Ichthiophylacii noſtri piſces rariores, eodem modo deſcribentur; hoc etenim modo hiſtoriae piſcium naturali maius tutiusque lumen forſitan accendetur, quam vsque adhuc multis naeuis ſubiectam nouimus.

III.

Dentalii Americani ingentis magnitudinis deſcriptio.

Auctore I. T. Koehlreutero pag. 352.

Dentalios, qui non raro ex continente nunc foſſi nunc inter alia conchylia et petrefacta eruuntur, merito ad domicilium vermium marinorum quorundam pertinere, nemo eſt qui ſibi non perſuadeat, quamuis ipſos vermes videre nemini adhuc contigerit. Variae indolis, ſtructurae et magnitudinis reperiri, diuerſa exemplaria in Lithophylaciis Curioſorum

ſorum aſſeruata docent. Clariſſ. Auctor igitur duos Dentalios ingentis magnitudinis deſcribit, eosque Dentalios arcuatos, ſpongioſos, fuſcos, ſuperficie tuberculis contiguis exaſperata, nominat. Ambo hi Dentalii magnitudine ſua inſigni ſe commendant. Maximum eorum ſecundum lineam rectam 4. pedes Pariſinos cum duobus pollicibus, ſecundum arcum curuaturae 4. pedes et 5. pollices aequat. Latitudo extremitatis inferioris vnius eſt pollicis, ſuperioris trium pollicum quinque linearum. Extremitas inferior fruſto Madreporae inſidet. Subſtantia ipſa corneae eſt duritiei. Corpus ipſum tuberculis ſubrotundis obſitum, interius ruſo-fuſci exterius vero plane fuſci coloris eſt. Inprimis vero notata dignum eſt, ex baſi maximi huius dentalii, alium puſillum 1. pollicem cum 8. lineis longum excreuiſſe. Reliquum hoc fruſtum rariſſimum a nauta quodam olim Archangelopolin aduectum, et a PETRI MAGNI Archiatro D. *Areskin* Petropolin miſſum fuit. Alterum fruſtum quod Clariſſ. Auctor deſcribit, tres pollices cum 8. lineis longum non aeque elegans ac antecedens, magis irregulare, non vbique tuberculoſum et pallidiore gaudens colore cernitur. Adhaerent diuerſis in locis teſtae paraſiticae, ſcyphiformes, quadri- vel quinque laterae, inuerſo-conicae, cuius indolis et in antecedente conſpiciuntur. Reliquum haec fruſta propter inſignem et fere inconſuetam magnitudinem rariſſimis omnino ſunt annumeranda.

IV.

Obſeruationes Meteorologicae potiores Anni MDCCLIX. Petroburgi factae; et in eas Conſiderationes.

Auctore I. A. Braun p. 357 et ſeqq.

Satis iam conſtat adcuratio et methodus Auctoris, qua in obſeruationibus Meteorologicis concinnandis, vti ſolet. Nimirum adcuratiſſime notantur primum Altitudines Barometricae maximae et minimae in Barometro ſimplici ſecundum pollices pariſienſes, eorumque partes centeſimas per ſingulos menſes totius anni cum differentiis. 2. Calor maximus et minimus, ſiue frigus maximum per ſingulos quoque anni menſes cum differentiis adnotatur. 3. Meteora recenſentur potiora, additis vbique, vbi ſcilicet e re videtur, conſiderationibus et conſectariis, potiſſimum ex comparationibus deductis. Cuilibet regioni propria eſſe meteora, non ſolum, ſed cuilibet quoque anno eiusdem loci, ſatis conſtat.

Nos igitur notatu digniora enotabimus, quae hoc anno Petroburgi ſunt obſeruata. Denuo monendum eſt, obſeruationes has meteorologicas omnes ſecundum ſtilum Veterem eſſe confectas, quoniam hic, vti conſtat, eſt adhuc vſitatus.

Obſeruationes Barometricae primum occurrunt. Summa Barometri altitudo huic anno et huic loco pro-

propria, erat $=$ 28. 82. Nou. 9. obſeruata; infima $=$ 27. 00 Ianuarii 24 et 26 notata. Ergo ſumma altitudo huius anni minor eſt, maxima alias hic obſeruata, ſcilicet 1757 $=$ 29. 12, et quidem $\frac{50}{100}$ ſiue fere $3\frac{1}{2}$ lineae duodec. pollicis pariſienſis. Altitudo Barometri infima 27. 00, ſi comparetur cum infima alias hic obſeruata, nempe 26. 41. deprehenditur maior $\frac{59}{100}$ ſiue fere 7 lin. ſeu partibus duodecimis pollicis pariſienſis.

Ceterum variationes Barometricae primis et vltimis menſibus, quam mediis, maiores et hoc anno deprehenduntur, ita vt vix aut rariſſime ab hac lege exceptio occurrere ſoleat.

Minima variatio Barometrica fuit $=\frac{59}{100}$ ſiue fere 7 lin. menſe Nouembri. Minores differentiae et variationes hoc anno deprehenſae ſunt Menſe Aprili, Maio, Iunio, Iulio et Auguſto, eoque per 5 menſes, nonnunquam per 4 menſes tantum reperiuntur. Ceterum nec maxima neque minima variatio ſemper iisdem menſibus occurrunt, quod per antecedentes obſeruationes iam conſtat.

Quod ad obſeruationes thermometricas attinet, ſingulare et plane extraordinarium fuit frigus Dec. 26 obſeruatum $=$ 212, quo Auctor huius diſſertationis ſuum egregium inuentum de congelando mercurio perficiendi, occaſionem arripuit, et perfecit. Tantum frigus antea nunquam hic eſt obſeruatum, maximus enim frigoris gradus vltra 202 et 203 nunquam adhuc fuit notatus.

Calor

Calor maximus huius anni = 104, Maii 26 et Iulii 18 et 19 obſeruatus, ſolet eſſe fere ordinarius. A maximo calore igitur 97°. 1757 et 1758. hic obſeruato, differt 7°. Septem ſcilicet gradibus minor eſt.

Haec hiems poteſt igitur iure pro frigidiſſima haberi, quae vnquam hic contigit, quae notata eſt, id quod et frigoris gradus reliqui inſigniores quoque recenſiti ſatis demonſtrare poſſunt.

Penetratio inſignioris huius frigoris in terram extra vrbem, tanta quoque eſt deprehenſa, quanta forſitan antea nunquam, ſc. 30 pollicum Londinenſium, quum *Kraftius* vltra 12 pollices eam mitiore hieme non deprehenderit. Vid. ipſius Phyſicam p. 265. P. 1.

Interim glacies Neuae frigore hoc ſaeuo craſſior non multum eſt reperta, quam ordinarie ſolet, ſcilicet 29 Poll. pedis Lond. Ordinaria eſſe ſolet 1 Arſchin = 28 Poll. Lond. Altitudo aquae pluuiae fuit mediocris, nimirum per ſex menſes aeſtiuos, a Maio ad Octobrem 11 pollicum paris: Aeſtas igitur non humida, et annus ſat fertilis fuit.

Primum tonitru hoc anno quoque eatenus extraordinarium fuit, quod ſolito citius contigit, ſcilicet iam Martii 25. Ceterum 12 diebus tonitrua ſunt audita. Congelatio vltima fuit Apr. 22.

Prima rurſus Sept. 22.

Declinatio acus magneticae et hic loci quoque per dies variabilis in acu praeſtanti eſt deprehenſa, ſed parum, ita vt differentia inter maximam et minimam

nimam ſit vix aliquot minutorum. Denique notatu dignus eſt motus vibratorius acus magneticae tempeſtate inprimis fulminea imminente obſeruatus, qui ſine dubio eſt effectus electricitatis aëris.

V.

Obſeruationes Meteorologicae, Anni MDCCLX. factae Petroburgi, et Conſectaria.

Auctore I. A. Braunio pag. 369.

Quae generatim de obſeruationibus meteorologicis anni praecedentis praemonuimus, de huius anni quoque obſeruationibus valent. Statim igitur ad ea enotanda progredimur, quae huic anno propria fuerunt, et notatu ſunt digniora.

1) Quod ad obſeruationes Barometricas attinet, notamus primum altitudinem huius anni ſummam et infimam. Summa hoc anno fuit = 28. 58. et infima 26. 74. Summa hoc anno mediocris fuit, et ab altitudine omnium adhuc obſeruatarum ſumma, ſcilicet 29. 12 differt $\frac{64}{100}$ pollicis Pariſienſis quibus minor eſt. Minor quoque eſt altitudine anni praecedentis ſumma ſcilicet 28. 82. Nouemb. 9. obſeruata, $\frac{24}{100}$. Summa huius anni altitudo menſe Septembri, anni praecedentis contra, menſe Nouembri eſt obſeruata, et iam ex antecedentibus obſeruationi-

bus conſtat ſummas Barometri altitudines iiſdem menſibus non contingere vti quoque infimas.

Infima hoc anno = 26. 74 obſeruata eſt Octobr. 21. Minima vero anni praecedentis = 27.00 Ianuarii 24. et 26. Minima haec huius anni licet ſatis parua, maior tamen eſt $\frac{33}{100}$. minima omnium adhuc hic obſeruatarum, quae eſt 26. 41.

Differentia ſiue variatio menſtrua maxima altitudinum Barometricarum reperta eſt menſe Octobri 1. 78. Minima $\frac{65}{100}$ menſe Iunio. Minores hoc anno 4. tantum menſibus ſunt repertae, ſcilicet Aprili, Maio, Iunio, Iulio, anno praecedenti quoque menſe Auguſto, ideoque per 5. menſes. Anno praecedenti differentia minima fuit = $\frac{59}{100}$ eoque minor $\frac{5}{100}$ huius anni. Minima variatio huius anni incidit in menſem Iunium, anno praecedenti autem in Aprilem.

Maxima differentia et variatio menſtrua huius anni maior eſt, quam anni antecedentis. Eſt enim huius anni = 1. 78. anni praecedentis 1. 55. Hoc anno deprehenſa menſe Octobri eſt, anno vero praecedenti menſe Nouembri.

In obſeruationibus thermometricis ſequentia memorabilia.

Frigus maximum, quod incidit in Ianuar. 13. huius anni fuit = 206. eoque 6 gradibus minus eſt, quam anno praecedenti, quo fuit = 212°. Decembris 26. Calor maximus hoc anno non inſignis = 109°. incidit in menſem Maium, anno antecedenti in menſem quoque Maium et Iulium, qui

fuit

fuit $= 104°$. Gradus 109. raro maximus per annum eſſe hic ſolet, neque frequens in menſem Maium, ſed frequentius in Iunium et Iulium incidere ſolet.

Aeſtas igitur minus calida, contra hiems ſatis gelida erit cenſenda.

Ad meteora quod attinet, primum aurorae boreales 7, quarum tres inſignes et perfectae erant, hoc anno ſunt notatae.

Phaenomenum ſolare, quod fuit halo circa ſolem cum tribus pareliis adparuit Ianuarii 12. circa meridiem. Phaenomenum hoc in peculiari figura eſt repraeſentatum. Alia halo ſolaris adparuit cum pareliis, ſed non diſtinctis, Martii 2.

Tonitru primum hoc anno ſolito tardius euenit, ſcilicet Maii 16. quum anno praecedenti contra ſolito citius, iam Martii 25. ceterum tonitrua nouem diebus ſunt audita.

Halo circa ſolem elliptica, Auguſti 4. h. 8. mane obſeruata, eſt notatu digniſſima, rariſſime enim eiusmodi halones occurrere ſolent. Vid. Figuram.

Niues, ad inſtar paruorum ſpiculorum, quum non frequenter occurrere ſoleant, hic quoque ſunt adnotandae. Cecidere eiusmodi niues Decembris 10.

Altitudo niuis ad altitudinem aquae ex illa liquefacta fuit vt 11. ad 1. recenti niue lapſa, alias vt 9. 8. et 7. ad 1.

Altitudo aquae pluuiae per ſex menſes a menſe Maio ad Octobrem fuit $= 16$. poll. Pariſ. 5. lin.

Menſe Iulio maxima, et Septembri minima pluuiae copia cecidit.

Dies ſereni aut maiorem partem ſereni erant 134.

Venti vehementiores 32. Numerus ventorum vehementiorum maximus menſe Ianuario, Septembri autem nullus fuit.

Aëris electrici effectus ſaepius in acu magnetica ſe conſpiciendos praebuere per vibrationes, non ſolum coelo nubilo et tempeſtate fulminea imminente, ſed etiam coelo ſereno. In auroris contra borealibus veſtigium electricitatis in acu magnetica adparuit nullum.

VI.

Recenſiones binarum Diſſertationum. Hiſtoria et Examen Chymicum Lapidis Nephritici.

Auctore D. I. G. Lehmanno pag. 381.

Diuerſae Auctorum de hoc lapide opiniones ex omni tempore fuere, et vno eodemque nomine nunc verum Lapidem Nephriticum, nunc Malachitem, nunc Lapidem Amatonum, nunc Gallorum Iade, aliosque lapides opacos viridescentes inſigniuerunt. Auctor diſſertationis, iure, ad genus Smectitis, eiusque ſpeciem, Lapidem Serpentinum, eum refert. Hanc ſuam ſententiam ſequentibus argumentis comprobat. 1) Quod plerumque in fodinis Lapidis Serpentini in-

inueniantur, et vna cum hoc Lapide eruantur. 2) Eadem duritie cum his gaudent. 3) Color ambobus vt plurimum communis et idem 4) Partes conſtitutiuae ambobus fere eaedem et 5) per Experimenta Chymica eadem producta oriuntur, quae a Lapide Serpentino prouenire ſolent. Quin immo affinitatem quandam Lapidem inter Nephriticum et Serpentinum et Amianthum, Asbeſtum et Granatos eſſe, opinatur, ideo quoniam plerumque in vno eodemque loco natali, et ſatis arcte interdum connati reperiuntur. Id quod inprimis quoque elegantiſſima ab Auctore exhibita Exemplaria comprobarunt, quae ex fodina Reicher Troſt prope Reichenſteinum effoſſa ſunt, et in quibus Lapis Nephriticus cum Amiantho in Lapide Cornuo nigro arctiſſime connatus cernitur. Exponit poſtea Auctor labores Chymicos, quos cum hoc lapide inſtituit. Menſtrua acida parum tantum ex hoc lapide extraxerunt, quod indolis martialis eſſe ex praecipitationibus cognouit. Easdem partes martiales per ſublimationes cum Sale Ammoniaco, Mercurio Sublimato, Sale Alembrot, detexit. Fundendo cum Sale Tartari et Borace in Vitrum ſubluteum, cum Tartaro Vitriolato in Vitrum viride, abit. Eodem colore gaudebat vitrum ex hoc lapide et arſenico fixo conflatum. Lapis cum Argilla ſola, nec non cum Argilla et Smectite ſimul ſuſus, vitrum dedit durum, cum chalybe ſcintillas ſpargens. Ex his Experimentis Analogiam inſignem Lapidis Nephritici cum Amiantho et Asbeſto deducit et comprobatam

 credit

credit, ideo quoniam Asbeſtus et Amianthus eodem modo ſe habent. Haec Diſſertatio ne meris tantum Experimentis omni vtilitate deſtitutis, concinnata videatur, in fine vſum paucis quamuis tantum indigitat, qui exinde in artem fuſoriam redundare poteſt. Notum eſt in Imperio Auguſtiſſimae noſtrae Mineras Cupri per ſe ſatis diuites reperiri, Lapide Nephritico et Amiantho intertextas et interſperſas, quae propterea refractariis annumerantur. Cum vero ex adductis in Diſſertatione Experimentis pateat, mediante argilla hoc lapidis genus in vitrum bene fuſum vel quod vnum idemque eſt, in ſcoriam bene fuſam (dünne Schlacke) abire, hoc modo forſitan paucis impenſis hoc Minerarum genus cum fructu in furnis fuſoriis, ſolo argillaceo additamento adhibito, fundi poterit, qui euentus, ſi expectationi reſpondet, non exigui momenti eſſe debet.

VII.

De Entrochis et Aſteriis Columnaribus trochleatis, vulgo Schraubenſteinen. Accedit Problema de Petrefacto incognito nouiter inuento.

Auctore D. I. G. Lehmanno p. 413.

Haud diu eſt et vix Seculum elapſum ex quo Hiſtoriae naturalis amatores petrefacta paullo penitius conſiderare, examinare, dignati ſunt. Haec dis-

disquiſitio pro voto in eis petrefactis ſucceſſit, quorum Originalia ex regno animali et vegetabili ſatis fuerunt cognita. Pluribus vero difficultatibus ea ſunt ſubiecta, quorum Originalia ſagacitati Phyſicorum hucusque effugerunt. Huius indolis petrefactis noſtri quoque aeui auctores complures, Entrochos Columnares trochleatos annumerarunt, eosque nunc Conchylia nunc Zoophita petrefacta eſſe crediderunt. Auctor Diſſertationis per complura Exemplaria non tantum allegata, verum quoque in Conſeſſu Academico demonſtrata, hos lapides Entrochis Columnaribus iure annumerat, qui, vti notum eſt, de Stellis marinis diuerſi generis, Encrinis, et Capitibus Meduſae, ortum ſuum trahunt. De hac re certior factus eſt in Exemplare quodam ex ferrifodinis Huttenrodanis in Hercynia eruto, quod diffractum eandem ſtellam pentagonum monſtrat, quam in compluribus Trochis et Entrochis Columnaribus cernimus. Tab. XII. fig. 5. eius iconem exhibet. Sententia auctoris magis adhuc corroboratur per aliud adhuc Exemplar Tab. XII. fig. 7. delineatum, vbi *a* axem Entrochi monſtrat, cui Trochus circa hanc axem verſatilis inhaeret. Quin immo, ipſae hae axes luculenter teſtantur, Lapides iſtos ad Entrochorum familiam pertinere, cum neminem fugiat, Trochos complures in centro perforatos reperiri. Omnibus vero argumentis, noſtra quidem ſententia palmam praeripere videtur, Anatome ramorum vel brachiorum Capitis Meduſae Archangelopolitani ab Auctore inſtitutum, quae ei eandem cum Entrochis figu-

figuram, ſtructuram et conformationem monſtrauit. Haec omnia ſimul ſumta ſententiam extra dubium ponent, Trochleas iſtas lapideas ad Entrochos Columnares, id eſt, ad partes ſtellarum marinarum, Capitum Meduſae, Encrinorum, petrefactas, pertinere. Colophonis loco proponit Auctor Diſſertationis Problema de Petrefacto quodam incognito, quod, vti adiectae figurae Tab. XII. fig. 8. 9. monſtrant, mox piſcem mox concham quandam ſimulat. Poſteaquam haec diſſertatio Academiae exhibita fuit, inuenit Auctor in Ephemeridibus Acad. Scient. Suecicae Tom. 21. pag. 20. et in Muſaeo Teſſiniano pag. 98. No. 3. deſcriptionem a Cl. Domino Equite de Linne concinnatam petrefacti, quod plurima ex parte cum noſtro conuenit. Cl. Eques de Linne l. c. illud Enthomolithum paradoxum appellat, et tres eius allegat ſpecies. 1) Dorſo laeui aequali. 2) Dorſo ſtriis transuerſis conuexis integris viginti. 3) Dorſo ſtriis transuerſis conuexis interruptis viginti, punctisque ſex longitudinalibus. Ad quam vero Enthomolithorum Claſſem proprie pertineant, determinare non auſus eſt, ſed potius quaſi Intermedium quoddam eſſe credit Cancros inter et Oniſcos et Monoculos. Cum huius generis petrefacta rariſſimis fere ſint annumeranda, cumque eorum Originalia in hunc vsque diem reperta non ſint, optandum foret, vt plures Minerophili eorum originem inueſtigare ſtuderent.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

I.

Diſſertatio Aſtronomica De effectu Parallaxeos in tranſitu Planetarum ſub Sole.

Auctore F. V. T. Aepino pag. 133.

Appropinquante celebri illo coeleſti phaenomeno, tranſitu Veneris per diſcum Solis anno 1761, Cl. Auctor exhibuit Academiae diſſertationem, de qua hic ſermo eſt, eique adiunxit mappam, principiis hic expoſitis ſuperſtructam, in qua vno quaſi intuitu conſpicere erat loca, quae praecipua huius phaenomeni momenta, immerſionem ſcilicet atque emerſionem Veneris dato tempore, citius aut tardius, ob parallaxin prae centro Telluris ſpectare debebant. Cel. *De l'Iſle* primus huiusmodi mappam occaſione tranſitus Mercurii per diſcum Solis anno 1753 viſi, in lucem edidit. Aſt celauit artificia, quibus in conſtructione ipſius vſus eſt. Praecipuus itaque ſcopus, quem Cl. Auctor hac diſſertatione intendit, is eſt, vt oſtendat, qua ratione eiusmodi mappae pro tranſitu Planetarum ſub Sole conſtrui queant.

Cum effectus parallaxeos in eo conſiſtat, vt immerſio Veneris in diſcum Solis aeque ac emerſio e diuerſis telluris locis, diuerſo tempore fieri conſpiciatur, Cl. Auctor de effectu parallaxeos agens, primum ſibi proponit ſequens problema ſoluendum: *Inuenire momentum quo diſtantia centrorum Solis et Planetae ex dato puncto videtur ſub angulo dato.* Vt ad ſolutionem illius viam ſternat, rem ordiſtur a generalibus contemplationibus, ex quibus cum perſpexiſſet infinita dari puncta problemati ſatisfacientia, in ſuperficie ſita, quae producitur rotatione circuli ſuper recta diſtantiam centrorum Solis et Planetae referente, deducitur ad principale problema, quo quaeritur; *quonam momento datum telluris punctum in hac ſuperficie reperiatur?* Non alia enim puncta globi terreſtris elongationem Planetae ac Solis ſub dato angulo videre poterunt, niſi quae in interſectione ſuperficiei Telluris, cum ſuperficie ſupra memorata fuerint locata.

Ne vero in ſolutione problematis, vti propoſitum eſt, ad formulas intricatas deuoluatur, primum circulum tantum telluris, qui formatur interſectione a plano per centra Solis, Terrae ac Planetae tranſeunte conſiderat. Euoluta iam formula generali, qua exprimitur proprietas punctorum in plano huius circuli exiſtentium, et diſtantiam centrorum Solis ac Planetae ſub dato angulo conſpicientium, id agit, vt oſtendat, qua ratione pro quouis puncto, in hoc plano reperiundo, problema ſolui, atque ad Immer-

ſionem

ſionem aeque ac ad Emerſionem erutae formulae adaptari debeant.

Abſolutis generalibus deſcendit Cl. Auctor ad ſpecialia, quae in tranſitu Planetarum ſub Sole veniunt conſideranda; oſtendit ſcil. qua ratione formulae ad centrum telluris accommodari debeant, et determinari queant loci, quorum alter primum, alter vltimum omnium Immerſionem aut Emerſionem conſpiciunt, atque indicat modum, ad quem computus commodiſſime peragi debeat.

Quoniam plura ſemper dantur ſuperficiei telluris puncta Immerſionem ſiue Emerſionem Veneris eodem tempore conſpicientia, omnia vero ſita ſunt in circulo quodam in ſuperficie telluris ducto, prout patet ex iis, quae in principio diſſertationis dicta ſunt, Cl. Auctor exponit modum circulos hos deſignandi tam in globo artificiali, quam in plano proiectionem telluris exhibente. Pro primo caſu definit polum et eius diſtantiam a perimetro circuli deſcribendi; pro ſecundo vero docet artificia, quorum ope circulus hic in proiectionem telluris transferendus eſt, atque ſic omnia, quae ad finem, quem propoſuerat, obtinendum faciunt, Cl. Auctor abſoluiſſe eſt exiſtimandus. Diſſertationem hanc orbi erudito gratam et acceptam vel ideo maxime fore confidimus, quod peculiari, et prorſus noua ratione abſtruſam hanc theoriam pertractauerit.

II.

Diſſertatio II.

De effectu parallaxeos in Tranſitu Planetarum ſub Sole.

Auctore F. V. T. Aepino pag. 454.

In prima diſſertatione Cl. Auctor occupatus fuit in enucleanda theoria generali effectus parallaxeos in tranſitu Planetarum ſub Sole, formulisque analyticis concinnandis in hoc negotio adhibendis, neque de earum abbreuiatione, niſi quatenus calculi analytici difficultates ſuperandae permiſerant, fuit ſollicitus. Vt igitur illas contrahat, concinnioresque reddat, adplicat ad caſum ſpecialem, ad proximum nempe qui euenerat tranſitum. In Aſtronomia non raro offerunt ſeſe caſus, vbi non minor ſolertia in formulis, quae problematis ſolutionem continent, condendis, quam iis ad vſum deducendis requiritur: Hic certe ad numerum eorum referri debet. Concinnitati itaque formularum Cl. Auctor intentus, rem perquam vtilem praeſtitiſſe eſt cenſendus, dum integram theoriam ſuam exemplo illuſtrauerit, et rationem in ſimilibus caſibus formulas ſuas adhibendi monſtrauerit. Ex hoc fonte promanauit mappa illa cuius ſupra mentionem fecimus.

III.

III.

De Venere in Sole viſa Anno 1761. d. 6. Iunii St. nou.

Auctore G. Heinſio pag. 473.

In obſeruatione rariſſimi huius phaenomeni peragenda, eodem inſtrumentorum apparatu, eademque methodo vſus eſt Cl. Auctor, quam in Nou. Comm. Tomo VI. occaſione Mercurii in Sole Anno 1753. ab eodem Lipſiae obſeruati, copioſiſſime expoſuit. In concluſionibus vero ex obſeruatis ſuis deducendis, in locum conſtructionis Geometricae ibidem traditae, rectiſſime calculum hic ſubſtituere maluit.

Non ſine ratione Cl. Auctor in limine de intempeſtiua caeli facie conqueritur: Nam ſi caelum faueret, per bihorium et amplius a ſole orto iucundiſſimo ſpectaculo frui illi licuiſſet, antequam tubo aſtronomico ſex pedes longo libella et reticulo inſtructo, Venerem, vt ſemitam eius apparentem definiret, venari cepiſſet. Inſtitutis nouem huius indolis obſeruationibus, cum Venus emerſioni propinqua iam foret, praeparauit ſeſe Cl. Auctor ad contactus obſeruandos tubo Gregoriano 52. vicibus obiecta amplificante, atque incredibili mentis et oculorum celeritate obſeruationem hanc perfecit: plurima etenim momenta pauciſſimis ſecundis ſeſe excipientia obſeruauit.

Dum difficultates obſeruationem afficientes, atque in parallaxin ſolis reſultantes anxie perſequitur, dubitat, quodnam momentum contactus ne interior vtriusque limbi $8^{h.}$ $8'$, $7''$, totalis ne luminis ad marginem Veneris diſparitio $8^{h.}$ $8'$ $27''$ ad merid. Lipſ. pro initio egreſſus aſſumendum ſit, et quemuis obſeruatorem per viginti ſecunda et amplius haeſitare in eo poſſe Cl. Auctori perſuaſum eſt. Interim miſſo contactu momentum diſparitionis luminis inter limbum Veneris, lineamque a reliqua diſci ſolaris peripheria quaſi ſeparatam, et a Cl. obſeruatore viſam ſc. $8^{h.}$ $8'$ $27''$ pro initio egreſſus aſſumi debere exiſtimat.

Si quis modum, quo Cl. Auctor ex Obſeruationibus tubo ſuo libella et reticulo inſtructo peractis, poſitionem Veneris in diſco Solis viſam elicit, ſcire cupit, is ex ipſa diſſertatione ipſum haurire poterit. Id ſolum hic monuiſſe ſufficiat: Ex nouem diuerſis obſeruationibus Latitudinem Veneris momento coniunctionis viſam ex computo Auctoris profluxiſſe $9'$ $57''$ Auſtr. ipſum momentum coniunctionis centrorum Solis et Veneris in Ecliptica Iunii d. 5. $6^{h.}$ $35'$ $7''$ ad merid. Lipſ. et Latitudinem denique heliocentricam $3'$ $57''\frac{1}{2}$ non habita ratione parallaxeos.

Solemne eſt Cl. Auctori ſumma tantum capita obſeruationum ſuarum referre. Verum optandum eſt, vt ad normam a celeberr. Aſtronomis probatam, examen ſaltem horologii in tam graui obſer-

ſeruatione iudicio lectorum ſubmitteret, quo maior fides et certitudo ipſis obſeruatis concilietur.

IV.

De effectu parallaxis in Tranſitu Veneris per Solem.

Auctore G. Heinſio pag. 501.

In diſſertatione praecedente, cuius iſtam tanquam Continuationem Auctori nominare placet, inueſtigauit Cl. Auctor ex obſeruationibus Lipſiae habitis ſemitam Veneris intra diſcum Solis, qualis apparuiſſet, ſi Sol et Venus ad infinitam quaſi diſtantiam a Terra remoti fuiſſent, atque inde concluſiones vſui Aſtronomico inſeruientes elicuit. Cum vero hypotheſis iſta veritati non ſit conſentanea, concluſiones ibi erutas correctione indigere vltro patet: Parallaxin etenim Solis nec non et Veneris ſenſibilem eſſe aliae obſeruationes euincunt, atque idcirco ſemita Veneris a ſpectatore in centro Telluris conſtituto viſa, prorſus diuerſa debet eſſe ab ea, quam videt ſpectator in ſuperficie Telluris locatus, et pro diuerſo ſitu obſeruatoris, diuerſa quoque ſemita apparens locum habeat neceſſe eſt. Quam ob rem concluſiones in vſum Aſtronomicum ex obſeruationibus in ſuperficie Telluris habitis deriuari non poterunt, niſi eae prius ad centrum Telluris reducantur: Id quod eo curatius praeſtari poterit, quo exactiori cognitione parallaxeos Solis inſtructi fuerimus.

Quo-

Quoniam Aſtronomi in enodanda ſubtili quaeſtione de quantitate parallaxeos Solis vti et Veneris omnem ſpem in tranſitum hunc coniecerant, et absque exacta illius cognitione ſemita Veneris ex dato ſuperficiei Telluris loco viſa, ad centrum Telluris reduci nequit, perſpicuum eſt, vtramque quaeſtionem ita inter ſe connecti, vt altera alterius poſtulet ſolutionem. In enodanda igitur quaeſtione de quantitate parallaxeos Solis, ad methodum indirectam confugiendum eſt, vt ſc. ſuppoſita parallaxi aliunde cognita calculo inquiramus in effectus, qui inde pro datis locis reſultent, eosque comparemus cum iis, quos obſeruationes manifeſtarunt. Comparatione inſtituta patebit quantum aſſumta parallaxis a vera diſcrepet. Inquiſitio autem effectuum ſupponit ſemitam Veneris ad centrum Telluris reductam. Hanc ob rem Cl. Auctor, vt ordine procedat in iſta diſſertatione, primariam quaeſtionem, *conceſſis parallaxibus et ſemita Veneris ad centrum Telluris explorare effectus parallaxeos*, enodandam ſibi proponit.

Rem integram orditur a primis principiis, et in genere perſequitur effectus, quales in diuerſis circumſtantiis a parallaxi profecturi ſunt. Vt doctrinam ſuam illuſtret, deſcendit ad ſpecialia: Ex Tabulis Aſtronomicis ſumtis elementis ad ſchema pro obſeruatore in centro Telluris conſtituto conſtruendum, praecipua momenta tranſitum ſpectantia per calculum elicit. Cognito ſchemate ad centrum Telluris, perpendit circumſtantias ſub quibus obſeruatori in ſuperficie Telluris locato phaenomenon hoc apparitu-

rum

rum ſit, dein integram theoriam illuſtrat exemplo ad obſeruatorem Lipſienſem applicato. Poſita parallaxi ſolis 10″ et calculo ad methodum expoſitam inſtructo, inuenit Lipſiae ob parallaxin centrum Veneris 1′ 38″ citius egredi debere, et ingredi 6′ 29″ tardius prae obſeruatore in centro Telluris conſtituto. Eandem rem praeſtitit ſub aliis quoque hypotheſibus.

In introitu iam Cl. Auctor monuit, multos non niſi ad primarios effectus parallaxeos circa ingreſſum nempe et egreſſum attendiſſe, aliorum tamen effectuum durante tranſitu conſiderationem non fuiſſe poſtponendam. Idcirco expoſitis effectibus in introitu et exitu Veneris pro obſeruatore Lipſienſi accingit ſeſe Auctor ad ſolutionem problematis: *ad datum tempus definire poſitionem mutuam centri Veneris in puncto aliquo ſemitae ſuae haerentis, et centri Solis a dato obſeruatore in aliquo ſemitae ſuae Eclipticae loco viſi*; et retenta eadem parallaxi Solis, ſeriem locorum ſemitam centri Veneris exhibentem in tranſitu per diſcum Solis Lipſiae viſam calculo inueſtigat.

Impletis 42 paginis argumentum hoc ſpectantibus Cl. Auctor filum abrumpit, idem in alia diſſertatione aliaque methodo pertractaturus, quam facilius iudicium de quantitate parallaxeos largitum iri exiſtimat.

V.

Conſiderationes de motu Corporum Coeleſtium.

Auctore Leon. Eulero pag. 544.

Licet nullum ſit dubium, quin leges, quibus corpora coeleſtia in motibus ſuis obediunt, a *Keplero* detectae, a *Neutono* vero in maximum Aſtronomiae incrementum demonſtratae ſint, minime tamen exiſtimandum eſt theoriam Aſtronomiae ad ſummum gradum perfectionis euectam eſſe. Poſſumus equidem motum duorum corporum in ratione directa maſſarum et inuerſa quadratorum diſtantiarum in ſeſe agentium, perfecte definire: verum ſi iis accedat tertium, vt vnum quodque in reliqua ſecundum illam legem agat, motui eorum enodando omnia hucusque inuenta Analyſeos artificia minime ſufficiunt. Quidquid autem de motu Lunae et reliquorum corporum coeleſtium a viris celeberr. hucvsque praeſtitum eſt, id non niſi approximationibus innititur, quae eatenus locum inueniunt, quod inter ternas vires vna prae reliquis maxime ſemper emineat, ita vt effectus a reliquis oriundus veluti minimus ope approximationum definiatur, quae tamen negotium minime conficiunt.

Quoniam Solutio problematis de tribus Corporibus, ſecundum memoratam legem in ſeſe inuicem

cem agentibus, ſenſu generali accepti vires humanas Cel. Auctori merito transcendere videtur, tentauit illud reſtrictum ſoluere poſita maſſa vnius prae binis reliquis euaneſcente, vt ſcilicet incipiendo a caſibus particularibus viam ſternat ad ſolutionem problematis ſenſu generali accepti; Verum reſtricto etiam ſic problemate tantae difficultates in ſolutione eius ſeſe obtulerant, vt ipſe Cel. Auctor fruſtra in euoluendo eo ſe deſudaſſe fateatur. Interea obſeruauit caſum per quam ſingularem et notabilem, quo Lunae eiusmodi motus imprimi potuiſſet, vt perpetuo vel in oppoſitione vel in Coniunctione cum Sole apparuiſſet, ſi ſc. Luna quater fere longius a nobis remota, et ei eiusmodi motus impreſſus fuiſſet, vt pari paſſu cum Terra in plano Eclipticae ingredi inciperet. Licet fictam hypotheſin Cel. Auctor in calculum introduxerit, veram nihilo minus exinde et minime expectatam elicuit de limite Satellitum Terrae concluſionem; corpora nempe quae quadruplo magis a nobis ac Luna diſtant in numerum planetarum primariorum, propiora vero in numerum Satellitum terrae referenda ſunt.

Vt Luna coniuncta vel oppoſita perpetuo Soli maneat, motus illi in plano Eclipticae idemque cum Tellure imprimatur neceſſe eſt; quodſi vero ille a lege hac diſcrepet, Luna exiguas excurſiones hinc inde oſcillando tanquam conficiet. Cel. Auctor naturam quoque earum adhibitis approximationibus eo, quo pollet acumine, in diſſertatione iſta ſcrutatus eſt.

INDEX
COMMENTARIORVM.

Mathematica.

L. Euleri, De reductione Formularum integralium ad rectificationem Ellipſis ac Hyperbolae pag. 3.

Eiusdem, Elementa calculi variationum pag. 51 et

Eiusdem, Analytica explicatio methodi maximorum et minimorum pag. 94.

Eiusdem, De inſigni promotione methodi tangentium inuerſae pag. 135.

Eiusdem, Dilucidationes de Tautochronis in medio reſiſtente pag. 156.

Eiusdem, Demonſtratio Theorematis Bernoulliani, quod ex euolutione curuae cuiuscunque rectangulae in infinitum continuata tandem Cycloides naſcantur pag. 179.

Kotelnikouii, Demonſtratio ſeriei

$$\frac{4.\ 6.\ 10.\ 14.\ 18.\ 22.\ \ldots\ (4^n-10)}{0.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ \ldots\ (n-1)}$$

exhibitae in recenſione VI. Tomi VII. commentariorum A. S. P. pag. 199.

Phyſico-Mathematica.

— *L. Euleri*, De motu corporis ad duo virium centra attracti pag. 207.

Eiusdem, De motu vibratorio tympanorum p. 243.

Eiusdem, Tentamen de ſono campanarum p. 261.

Aepini,

— *Aepini*, Obſeruationes quaedam ad opticam pertinentes pag. 282.
— *Eiusdem*, Similitudinis effectuum vis Magneticae et Electricae nouum ſpecimen pag. 296.
— *Zeiberi*, Deſcriptio duplicis microſcopii ſolaris apparatus obiectis opacis adaptati pag. 299.
— *Eiusdem*, Methodus expedita velocitatem venti abſolutam determinandi pag. 302.

Phyſica.

Braunii, Caloris diminuti et aucti phaenomena noua paradoxa, et conſiderationes pag. 309.
Koelreuteri, Piſcium rariorum e Muſ. Petrop. excerptorum Deſcriptiones continuatae, continuatio X. XI. XII. XIII. pag. 329.
Eiusdem, Dentalii Americani, ingentis magnitudinis Deſcriptio pag. 352.
Braunii, Obſeruationes Meteorologicae potiores anni MDCCLIX Petroburgi factae, et in eas conſiderationes pag. 357.
Eiusdem, Obſeruationes Meteorolog. anni MDCCLX factae Petroburgi pag. 369.
Lehmanni, Hiſtoria et Examen chymicum Lapidis Nephritici pag. 381.
Eiusdem, De Entrochis et Aſteriis columnaribus trochleatis vulgo von Schraubenſteinen, accedit problema de petrefacto incognito noviter inuento pag. 413.

Aſtronomica.

— *Aepini*, Diſſertatio Aſtronomica de Effectu parallaxeos in tranſitu Planetarum ſub Sole p. 433.

— *Eiusdem*, Diſſertatio II. De Effectu parallaxeos in tranſitu Planetarum ſub Sole pag. 454.

— *Heinſii*, De Venere in Sole viſa. Lipſiae an. 1761. D. 6. Iunii St. n. horis matutinis temp. ciuili pag. 473.

— *Eiusdem*, De Effectu parallaxis in tranſitu Veneris per Solem pag. 501.

— *L. Euleri*, Conſiderationes de motu corporum coeleſtium pag. 544.

Addita-

Additamentum *Ioh. Gottl. Lehmanni*, ad Diſſertationem ſuam pag. 430. huius Tomi.

Dies diem docet: et ex eo tempore quo tanquam problema petrefactum iſtud incognitum hiſtoriae naturalis amatoribus explicandum propoſui, iam biennium eſt elapſum, non deſii penitius in naturam eius inueſtigare, et expertus ſum, hoc petrefactum eſſe Entomolithum Oniſci, et quidem Tab. XI. Fig. 8. 9. et Tab. XII. Fig. 8. 9. Oniſcum petrefactum, dorſo ſtriis transuerſalibus conuexis integris viginti, monſtrat. Fig. 10. Tab. XII. vero Oniſcum, dorſo ſtriis transuerſis conuexis interruptis viginti, punctisque ſex longitudinalibus in lapide calcareo petrefactis innumeris referto, ex Gothlandia, exhibet. Huius inſecti ſpecies haud raro his quoque in confiniis Petropolis, in oſtiis ſinus Finnici et fluminis Fontalkae aut Fontanae, viuae et diuerſae magnitudinis a Secretario Academiae noſtrae, Status Conſiliario Dom. *de Staehlin* repertae fuerunt. Celeberrimus Eques Dom. de *Linne* in Act. Academ. Vpſal. Tom. 21. huius inſecti non minus quam in Muſ. Teſſin. pag. 98. No. 3. mentionem facit, rem tamen in ambiguo relinquens, pertineatne ad Cancrorum, Monoculorum, Oniſcorum familias; et ideo quoque hoc petrefactum Entomolithum paradoxum appellauit, vel Intermedium quoddam Cancrum, Oniſcum, Monoculum inter. Mihi in praeſentiarum ſufficit explicuiſſe, hoc petrefactum ad Entomolithos Oniſcorum pertinere. D. 17. Mart. 1766.

MATHE-

MATHEMATICA.

DE

REDVCTIONE FORMVLARVM INTEGRALIVM AD RECTIFICATIONEM ELLIPSIS AC HYPERBOLAE.

Auctore

L. EVLERO.

Egregia omnino ſunt, quae acutiſſimi Geometrae *Maclaurin* et *D'Alembert* de reductione formularum integralium ad rectificationem Ellipſis et Hyperbolae ſunt commentati; cum in iis non ſolum inſignis vis ingenii ſpectetur, ſed etiam haud exigua ſpes affulgeat, his rectificationibus in calculo aeque commode vtendi, atque adhuc arcus circulares et logarithmos adhibere ſumus ſoliti. Nullum enim eſt dubium, quin haec inueſtigatio a ſummis Geometris tam felici ſucceſſu ſuſcepta latiſſime pateat, atque vberrimos fructus aliquando ſit allatura; quamuis enim iam plurimum in hoc negotio ſit praeſtitum, minime tamen totum argumentum quaſi exhauſtum eſt cenſendum. Nam poſtquam longe diuerſa methodo vſus eo perueni, vt tam in Ellipſi quam Hyperbola diuerſos arcus definire potuerim, quarum differentiam geometrice aſſignare liceat, de quo quidem laudati viri dubitaſſe videntur, hinc non leuis acceſſio in tractatione huius ar-

gumenti expectari poterit. Imprimis autem hic idoneus ſignandi modus deſiderari videtur, cuius ope arcus elliptici aeque commode in calculo exprimi queant, ac iam logarithmi et arcus circulares ad inſigne Analyſeos incrementum per idonea ſigna in calculum ſunt introducti. Talia ſigna nouam quandam calculi ſpeciem ſuppeditabunt, cuius hic quaſi prima elementa exponere conſtitui.

Quemadmodum autem omnes arcus circulares ad circulum, cuius radius vnitati aequalis ſtatuitur, referri ſolent, ita etiam pro omnibus ſectionibus conicis, quas in calculum recipere volumus, menſuram quandam fixam vnitate exprimendam aſſumi conueniet, quae ad omnes ſpecies aeque pertineat. Perſpicuum autem eſt, hanc menſuram axi transuerſo tribui non poſſe, cum is in parabola neceſſario fiat infinitus, in hyperbolis autem negatiuum valorem conſequatur: aeque parum axis coniugatus ad hoc inſtitutum eſt accommodatus, quippe qui in parabola quoque fit infinitus, et in hyperbolis valorem adeo imaginarium adipiſcitur. Relinquitur igitur parameter, cui, quominus perpetuo valor fixus tribui queat, nihil plane obſtat; et quoniam pro circulo parameter abit in diametrum, huiusque ſemiſſis vnitate exprimi ſolet, conſtanter in ſequentibus parametrum binario indicabo, vt eius ſemiſſis vnitate exprimatur.

Hypotheſis 1.

1. Perpetuo igitur mihi vnitas ſemiparametrum, ſeu ſemilatus rectum ſectionis conicae, exprimat.

Coroll.

Coroll. 1.

2. Si ergo a denotet ſemiaxem transuerſum, in quo abſciſſae x a vertice capiantur, iisque applicatae y normaliter conſtituantur, habebitur iſta aequatio:

$$yy = 2x - \frac{xx}{a}.$$

Coroll. 2.

3. Quamdiu a quantitatem poſitiuam denotat, aequatio erit pro ellipſi, quae quidem, ſi $a = 1$, abit in circulum; at poſito $a = \infty$ habebitur parabola. Valores autem negatiui ipſius a ad hyperbolas pertinent.

Coroll. 3.

4. Ex hac aequatione fit $dy = \frac{dx(a - x)}{\sqrt{a(2ax - xx)}}$, hincque arcus abſciſſae x reſpondens $= \int \frac{dx\sqrt{(aa - 2a(1-a)x + (1-a)xx)}}{\sqrt{a(2ax - xx)}}$ ſeu $= \int dx \sqrt{\left(\frac{a}{2ax - xx} + \frac{a-1}{a}\right)}$ pro ellipſi, ſi fuerit a numerus poſitiuus.

Coroll. 4.

5. Poſito $a = 1$, fit pro circulo arcus abſciſſae x, quae eſt eius ſinus verſus, reſpondens $= \int dx \sqrt{\frac{1}{2x - xx}}$, vti conſtat, ac poſito $a = \infty$, prodit parabolae arcus abſciſſae x reſpondens $= \int dx \sqrt{\left(\frac{1}{2x} + 1\right)}$.

Coroll. 5.

6. Si denique a habeat valorem negatiuum, puta $a = -c$, erit pro hyperbolis arcus abſciſſae x reſpondens $= \int dx \sqrt{\left(\frac{c}{2cx + xx} + \frac{c+1}{c}\right)}$.

Hypotheſis 2.

7. In ſectione conica, cuius ſemiparameter $= 1$ et ſemiaxis transuerſus $= a$, atque abſciſſae in axe transuerſo a vertice capiantur, arcum abſciſſae x reſpondentem hac ſcriptione $\Pi x [a]$ indicabo.

Coroll. 1.

8. Poſt ſignum ergo Π ſcribetur abſciſſa in axe transuerſo a vertice computata, cui ſubiungetur ſemiaxis transuerſus intra vncinulas [ ] expreſſus.

Coroll. 2.

9. Haec ergo expreſſio $\Pi x [a]$ deſignat arcum ellipticum, ſi a ſit quantitas poſitiua, et circularem quidem, ſi $a = 1$, cuius ſinus verſus $= x$. At ſi $a = \infty$, exprimit ea arcum parabolicum, ac denique ſi a ſit quantitas negatiua, arcum hyperbolicum.

Coroll. 3.

10. Habet ergo huiusmodi expreſſio $\Pi x [a]$ valorem determinatum, eaque non ſolum ſectio conica definitur, ſed etiam eius arcus illa expreſſione indicatur.

Coroll. 4.

11. Manifeſtum autem eſt, vt iſtius expreſſionis valor fiat realis, abſciſſam x non ſolum realem, ſed etiam poſitiuam, eſſe debere. Tum vero praeterea, ſi fuerit a quantitas poſitiua, neceſſe eſt, vt abſciſſa x limitem $2a$ non transgrediatur. Quantitatem a autem neceſſario realem eſſe oportet.

Coroll.

Coroll. 5.

12. Haec ergo expreſſio $\Pi x[a]$ imaginaria erit, ſi vel 1mo. numerus a fuerit imaginarius, vel 2do. x quantitas imaginaria, vel 3^{tio}. quantitas negatiua, vel 4to. poſitiua quidem, ſed maior quam $2a$, ſi ſcilicet a ſit quantitas poſitiua.

Coroll. 6.

13. Notetur quoque, hanc formulam $\Pi x[a]$ eiusmodi functionem ipſius x exhibere, quae euaneſcat euaneſcente x, ita vt ſit $\Pi 0[a]=0$. Sin autem ſit x quantitas infinite parua $=\omega$, erit $\Pi\omega[a]=\sqrt{2\omega}$, neque ergo ab a pendet.

Theorema 1.

14. Si haec formula differentialis $dx\sqrt{(\frac{a}{2ax-xx}+\frac{a-1}{a})}$ ita integretur, vt integrale euaneſcat poſito $x=0$, erit $\int dx\sqrt{(\frac{a}{2ax-xx}+\frac{a-1}{a})}=\Pi x[a]$.

Demonſtratio.

Vtraque enim expreſſio refertur ad ſectionem conicam, cuius ſemiparameter $=1$, et ſemiaxis transuerſus $=a$, atque arcum eius denotat a vertice ſumtum, qui abſciſſae x reſpondet, abſciſſa in axe transuerſo ſumta, ac pariter a vertice computata.

Coroll. 1.

15. Si pro a ſcribamus $-a$, habebitur:

$$\int dx\sqrt{(\frac{a}{2ax+xx}+\frac{a+1}{a})}=\Pi x[-a]$$

quo caſu, ſi quantitas vncinulis incluſa ſit negatiua, arcus hyperbolicus indicatur.

Coroll.

Coroll. 2.

16. Si ſit $a=\infty$, quo caſu prodit rectificatio parabolae, erit $\int dx V(\frac{1}{2x}+1)=\Pi x[\infty]$, cuius valor, vbi conſtat, per logarithmos exhiberi poteſt.

Coroll. 3.

17. At ſi ſit $a=1$, vt habeatur $\int\frac{dx}{V(2x-xx)}$ $=\Pi x[1]$, hac expreſſione arcus circuli, cuius radius $=1$, exprimitur, cuius ſinus verſus $=x$; eius ergo coſinus erit $=1-x$, et ſinus $=V(2x-xx)$.

Coroll. 4.

18. Cum eidem abſciſſae x geminus arcus, alter poſitiuus, alter negatiuus, reſpondeat, expreſſio $\Pi x[a]$ per ſe geminum exhibebit valorem, perinde vti ſigna radicalia quadratica; erit ergo functio biformis, tam valorem negatiuum, quam poſitiuum, continens.

Scholion.

19. Quoties autem expreſſio $\Pi x[a]$ ad ellipſin refertur, ea non ſolum duos, verum adeo infinitos, valores complectitur, perinde vti in circulo infiniti dantur arcus eidem ſinui verſo x conuenientes. Naturam ergo huius functionis infinitiformis pro ellipſibus accuratius perpendamus.

Problema 1.

20. Inuenire omnes arcus ellipticos eidem abſciſſae x reſpondentes, ſeu definire omnes valores formulae $\Pi x[a]$ conuenientes.

Solutio.

Solutio.

Sit z minimus arcus abſciſſae x reſpondens in ellipſi, cuius ſemiaxis transuerſus eſt $= a$, ponatur ſemiperimeter ellipſis $= A$, vt ſit tota perimeter $= 2A$, atque manifeſtum eſt, eidem abſciſſae x etiam reſpondere arcus $2A - z$; $2A + z$; $4A - z$; $4A + z$; $6A - z$; $6A + z$ etc. qui omnes cum ſuis negatiuis continentur in formula $\Pi x\,[a]$: ita vt eius valor in genere ſit $\pm 2nA \pm z$, denotante n numerum integrum quemcunque.

Coroll. 1.

21. Cum $\frac{1}{2}A$ ſit quarta pars perimetri ellipſis, eique abſciſſa $x = a$ conueniat, erit $\frac{1}{2}A = \Pi a\,[a]$, ſemiperimetro autem A conuenit abſciſſa $2a$, vnde $A = \Pi.\,2a\,[a]$, ergo $\Pi\,2a\,[a] = 2\,\Pi a\,[a]$.

Coroll. 2.

22. Si capiatur abſciſſa $= 2a - x$, erit arcus ei reſpondens $= A - \Pi x\,[a]$, vnde colligitur haec aequalitas:

$$\Pi x[a] + \Pi(2a - x)[a] = 2\,\Pi a[a]$$

vbi vincula ( ) quibus abſciſſa inſcribitur, ab vncinulis [ ] ſemiaxem transuerſum continentibus, probe diſtingui oportet.

Coroll. 3.

23. Eadem aequalitas ex integrali poteſt colligi: poſito enim $2a - x$ loco x, erit:

$$\Pi(2a-x)[a] = -\int dx\sqrt{\left(\frac{a}{2ax - xx} + \frac{a - 1}{a}\right)} = -\Pi x[a] + \text{Conſt.}$$

Conſtans vero ex quodam caſu debet colligi. Scilicet ſi ponatur $x = 0$, fit Conſt. $= \Pi\, 2a\,[a]$, vel ſi ponatur $x = a$, prodit Conſt. $= \Pi a[a] + \Pi a[a] = 2\,\Pi a[a]$.

Scholion.

24. Arcus elliptici praeterea hanc habent proprietatem, vt, ſi axis transuerſus $2a$ minor fuerit parametro, quod ſcilicet euenit, ſi axis minor pro transverſo capiatur, iidem arcus ſumi poſſint in alia ellipſi, cuius axis ſit maior parametro. Nititur haec reductio ſimilitudine ellipſium, quarum ſemiaxes ſunt a et $\frac{1}{a}$, manente parametro eadem $= 2$.

Problema 2.

25. Arcum ellipticum $\Pi x[a]$, ſi fuerit $a < 1$, ad aliam ellipſin reducere, cuius ſemiaxis ſit vnitate maior.

Solutio.

Cum ſit $\Pi x[a] = \int dx \sqrt{\left(\frac{a}{2ax - xx} + 1 - \frac{1}{a}\right)}$, ſtatuatur $\sqrt{(2ax - xx)} = a - aay$, eritque $2ax - xx = aa(1 - 2ay + aayy)$; hincque $a - x = a\sqrt{(2ay - aayy)}$; vnde fit $dx = \frac{-aady(1 - ay)}{\sqrt{(2ay - aayy)}}$.

Facta hac ſubſtitutione conſequemur:

$$\Pi x[a] = \int \frac{-aady(1 - ay)}{\sqrt{(2ay - aayy)}} \sqrt{\left(\frac{1}{a(1 - ay)^2} + 1 - \frac{1}{a}\right)}, \text{ ſeu}$$

$$\Pi x[a] = -a\sqrt{a}.\int dy \sqrt{\frac{1 + (a - 1)(1 - ay)^2}{2ay - aayy}},$$

quae expreſſio reducitur ad hanc formam:

$$\Pi x[a] = -a\sqrt{a}.\int dy \sqrt{\left(\frac{1}{2y - ayy} + 1 - a\right)}.$$

Ponamus

Ponamus in formula integrali $a=\frac{1}{b}$, vt ſit $b=\frac{1}{a}$, ac fiet ea

$$\int dy\,\sqrt{\left(\frac{b}{2by-yy}+1-\frac{1}{b}\right)}=\Pi y[b]+\text{Conſt.}$$

Quare reſtituta littera a obtinebitur, ob $y=\frac{a-\sqrt{(2ax-xx)}}{aa}$,

$$\Pi x[a]=\text{Conſt.}-a\sqrt{a}.\Pi\frac{a-\sqrt{(2ax-xx)}}{aa}\left[\frac{1}{a}\right]$$

vbi ex caſu $x=0$ definitur conſtans $=a\sqrt{a}.\Pi\frac{1}{a}\left[\frac{1}{a}\right]$ ita vt ſit:

$$\Pi x[a]=a\sqrt{a}.\Pi\frac{1}{a}\left[\frac{1}{a}\right]-a\sqrt{a}.\Pi\frac{a-\sqrt{(2ax-xx)}}{aa}\left[\frac{1}{a}\right]$$

ſicque arcus ellipſis, cuius ſemiaxis eſt a, reductus eſt ad arcus alius ellipſis, cuius ſemiaxis eſt $=\frac{1}{a}$.

Coroll. 1.

26. Si ponatur $x=a$, fit $\frac{a-\sqrt{(2ax-xx)}}{aa}=0$, ideoque $\Pi a[a]=a\sqrt{a}\,\Pi\frac{1}{a}\left[\frac{1}{a}\right]$. Scilicet perimeter prioris ellipſis, cuius ſemiaxis $=a$, eſt ad perimetrum poſterioris, cuius ſemiaxis $=\frac{1}{a}$, vti $a\sqrt{a}$ ad 1, ſeu vt $a^{\frac{3}{4}}$ ad $\frac{1}{a^{\frac{3}{4}}}$.

Coroll. 2.

27. Cum arcus abſciſſae $\frac{a-\sqrt{(2ax-xx)}}{aa}$ reſpondens, poſito $x=0$, fiat $=\Pi\frac{1}{a}$, hinc aucto x decreſcat donec euaneſcat, poſito $x=a$, lex coutinuitatis exigit, vt ſumto $x>a$ iſte arcus negatiuum obtineat valorem.

Coroll. 3.

28. Facto ergo $x=2a$, erit $\Pi\frac{a-\sqrt{(2ax-xx)}}{aa}\left[\frac{1}{a}\right]$ $=-\Pi\frac{1}{a}\left[\frac{1}{a}\right]$, quo notato fiet hoc caſu $x=2a\;\Pi 2a[a]$

$= 2\Pi a[a] = 2a\sqrt{a}\,\Pi\frac{1}{a}[\frac{1}{a}]$, id quod conſentit cum Coroll. 1.

Scholion.

29. Subſtitutione hic adhibita $\sqrt{(2ax - xx)} = a - aay$, formulam integralem in aliam ſui ſimilem transmutauimus, cuius valor per arcum alius ellipſis exhiberi poterat. Si autem aliis ſubſtitutionibus vtamur, ſemper adipiſcimur formulas integrales, quarum integratio per rectificationem ſectionum conicarum expediri poteſt; quia vero a tam negatiuum, quam poſitiuum, valorem recipere poteſt, ſubſtitutiones eaedem tam ad ellipſes, quam hyperbolas, extendi poſſunt.

Problema 3.

30. Formulam integralem $\int dx \sqrt{(\frac{a}{2ax - xx} + 1 - \frac{1}{a})}$ per ſubſtitutiones idoneas in alias formulas concinniores transformare, quarum valor ſemper futurus ſit $= \Pi x[a]$.

Solutio.

Prima reductio fit ponendo $x = a - naz$, quo facto formula integralis induit hanc formam:

$$\int -ndz\sqrt{\frac{aa - nna(a-1)zz}{1 - nnzz}} = \Pi a(1 - nz)[a],$$

multiplicetur ea per m, vt ſit:

$$\int -dz\sqrt{\frac{m^2n^2aa + m^2n^4a(a-1)zz}{1 - nnzz}} = m\Pi a(1-nz)[a]$$

quam expreſſionem iam ad hanc formam, concinnam aeque ac generalem, reducere licet:

$$\int dz\sqrt{\frac{f + gzz}{h + kzz}}$$

fieri

ſieri ſcilicet oportet:

$$m^2 n^2 a^2 b = f;\ m^2 n^4 a(1-a) b = g;\ -nnb = k$$

vnde ob $nnb = -k$, et $n = \sqrt{\frac{-k}{b}}$,

erit $-mmaak = f;\ mma(1-a)kk = gb$,

hincque $\frac{(a-1)k}{a} = \frac{gb}{f}$, et $a = \frac{fk}{fk-gb}$.

Porro eſt $m = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{-f}{k}}$, ſeu $m = \frac{fk-gb}{fk}\sqrt{\frac{-f}{k}}$,

ex quibus valoribus concluditur fore:

$$\int dz \sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}} = C - \frac{(fk-gb)}{fk}\sqrt{\frac{-f}{k}}.\,\Pi \frac{fk}{fk-gb}\left(1-z\sqrt{\frac{-k}{b}}\right)\left[\frac{fk}{fk-gb}\right]$$

Hoc ergo integrale, niſi forma ſit imaginaria, per rectificationem ellipſis abſoluitur, ſi fuerit $\frac{fk}{fk-gb}$ quantitas poſitiua, ſin autem ſit negatiua, integratio arcum hyperbolicum indicat.

Coroll. 1.

31. Vt ergo haec forma ab imaginariis ſit libera, neceſſe eſt, vt tam $\frac{-f}{k}$ quam $\frac{-k}{b}$ ſit quantitas poſitiua. Si alterutra vel ambae fuerint negatiuae, expreſſio imaginariis implicatur; nihilo vero minus eius valor erit realis, ſi modo differentiale ipſum ſit reale.

Coroll. 2.

32. Cum autem formula differentialis ponatur realis, aſſumere licet tam $f+gzz$, quam $b+kzz$, eſſe quantitates poſitiuas; ſi enim ambae eſſent negatiuae, mutatis ſignis ad poſitiuas reduci poſſent. Ita ſtatuamus eſſe $f+gzz > 0$, et $b+kzz > 0$.

Coroll. 3.

33. Vt autem formula noſtra inuenta arcum realem ſectionis conicae exprimat, non ſufficit, eſſe $\frac{-f}{k}$ et $\frac{-k}{b}$ quantitates reales, ſed praeterea requiritur, vt abſciſſa ſit poſitiua; vbi duos caſus perpendi conuenit, prout ſectio conica fuerit ellipſis, vel hyperbola.

Coroll. 4.

34. Sit ergo primo ſectio conica ellipſis, ſeu $\frac{fk}{fk-gb}$ quantitas poſitiua, atque neceſſe eſt, vt ſit $1 - z\sqrt{\frac{-k}{b}} > 0$, ſeu $1 > \frac{-kzz}{b}$, vnde ſit $\frac{b+kzz}{b} > 0$. At per hypotheſin eſt $b+kzz > 0$. Quare caſu, quo $\frac{fk}{fk-gb} > 0$, ad realitatem inſuper requiritur, vt b ſit quantitas poſitiua.

Coroll. 5.

35. Pro hyperbola, ſeu ſi $\frac{fk}{fk+gb}$ fuerit quantitas negatiua, integratio noſtra ita debet repraeſentari:

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}} = C + \frac{(gb-fk)}{fk}\sqrt{\frac{-f}{k}}.\Pi\frac{fk}{gb-fk}\left(z\sqrt{\frac{-k}{b}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gb-fk}\right]$$

ita vt $\frac{fk}{gb-fk}$ iam ſit quantitas poſitiua. Neceſſe autem eſt, vt ſit $z\sqrt{\frac{-k}{b}} > 1$, ſeu $\frac{b+kzz}{b} < 0$, quare ob $b+kzz > 0$, arcus hyperbolicus non erit realis, niſi ſit b quantitas negatiua.

Coroll. 6.

36. Pro ellipſi ergo, ſeu ſi ſit $\frac{fk}{fk-gb} > 0$, noſtra expreſſio arcum continebit realem, ſi fuerit $1^{mo}.\ b > 0$; $2^{do}.\ k < 0$; ac $3^{tio}.\ f > 0$. Pro hyperbola autem, ſeu ſi $\frac{fk}{gb-fk} > 0$, arcus erit realis, ſi fuerit: $1^{mo}.\ b < 0$; $2^{do}.\ k > 0$; et $3^{tio}\ f < 0$.

Scho-

Scholion. 1.

37. Ope formulae igitur inuentae nonniſi aliquot caſus integralis propoſiti $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$ expedire poſſumus. Nempe cum in genere litterae f, g, h, et k quantitates, ſiue poſitiuas, ſiue negatiuas, ſignificent, ſi iam ad caſus deſcendentes eas tantum pro poſitiuis aſſumamus, ſequentes integrationes reales conſequemur:

$$\text{I. } \int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h-kzz}} = C - \frac{(fk+gh)}{fk}\sqrt{\frac{f}{k}}.\Pi\frac{fk}{fk+gh}\left(1 - z\sqrt{\frac{k}{h}}\right)\left[\frac{fk}{fk+gh}\right]$$

$$\text{II. } \int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{h-kzz}} = C - \frac{(fk-gh)}{fk}\sqrt{\frac{f}{k}}.\Pi\frac{fk}{fk-gh}\left(1 - z\sqrt{\frac{k}{h}}\right)\left[\frac{fk}{fk-gh}\right]$$

at hoc caſu requiritur, vt ſit $fk > gh$.

$$\text{III. } \int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{-h+kzz}} = C + \frac{(gh-fk)}{fk}\sqrt{\frac{f}{k}}.\Pi\frac{fk}{gh-fk}\left(z\sqrt{\frac{k}{h}} - 1\right)\left[\frac{-fk}{gh-fk}\right]$$

hoc vero caſu requiritur, vt ſit $gh > fk$.

Cum igitur in hoc tertio caſu indoles litterarum f, h, k iam ſit definita, pro g autem quantitatem negatiuam aſſumere non liceat, hos tantum tres caſus per noſtrum problema expedire licet. Reliqui vero omnes excluduntur, dum ad arcus imaginarios perducuntur. Interim tamen cum certo habeant valores reales, quemadmodum hi per alios arcus reales exprimi queant, in ſequentibus inueſtigabimus.

Scholion 2.

38. Antequam autem hoc opus ſuſcipiamus, e re erit, omnes caſus pro diuerſitate ſignorum, quibus litterae

rae f, g, h, k affectae eſſe poſſunt, enumerare, vbi etiam fieri poteſt, vt quidem ob aliam conditionem in binos ſubdiuidi debeant, quemadmodum ſupra in ſecundo et tertio vſu venit. Hac conditione adiecta ſequentes 12 habebimus caſus, vbi quidem litterae f, g, h, k tantum poſitiuos valores habere accipiuntur.

I. $\int dz \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$, ſi fuerit $fk > gh$.

II. $\int dz \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$, ſi fuerit $gh > fk$.

III. $\int dz \sqrt{\frac{f+gzz}{h-kzz}}$, nulla limitatione adiuncta.

IV. $\int dz \sqrt{\frac{f+gzz}{kzz-h}}$, nulla limitatione adiuncta.

V. $\int dz \sqrt{\frac{f-gzz}{h+kzz}}$, nulla limitatione adiunctat.

VI. $\int dz \sqrt{\frac{f-gzz}{h-kzz}}$, ſi fuerit $fk > gh$.

VII. $\int dz \sqrt{\frac{f-gzz}{h-kzz}}$, ſi fuerit $fk < gh$.

VIII. $\int dz \sqrt{\frac{f-gzz}{-h+kzz}}$, hic neceſſario eſt $fk > gh$.

IX. $\int dz \sqrt{\frac{-f+gzz}{h+kzz}}$, nulla limitatione adiuncta.

X. $\int dz \sqrt{\frac{-f+gzz}{h-kzz}}$, hic neceſſario eſt $fk < gh$.

XI. $\int dz \sqrt{\frac{-f+gzz}{-h+kzz}}$, ſi fuerit $fk > gh$.

XII. $\int dz \sqrt{\frac{-f+gzz}{-h+kzz}}$, ſi fuerit $fk < gh$.

atque ex his duodecim caſibus hactenus tantum tres ſcilicet III. VI ac XII. conficere licuit, quorum integralia per arcus ſimplices ſectionum conicarum exprimuntur.

Scholion 3.

89. Quanquam autem his tribus caſibus integralia per arcus, ſiue ellipticos, ſiue hyperbolicos, expreſſimus,

mus, tamen quaedam dantur relationes inter litteras f, g, h, et k quibus noſtra expreſſio tantis incommodis implicatur, vt verus valor integralis inde erui nequeat, etiamſi per ſe ſit perquam facilis. Ac primo quidem in genere, ſi in formula $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$ fuerit $fk=gh$, valor integralis ita quantitatibus euaneſcentibus et infinitis inuoluitur, vt eius vera quantitas inde perſpici nequeat, cum tamen ea per ſe ſit planiſſima; poſito enim $k=\frac{gh}{f}$, erit $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}=\int dz\sqrt{\frac{f(f+gzz)}{h(f+gzz)}}$ $=\int dz\sqrt{\frac{f}{h}}=C+z\sqrt{\frac{f}{h}}$, ita vt reuera ſit ob $gh=fk$

$$C-\frac{(fk-fk)}{fk}\sqrt{\frac{-f}{k}}.\Pi\frac{fk}{fk-fk}(1-z\sqrt{\frac{-k}{h}})[\frac{fk}{fk-fk}]=z\sqrt{\frac{f}{h}}$$

etſi ratio huius aequalitatis difficulter perſpiciatur, cum haec formula potius arcum parabolicum abſciſſae infinitae reſpondentem, qui autem per factorem euaneſcentem ſit multiplicatus, indicare videatur. Interim tamen ſi perpendamus in parabola arcum, qui abſciſſae infinitae reſpondeat, ad abſciſſam rationem aequalitatis habere, erit

$$\Pi\frac{fk}{fk-fk}(1-z\sqrt{\frac{-k}{h}})[\frac{fk}{fk-fk}]=\frac{fk}{fk-fk}(1-z\sqrt{\frac{-k}{h}})$$

qui arcus per factorem $\frac{-(fk-fk)}{fk}\sqrt{\frac{-f}{k}}$ multiplicatus praebet productum finitum $=-(1-z\sqrt{\frac{-k}{h}})\sqrt{\frac{-f}{k}}=-\sqrt{\frac{-f}{k}}$ $+z\sqrt{\frac{f}{h}}$, qui valor cum veritate egregie congruit. Reliquas difficultates caſus particulares percurrentes ſeorſim examinemus.

Integratio Caſus III.

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h-kzz}}=C-\frac{(fk+gh)}{fk}\sqrt{\frac{f}{k}}.\Pi\frac{fk}{fk+gh}(1-z\sqrt{\frac{k}{h}})[\frac{fk}{fk+gh}]$$

40. Si f, g, h, k denotent quantitates nihilo maiores, arcus ellipticus pro integrali facile aſſignatur; neque turbat caſus, quo $g = 0$; quippe qui per arcum circularem expeditur; eritque

$$\int \frac{dz\sqrt{f}}{\sqrt{(h - kzz)}} = C - \sqrt{\tfrac{f}{k}}.\,\Pi\,(1 - z\sqrt{\tfrac{k}{h}})\,[1].$$

Deinde h euaneſcere nequit, quin ſimul formula differentialis ipſa fiat imaginaria. At ſi f vel k euaneſcat, quorum priori caſu integrale eſt algebraicum, poſteriori vero per logarithmos dari poteſt, noſtra formula refertur ad ellipſin euaneſcentem, nihilque inde concludere licet; mox autem pro eodem caſu aliam integralis formam exhibebimus, vnde vera integralis quantitas facilius elici poterit.

Integratio Caſus VI.

$$\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{h-kzz}} = C - \frac{(fk-gh)}{fk}\sqrt{\tfrac{f}{k}}.\,\Pi_{\frac{fk}{fk-gh}}(1 - z\sqrt{\tfrac{k}{h}})\left[\frac{fk}{fk-gh}\right]$$

ſi fuerit $fk > gh$.

41. Hic iterum nulla difficultas occurrit, quicunque valores litteris f, g, h, et k tribuantur, dummodo ſit $fk > gh$; ſemper enim integrale per arcum ellipticum exprimitur, neque etiam negotium faceſſit caſus $g = 0$, quo, vt ante, arcus circularis denotatur. At ſi ſit $k = 0$, neque enim f et h in nihilum abire poſſunt, conditio $fk > gh$ non amplius ſaluari poteſt, ſicque hic nullum incommodum locum habet, praeter id, quo eſt $fk = gh$, quod autem iam ante in genere expediuimus.

Integratio Caſus XII.

$$\int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{-b+kzz}}=C+\frac{(gb-fk)}{fk}\sqrt{\frac{f}{k}}.\Pi\frac{fk}{gb-fk}\left(z\sqrt{\frac{k}{b}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gb-fk}\right],$$

ſi fuerit $gb>fk$.

42. Hoc caſu integrale arcu hyperbolico definitur, vbi neque g, neque k, poteſt fieri negatiuum. S fuerit $f=0$, quo caſu integrale fit algebraicum, axis hyperbolae euaneſcit, neque hinc valor integralis cognoſcitur. At ſi $b=0$, conditio neceſſaria $gb>fk$ euertitur, difficultas ergo tantum caſu $f=0$ ſubſiſtit, quae autem in aliis formulis infra pro eodem hoc caſu tradendis tolletur.

Problema 4.

43. Formulam integralem $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}$ per ſubſtitutionem in aliam ſui ſimilem transformare.

Solutio.

Tentanti huiusmodi ſubſtitutionem $z=\sqrt{\frac{\alpha+\beta xx}{\gamma+\delta xx}}$ patebit, ſumi debere $x=\sqrt{(b+kzz)}$; vnde fit $z=\sqrt{\frac{xx-b}{k}}$, $dz=\frac{xdx}{\sqrt{k(xx-b)}}$ et $f+gzz=\frac{fk-gb+gxx}{k}$, ideoque

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}=\frac{1}{k}\int dx\sqrt{\frac{fk-gb+gxx}{xx-b}},$$

quae locum habet, quoties k eſt quantitas poſitiua, quoniam tum $xx-b=kzz$ eſt quantitas poſitiua. Sin autem k fuerit quantitas negatiua, ideoque $b-xx$ poſitiua, transformatio ita eſt repraeſentanda:

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}=\frac{1}{k}\int dx\sqrt{\frac{gb-fk+gxx}{b-xx}}.$$

Coroll. 1.

44. Comparantes formulam $\int dx\sqrt{\frac{fk-gb+gxx}{xx-b}}$ cum formula initio generatim integrata $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}$, habebimus $z=x$; $f=fk-gb$; $g=g$; $b=-b$; $k=1$, vnde $fk-gb=fk$ et integrale:

$$\int dx\sqrt{\frac{fk-gb+gxx}{xx-b}}=C-\frac{fk}{fk-gb}\sqrt{(-fk+gb)}\,\Pi\frac{fk-gb}{fk}$$
$$(1-x\sqrt{\tfrac{1}{b}})\left[\frac{fk-gb}{fk}\right].$$

Coroll. 2.

45. Subſtituto hoc valore cum ſit $x=\sqrt{(b+kzz)}$, erit:

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}=C+\frac{f}{\sqrt{(gb-fk)}}\Pi\frac{gb-fk}{fk}\left(\frac{\sqrt{(b+kzz)}}{\sqrt{b}}-1\right)\left[\frac{-gb+fk}{fk}\right]$$

qui arcus, vt ſit realis, neceſſe eſt, vt primo ſit $gb-fk>0$, tum vero etiam $b>0$. Erit ergo ad hyperbolam, ſi fk ſit quantitas poſitiua et k poſitiua: ad ellipſin eſſe nequit, niſi ſit k quantitas negatiua, f vero poſitiua, quia hoc caſu eſſe debet fk quantitas negatiua.

Coroll. 3.

46. Simili modo altera forma $\int dx\sqrt{\frac{gb-fk-gxx}{b-xx}}$, cum canonica $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}$ comparata, dat $z=x$; $f=gb-fk$; $g=-g$; $b=b$; et $k=-1$; vnde $fk-gb=fk$ et

$$\int dx\sqrt{\frac{gb-fk-gxx}{b-xx}}=C-\frac{fk}{fk-gb}\sqrt{(gb-fk)}.\,\Pi\frac{fk-gb}{fk}(1-x\sqrt{\tfrac{1}{b}})\left[\frac{fk-gb}{fk}\right].$$

Coroll. 4.

47. Subſtituto ergo pro x valore $\sqrt{(b+kzz)}$, erit vt ante:

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}=C+\frac{f}{\sqrt{(gb-fk)}}.\,\Pi\frac{gb-fk}{-fk}\left(1-\frac{\sqrt{(b+kzz)}}{\sqrt{b}}\right)\left[\frac{gb-fk}{-fk}\right]$$

quae

quae locum habere nequit, niſi $gb-fk$ et b ſit quantitas poſitiua. Pro ellipſi erit, ſi k ſit quantitas negatiua et f poſitiua, contra autem pro hyperbola, ſi k et g ſint poſitiuae, quemadmodum iam ante definiuimus, ita vt hos duos caſus diſtinguere non opus fuerit.

Coroll. 5.

48. Geminis his integralibus formulae generalis: $\int dz \sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}$ inter ſe collatis, habebimus:

$$\Pi \frac{fk}{fk-gb}\left(1-z\sqrt{\frac{-k}{b}}\right)\left[\frac{fk}{fk-gb}\right] = \frac{fk\sqrt{fk}}{(fk-gb)^{\frac{3}{2}}} \Pi \frac{fk-gb}{fk}\left(1-\frac{\sqrt{(b+kzz)}}{\sqrt{b}}\right)\left[\frac{fk-gb}{fk}\right]$$

quae aequalitas, poſito ad abbreuiandum $\frac{fk}{fk-gb}=\frac{m}{n}$ et $z\sqrt{\frac{-k}{b}}=t$, abit in hanc formam:

$$\Pi \frac{m}{n}(1-t)\left[\frac{m}{n}\right] = \frac{-m\sqrt{m}}{n\sqrt{n}} \Pi \frac{n}{m}\left(1-\sqrt{(1-tt)}\right)\left[\frac{n}{m}\right].$$

Coroll. 6.

49. Arcus igitur ellipticus quicunque reſpondens abſciſſae $=1-t$, ſemiaxe exiſtente $=\frac{m}{n}$, reducitur ad arcum alius ellipſis, cuius ſemiaxis eſt $=\frac{n}{m}$ et abſciſſa $=1-\sqrt{(c-tt)}$, hunc arcum per $\frac{m\sqrt{m}}{n\sqrt{n}}$ multiplicando, cuius aequalitatis ratio eſt ſimilitudo harum duarum ellipſium. Simili autem modo arcus hyperbolicus ad alium reduci nequit, quia ob $\frac{m}{n}$ negatiuum fit $\sqrt{\frac{m}{n}}$ imaginarium.

 Scholion.

Scholion.

50. Hinc nouas integrationes nanciſcimur realiter expreſſas: primam ſuggerit §. 45. arcum hyperbolicum inuoluentem, vbi hae conditiones requiruntur: $1^{mo}\, h > 0$; $2^{do}\, k > 0$; $3^{tio}\, f > 0$ et $4^{to}\, gh > fk$, vnde ob $h > 0$, erit quoque $g > 0$; hisque Caſus II. §. 38. enumeratorum continetur. Deinde arcus ellipticus negotium conficiet his conditionibus: $1^{mo}\, k < 0$; $2^{do}\, h > 0$; $3^{tio}\, gh - fk > 0$; et $4^{to}\, f > 0$ ob $-fk > 0$, vnde g etiamnunc poſitiue et negatiue capi poteſt. Si ſumatur poſitiue, prodit Caſus III, ſin negatiue Caſus VI, qui quidem iam ſupra ſunt ſoluti. Verum in genere notandum, omnes arcus ellipticos duplici modo exprimi poſſe per §. praeced. Integralia ergo horum trium caſuum ita ſe habebunt:

Integratio Caſus II.

$$\int dz \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = C + \frac{f}{\sqrt{(gh-fk)}}\, \Pi\, \frac{gh-fk}{fk} \left(\frac{\sqrt{(h+kzz)}}{\sqrt{h}} - 1\right)\left[\frac{-gh+fk}{fk}\right]$$

ſi fuerit $gh > fk$

51. Ob conditionem $gh > fk$, neque g, neque h, euaneſcere poteſt. Si f euaneſcat, hyperbola abit in parabolam, cuius arcus abſciſſae infinitae reſpondens hic indicatur, qui ergo abſciſſae aequalis eſt cenſendus; vnde pro caſu $f = 0$, habebitur iſtud integrale:

$$\int dz \sqrt{\frac{gzz}{h+kzz}} = C + \frac{\sqrt{gh}}{k}\left(\frac{\sqrt{(h+kzz)}}{\sqrt{h}} - 1\right) = C + \frac{\sqrt{g(h+kzz)}}{k}$$

quod veritati omnino eſt conſentaneum.

52. Alter caſus moram faceſſens eſt, quo $k = 0$; et hyperbola iterum abit in parabolam. At ob $k = 0$

erit

erit $\surd(1+\frac{kzz}{b})-1=\frac{kzz}{2b}$; vnde integratio per arcum parabolicum abſoluetur hoc modo:

$$\int dz\surd\frac{f+gzz}{b}=C+\frac{f}{\surd gb}\,\Pi\,\frac{gzz}{2f}[\infty]$$

quae eadem operatione conſueta elicitur. Si inſuper eſſet $g=0$, ob $\Pi\frac{gzz}{2f}=z\surd\frac{g}{f}$ (13) foret $\int dz\surd\frac{f}{b}=C+z\surd\frac{f}{b}$.

Integratio Caſus III.

$$\int dz\surd\frac{f+gzz}{b-kzz}=C+\frac{f}{\surd(gb+fk)}\,\Pi\,\frac{gb+fk}{fk}\left(1-\frac{\surd(b-kzz)}{\surd b}\right)\left[\frac{gb+fk}{fk}\right]$$

ſine vlla limitatione.

53. Hinc caſus $b=0$ ſponte excluditur; vnde tres ſingulares relinquuntur. Si primo ſit $k=0$, ellipſis abit in parabolam, et ob $1-\surd(1-\frac{kzz}{b})=\frac{kzz}{2b}$ habetur vt ante:

$$\int dz\surd\frac{f+gzz}{b}=C+\frac{f}{\surd gb}\,\Pi\,\frac{gzz}{2f}[\infty]$$

ſi deinde ſit $f=0$, denuo parabola, et arcus abſciſſae infinitae reſpondens ideoque aequalis cenſendus prodit, vnde fit:

$$\int dz\surd\frac{gzz}{b-kzz}=C+\frac{\surd gb}{k}\left(1-\frac{\surd(b-kzz)}{\surd b}\right)=C-\frac{\surd g(b-kzz)}{k}$$

ſi tertio ſit $g=0$, ellipſis abit in circulum, fitque:

$$\int dz\surd\frac{f}{b-kzz}=C+\frac{f}{\surd fk}\,\Pi\left(1-\frac{\surd(b-kzz)}{\surd b}\right)[1]$$

ſicque caſus difficiliores ſupra §. 40 memoratos hic expediuimus.

Integratio Caſus VI.

$$\int dz\surd\frac{f-gzz}{b-kzz}=C+\frac{f}{\surd(fk-gb)}\,\Pi.\frac{fk-gb}{fk}\left(1-\frac{\surd(b-kzz)}{\surd b}\right)\left[\frac{fk-gb}{fk}\right]$$

ſi modo fuerit $fk>gb$.

54.

54. Hoc caſu aeque ac ſupra §. 41, vbi idem eſt pertractatus, nulla difficultas relinquitur, quia ob $fk > gh$, neque f, neque k, euaneſcere poteſt, neque vero etiam h in nihilum abire poteſt, quin denominator $h-kzz$ fiat negatiuus. At ſi $g=0$, nulla occurrit difficultas, cum integratio ad arcum circularem reuocetur.

Scholion.

55. Hac ergo reductione id ſumus lucrati, vt iam praeter caſus III, VI et XII, ante euolutos, etiam caſum II. expediuerimus. Reliqui vero octo caſus nullo modo per arcus ſimplices reales integrari poſſunt, ſed praeterea partem algebraicam continent; quin etiam nonnulli praeter hanc partem algebraicam binos arcus, alterum ellipticum, alterum hyperbolicum, complectuntur. Ad haec autem integralia inueſtiganda neceſſe eſt, vt alias formulas integrales affines, praeter variabilem z bina radicalia $\sqrt{(f+gzz)}$ et $\sqrt{(h+kzz)}$ inuoluentes, contemplemur, quae ad formam $\int dx \sqrt{\frac{\alpha+\beta xx}{\gamma+\delta xx}}$ ſint reductibiles.

Problema 5.

56. Alias formulas integrales, praeter z, bina radicalia $\sqrt{(f+gzz)}$ et $\sqrt{(h+kzz)}$ continentes, invenire, quarum integratio ad formam $\int dx \sqrt{\frac{\alpha+\beta xx}{\gamma+\delta xx}}$ reduci queat.

Solutio.

Fit hoc ſubſtitutionibus, quarum praecipuas hic percurramus:

1. Sit

1. Sit $x = \frac{1}{z}$, erit $z = \frac{1}{x}$; $\sqrt{(f+gzz)} = \frac{\sqrt{(fxx+g)}}{x}$ et $\sqrt{(h+kzz)} = \frac{\sqrt{(hxx+k)}}{x}$. Hinc ob $dx = -\frac{dz}{zz}$, erit:

$$dx\sqrt{\frac{fxx+g}{hxx+k}} = -\frac{dz}{zz}\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}, \text{ ideoque}$$

$$\int\frac{dz}{zz}\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = -\int dx\sqrt{\frac{fxx+g}{hxx+k}}.$$

2. Ponatur $x = \sqrt{(f+gzz)}$ erit $dx = \frac{gzdz}{\sqrt{(f+gzz)}}$; $z = \sqrt{\frac{xx-f}{g}}$ et $\sqrt{(h+kzz)} = \sqrt{\frac{gh-fk+kxx}{g}}$, vnde conficitur:

$$dx\sqrt{\frac{xx-f}{gh-fk+kxx}} = \frac{gzzdz}{\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}} \text{ et}$$

$$dx\sqrt{\frac{gh-fk+kxx}{xx-f}} = gdz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} \text{ omittenda},$$

quare erit:

$$\int\frac{zzdz}{\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}} = \frac{1}{g}\int dx\sqrt{\frac{xx-f}{gh-fk+kxx}}.$$

3. Si ponatur $x = \sqrt{(h+kzz)}$, erit ſimili modo:

$$\int\frac{zzdz}{\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}} = \frac{1}{k}\int dx\sqrt{\frac{xx-h}{fk-gh+gxx}}.$$

4. Sit $x = \frac{1}{\sqrt{(f+gzz)}}$ erit $dx = \frac{-gzdz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}}$; $z = \frac{\sqrt{(1-fxx)}}{x\sqrt{g}}$;

$\sqrt{(f+gzz)} = \frac{1}{x}$; et $\sqrt{(h+kzz)} = \sqrt{\frac{k+(gh-fk)xx}{gxx}}$

vnde fit:

$$dx\sqrt{\frac{1-fxx}{k+(gh-fk)xx}} = \frac{-gzzdz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(h+kzz)}} \text{ et}$$

$$dx\sqrt{\frac{k+(gh-fk)xx}{1-fxx}} = \frac{-gdz\sqrt{(h+kzz)}}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}}$$

hincque

$$\int\frac{zzdz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(h+kzz)}} = -\frac{1}{g}\int dx\sqrt{\frac{1-fxx}{k+(gh-fk)xx}} \text{ et}$$

$$\int\frac{dz\sqrt{(h+kzz)}}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{g}\int dx\sqrt{\frac{k+(gh-fk)xx}{1-fxx}}.$$

5. Simili modo ſi ponatur $x = \frac{1}{\surd(b+kzz)}$, reperitur:

$$\int \frac{zzdz}{(b+kzz)^{\frac{3}{2}}\surd(f+gzz)} = -\tfrac{1}{k}\int dx \surd \frac{1-bxx}{g+(fk-gb)xx}$$

$$\int \frac{dz\surd(f+gzz)}{(b+kzz)^{\frac{3}{2}}} = -\tfrac{1}{k}\int dx \surd \frac{g+(fk-gb)xx}{1-bxx}$$

6. Ponatur $x = \frac{z}{\surd(f+gzz)}$, erit $dx = \frac{fdz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}}$ tum $z = \frac{x\surd f}{\surd(1-gxx)}$; $\surd(f+gzz) = \frac{\surd f}{\surd(1-gxx)}$ et $\surd(b+kzz) = \surd \frac{b+(fk-gb)xx}{1-gxx}$, vnde conficitur:

$$dx \surd \frac{1-gxx}{b+(fk-gb)xx} = \frac{fdz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\surd(b+kzz)}$$

$$dx \surd \frac{b+(fk-gb)xx}{1-gxx} = \frac{fdz\surd(b+kzz)}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}}.$$ Quare

$$\int \frac{dz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\surd(b+kzz)} = \tfrac{1}{f}\int dx \surd \frac{1-gxx}{b+(fk-gb)xx}$$

$$\int \frac{dz\surd(b+kzz)}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}} = \tfrac{1}{f}\int dx \surd \frac{b+(fk-gb)xx}{1-gxx}.$$

7. Simili modo ponendo $x = \frac{z}{\surd(b+kzz)}$, reperitur:

$$\int \frac{dz}{(b+kzz)^{\frac{3}{2}}\surd(f+gzz)} = \tfrac{1}{b}\int dx \surd \frac{1-kxx}{f+(gb-fk)xx}$$

$$\int \frac{dz\surd(f+gzz)}{(b+kzz)^{\frac{3}{2}}} = \tfrac{1}{b}\int dx \surd \frac{f+(gb-fk)xx}{1-kxx}.$$

8. Po-

8. Ponatur $x = \frac{\sqrt{(f+gzz)}}{z}$, erit $dx = \frac{-f\,dz}{zz\sqrt{(f+gzz)}}$, tum $z = \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{(xx-g)}}$; $\sqrt{(f+gzz)} = \frac{x\sqrt{f}}{\sqrt{(xx-g)}}$, atque $\sqrt{(h+kzz)} = \sqrt{\frac{hxx+fk-gh}{xx-g}}$, vnde fit:

$$dx\sqrt{\frac{hxx+fk-gh}{xx-g}} = \frac{-f\,dz\sqrt{(h+kzz)}}{zz\sqrt{(f+gzz)}} \text{ et}$$

$$dx\sqrt{\frac{xx-g}{hxx+fk-gh}} = \frac{-f\,dz}{zz\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}}$$

vnde deducitur:

$$\int\frac{dz}{zz}\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} = -\tfrac{1}{f}\int dx\sqrt{\frac{hxx+fk-gh}{xx-g}}$$

$$\int\frac{dz}{zz\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}} = -\tfrac{1}{f}\int dx\sqrt{\frac{xx-g}{hxx+fk-gh}}.$$

9. Simili modo ponendo $x = \frac{\sqrt{(h+kzz)}}{z}$, reperietur:

$$\int\frac{dz}{zz}\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = -\tfrac{1}{h}\int dx\sqrt{\frac{fxx-fk+gh}{xx-k}}$$

$$\int\frac{dz}{zz\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}} = -\tfrac{1}{h}\int dx\sqrt{\frac{xx-k}{fxx-fk+gh}}.$$

10. Ponatur $x = \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$, erit $dx = \frac{(gh-fk)z\,dz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(f+gzz)}}$

tum $z = \sqrt{\frac{hxx-f}{g-kxx}}$, vnde colligitur:

$$\int\frac{zz\,dz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(f+gzz)}} = \frac{1}{gh-fk}\int dz\sqrt{\frac{hxx-f}{g-kxx}}$$

$$\int\frac{dz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(f+gzz)}} = \frac{1}{gh-fk}\int dx\sqrt{\frac{g-kxx}{hxx-f}}.$$

11. Simili modo ponendo $x = \sqrt{\frac{b+kzz}{f+gzz}}$, reperitur:

$$\int \frac{zz\,dz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(b+kzz)}} = \frac{1}{fk-gb}\int dx\sqrt{\frac{fxx-b}{k-gxx}}.$$

$$\int \frac{dz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(b+kzz)}} = \frac{1}{fk-gb}\int dx\sqrt{\frac{k-gxx}{fxx-b}}.$$

Coroll. 1.

57. Formulas has in ordinem reducentes, quia quaelibet duplici modo ad formam canonicam reducitur, habebimus primo:

$$\int \frac{dz}{zz}\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}} = -\int dx\sqrt{\frac{fxx+g}{bxx+k}} = -\frac{g}{b}\int dy\sqrt{\frac{fyy-fk+gb}{yy-k}},$$

exiſtente $x = \frac{1}{z}$ et $y = \frac{\sqrt{(b+kzz)}}{z}$

$$\int \frac{dz}{zz}\sqrt{\frac{b+kzz}{f+gzz}} = -\int dx\sqrt{\frac{bxx+k}{fxx+g}} = -\frac{k}{f}\int dy\sqrt{\frac{byy+fk-gb}{yy-g}},$$

exiſtente $x = \frac{1}{z}$ et $y = \frac{\sqrt{(f+gzz)}}{z}$.

Coroll. 2.

58. Secunda forma haec eſto:

$$\int \frac{zz\,dz}{\sqrt{(f+gzz)(b+kzz)}} = \frac{1}{g}\int dx\sqrt{\frac{xx-f}{gb-fk+kxx}} = \frac{1}{k}\int dy\sqrt{\frac{yy-b}{fk-gb+gyy}}$$

exſtitente $x = \sqrt{(f+gzz)}$ et $y = \sqrt{(b+kzz)}$, quae permutatis formulis $\sqrt{(f+gzz)}$ et $\sqrt{(b+kzz)}$ non mutatur.

Coroll. 3.

Coroll. 3.

59. Tertia forma ita conſtituatur:

$$\int\frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{k}\int dx\sqrt{\frac{g+(fk-gh)xx}{1-hxx}}$$

$$=\frac{1}{h}\int dy\sqrt{\frac{f+(gh-fk)yy}{1-kyy}}$$

exiſtente $x=\frac{1}{\sqrt{(h+kzz)}}$ et $y=\frac{z}{\sqrt{(h+kzz)}}$

$$\int\frac{dz\sqrt{(h+kzz)}}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{g}\int dx\sqrt{\frac{k+(gh-fk)xx}{1-fxx}}$$

$$=\frac{1}{f}\int dy\sqrt{\frac{h+(fk-gh)yy}{1-gyy}}$$

exiſtente $x=\frac{1}{\sqrt{(f+gzz)}}$ et $y=\frac{z}{\sqrt{(f+gzz)}}$.

Coroll. 4.

60. Quarta forma haec ſtatuatur:

$$\int\frac{dz}{zz\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}}=-\frac{1}{f}\int dx\sqrt{\frac{xx-g}{hxx+fk-gh}}$$

$$=-\frac{1}{h}\int dy\sqrt{\frac{yy-k}{fyy-fk+gh}}$$

exiſtente $x=\frac{\sqrt{(f+gzz)}}{z}$ et $y=\frac{\sqrt{(h+kzz)}}{z}$.

Coroll. 5.

61. Quinta forma erit geminata:

$$\int \frac{dz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(b+kzz)}} = \frac{1}{f}\int dx \sqrt{\frac{1-gxx}{b+(fk-gb)xx}}$$

$$= \frac{1}{fk-gb}\int dy \sqrt{\frac{k-gyy}{fyy-b}}$$

existente $x = \frac{z}{\sqrt{(f+gzz)}}$ et $y = \sqrt{\frac{b+kzz}{f+gzz}}$

$$\int \frac{dz}{(b+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(f+gzz)}} = \frac{1}{b}\int dx \sqrt{\frac{1-kxx}{f+(gb-fk)xx}}$$

$$= \frac{1}{gb-fk}\int dy \sqrt{\frac{g-kyy}{byy-f}}$$

existente $x = \frac{z}{\sqrt{(b+kzz)}}$ et $y = \sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}$

Coroll. 6.

62. Sexta denique forma erit:

$$\int \frac{zzdz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(b+kzz)}} = -\frac{1}{g}\int dx \sqrt{\frac{1-fxx}{k+(gb-fk)xx}}$$

$$= \frac{1}{fk-gb}\int dy \sqrt{\frac{fyy-b}{k-gyy}}$$

existente $x = \frac{1}{\sqrt{(f+gzz)}}$ et $y = \sqrt{\frac{b+kzz}{f+gzz}}$

$$\int \frac{zzdz}{(b+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(f+gzz)}} = -\frac{1}{k}\int dx \sqrt{\frac{1-bxx}{g+(fk-gb)xx}}$$

$$= \frac{1}{gb-fk}\int dy \sqrt{\frac{byy-f}{g-kyy}}$$

existente $x = \frac{1}{\sqrt{(b+kzz)}}$ et $y = \sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}$.

Problema 6.

Problema 6.

63. Inuenire caſus, quibus expreſſio $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$ aequatur quantitati algebraicae $az\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$ vna cum arcu ſectionis conicae.

Solutio.

Ponatur $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}=az\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}+Z$ eritque differentiando:

$$dZ=\frac{dz((1-a)fh+(fk+(1-2a)gh)zz+(1-a)gkz^4)}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(f+gzz)}}$$

vbi numerator, neque per $f+gzz$, neque per $h+kzz$, reddi poteſt diuiſibilis, quin ſimul fiat $fk=gh$, reducetur autem Z ad formam poſteriorem §. 62. ponendo $a=1$,

eritque $Z=(fk-gh)\int\frac{zzdz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(f+gzz)}}$.

Hinc habebimus vel:

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}=z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}+\frac{gh-fk}{k}\int dx\sqrt{\frac{1-hxx}{g+(fk-gh)xx}}$$

exiſtente $x=\frac{1}{\sqrt{(h+kzz)}}$, vel etiam:

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}=z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}-\int dy\sqrt{\frac{hyy-f}{g-kyy}}$$

exiſtente $y=\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$.

Coroll. 1.

64. Quoties ergo, vel formula $\int dx\sqrt{\frac{1-hxx}{g+(fk-gh)xx}}$, vel haec: $\int dy\sqrt{\frac{hyy-f}{g-kyy}}$, ad quempiam caſuum iam tractatorum referri poteſt, toties quoque formula $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$ partim

partim quantitati algebraicae, partim arcui ſectionis conicae aequabitur.

Coroll. 2.

65. Cum ſit $x = \frac{1}{\sqrt{(b + kzz)}}$, erit $1 - bxx = kxxzz$; ergo niſi ſit k quantitas poſitiua, formula prior non ita, vt fecimus, repraeſentari poteſt. Scilicet ſi k ſit quantitas negatiua, ita ſcribi debet:

$$\int dx \sqrt{\frac{bxx - 1}{(gb - fk)xx - g}}.$$

Coroll. 3.

66. In altera formula $\int dy \sqrt{\frac{byy - f}{g - kyy}}$, vbi $y = \sqrt{\frac{f + gzz}{b + kzz}}$ qui eſt $byy - f = \frac{(gb - fk)zz}{b + kzz}$, ſumitur $gb > fk$. Quare ſi fuerit $gb < fk$, ea ita ſcribi debet: $\int dy \sqrt{\frac{f - byy}{-g + kyy}}$. Prior ſcriptio ergo locum habet, ſi $gb - fk > 0$; poſterior vero, ſi $fk - gb > 0$.

Exemplum 1.

67. Reducatur forma $\int dx \sqrt{\frac{1 - bxx}{g + (fk - gb)xx}}$ ad caſum III eſſeque oportet $k > 0$; $b < 0$; $g > 0$ et $fk - gb < 0$, vnde $f < 0$, habebiturque:

$$\int dz \sqrt{\frac{-f + gzz}{-b + kzz}} = z \sqrt{\frac{-f + gzz}{-b + kzz}} + \frac{fk - gb}{k} \int dx \sqrt{\frac{1 + bxx}{g - (fk - gb)xx}}$$

vbi eſſe debet $fk > gb$. Iam per §. 40 erit:

$$\int dx \sqrt{\frac{1 + bxx}{g - (fk - gb)xx}} = C - \frac{fk}{(fk - gb)^{\frac{1}{2}}} \Pi \frac{fk - gb}{k} \left(1 - x\sqrt{\frac{fk - gb}{g}}\right)\left[\frac{fk - gb}{fk}\right]$$

vel per §. 53.

$$\int dx \sqrt{\frac{1 + bxx}{g - (fk - gb)xx}} = C + \frac{1}{\sqrt{fk}} \Pi \frac{fk}{fk - gb} \left(1 - \frac{\sqrt{(g - (fk - gb)xx)}}{\sqrt{g}}\right)\left[\frac{fk}{fk - gb}\right]$$

vbi

vbi eſt $x = \frac{1}{\sqrt{(-h+kzz)}}$ et $\sqrt{(g-(fk-gh)xx)} = \frac{\sqrt{k(gzz-f)}}{\sqrt{(-h+kzz)}}$ ſicque conſtruitur caſus XI.

Integratio Caſus XI.

$$\int dz \sqrt{\frac{-f+gzz}{-h+kzz}} = C + z\sqrt{\frac{-f+gzz}{-h-kzz}} - \frac{f}{\sqrt{(fk-gh)}}\,\Pi\,\frac{fk-gh}{fk}\left(1 - \frac{\sqrt{(fk-gh)}}{\sqrt{g(-h+kzz)}}\right)\left[\frac{fk-gh}{fk}\right]$$

$$\int dz \sqrt{\frac{-f+gzz}{-h+kzz}} = C + z\sqrt{\frac{-f+gzz}{-h+kzz}} + \frac{fk-gh}{k\sqrt{fk}}\,\Pi\,\frac{fk}{fk-gh}\left(1 - \frac{\sqrt{k(-f+gzz)}}{\sqrt{g(-h-kzz)}}\right)\left[\frac{fk}{fk-gh}\right].$$

68. Hoc ergo integrale conſtat parte algebraica et arcu elliptico, et quia debet eſſe $k > gh$, fieri nequit $= 0$, ſin autem ſit $h = 0$, ellipſis abit in circulum, atque habebitur:

$$\int \frac{dz}{z}\sqrt{\frac{-f+gzz}{k}} = C + \sqrt{\frac{-f+gzz}{k}} - \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{k}}\,\Pi\left(1 - \frac{\sqrt{f}}{z\sqrt{g}}\right)[1] \text{ ſeu}$$

$$\int \frac{dz}{z}\sqrt{\frac{-f+gzz}{k}} = C + \sqrt{\frac{-f+gzz}{k}} + \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{k}}\,\Pi\left(1 - \frac{\sqrt{(-f+gzz)}}{z\sqrt{g}}\right)[1]$$

vti per integrationem facile inuenitur.

Exemplum 2.

69. Reducatur formula $\int dx \sqrt{\frac{1-hxx}{g+(fk-gh)xx}}$ ad caſum VI, eritque $h > 0$, $g > 0$, $gh-fk > 0$ et $k > 0$, cum autem hoc caſu debeat eſſe $gh-fk > gh$, quantitatem f negatiue capi oportet, vt ſit, poſito $x = \frac{1}{\sqrt{(h+kzz)}}$,

$$\int dz \sqrt{\frac{-f+gzz}{h+kzz}} = z\sqrt{\frac{-f+gzz}{h+kzz}} + \frac{gh+fk}{k}\int dx \sqrt{\frac{1-hxx}{g-(fk+gh)xx}}.$$

At ex §. 41 habetur:

$$\int dx \sqrt{\frac{1-hxx}{g-(fk+gh)xx}} = C - \frac{fk}{(fk+gh)^{\frac{3}{2}}}\,\Pi\,\frac{fk+gh}{fk}\left(1 - x\sqrt{\frac{fk+gh}{g}}\right)\left[\frac{fk+gh}{fk}\right]$$

 vnde

vnde caſus IX. conficitur.

Integratio Caſus IX.

$$\int dz \surd \frac{-f+gzz}{b+kzz} = C + z\surd \frac{-f+gzz}{b+kzz} - \frac{f}{\surd(fk+gb} \Pi \frac{fk+gb}{fk} \left(1 - \frac{\surd(fk+gb)}{\surd g(b+kzz)}\right) \left[\frac{fk+gb}{fk}\right].$$

70. Caſus ergo huius integrale conſtat parte algebraica et arcu elliptieo, qui, vt ſemper, adhuc alio modo exprimi poſſet; verum praeferenda eſt illa ellipſis, cuius axis parametrum ſuperat, ne certis caſibus euaneſcere queat Caeterum hunc caſum ex praecedente XI deriuare potuiſſemus, ponendo b negatiuum, atque ſi in forma poſteriori faciemus $gb > fk$ habebimus aliam integrationem caſus XII.

Integratio Caſus XII.

$$\int dz \surd \frac{-f+gzz}{-b+kzz} = C + z\surd \frac{-f+gzz}{-b+kzz} - \frac{(gb-fk)}{k\surd fk} \Pi \frac{fk}{gb-fk} \left(\frac{\surd k(-f+gzz)}{\surd g(-b+kzz} - 1\right) \left[\frac{-fk}{gb-fk}\right].$$

71. En aliam integrationem caſus XII. iam ſupra § 42 tractati, quae praeter arcum hyperbolicum continet partem algebraicam; cum prior ſolo arcu hyperbolico exprimatur. Aequalitas ergo harum duarum expreſſionum perpendi meretur, quod quo concinnius fiat, ponamus $\frac{fk}{gb-fk} = \frac{m}{n}$; et $z\surd\frac{k}{b} = t$, eritque

$$\Pi \frac{m}{n} (t-1) \left[\frac{-m}{n}\right] + \Pi \frac{m}{n} \left(\surd \frac{(m+n)tt-m}{(m+n)(tt-1)} - 1\right) \left[\frac{-m}{n}\right]$$
$$= C + \frac{m}{n} t \surd \frac{(m+n)tt-m)}{m(tt-1)},$$

vnde

vnde conſtante debite definita diuerſi arcus hyperbolici inter ſe comparari poſſunt. Scilicet poſito ſemiaxe $\frac{m}{n} = \alpha$, ſumtisque duabus variabilibus t et u, erit:

$$\Pi\alpha(t-1)[-\alpha]-\Pi\alpha(u-1)[-\alpha]+\Pi\alpha\left(\sqrt{\frac{(\alpha+1)tt-\alpha}{(\alpha+1)(tt-1)}}-1\right)[-\alpha]$$
$$-\Pi\alpha\left(\sqrt{\frac{(\alpha+1)uu-\alpha}{(\alpha+1)(uu-1)}}-1\right)[-\alpha]=\alpha t\sqrt{\frac{(\alpha+1)tt-\alpha}{\alpha(tt-1)}}$$
$$-\alpha u\sqrt{\frac{(\alpha+1)uu-\alpha}{\alpha(uu-1)}}.$$

Exemplum 3.

72. Ponamus f et k negatiua, et poſterior expreſſio dat:

$$\int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{h-kzz}}=z\sqrt{\frac{-f+gzz}{h-kzz}}-\int dy\sqrt{\frac{f+hyy}{g+kyy}}$$

exiſtente $gh > fk$. Iam ex Caſu II. §. 51. tractato habemus:

$$\int dy\sqrt{\frac{f+kyy}{g+kyy}}=C+\frac{f}{\sqrt{(gh-fk)}}\Pi\frac{gh-fk}{fk}\left(\frac{\sqrt{(g+kyy)}}{\sqrt{g}}-1\right)\left[\frac{-gh+fk}{fk}\right].$$

Cum igitur ſit $y=\sqrt{\frac{-f+gzz}{h-kzz}}$, erit $\sqrt{(g+kyy)}=\frac{\sqrt{(gh-fk)}}{\sqrt{(h-kzz)}}$, vnde caſus decimus expeditur:

Integratio caſus X.

$$\int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{h-kzz}}=C+z\sqrt{\frac{-f+gzz}{h-kzz}}-\frac{f}{\sqrt{(gh-fk)}}\Pi\frac{gh-fk}{fk}$$
$$\left(\frac{\sqrt{(gh-fk)}}{\sqrt{g(h-kzz)}}-1\right)\left[\frac{-gh+fk}{fk}\right]$$

72. Huius ergo caſus decimi integrale conſtat parte algebraica et arcu hyperbolico. Sin autem k ſumatur negatiue, oritur integrale caſûs noni iam ante §. 70. exhibitum, ex quo hic ipſe caſus deriuari potuiſſet.

Exemplum I.

79. Referatur forma $\int dx \sqrt{\frac{1-gxx}{k+(fk-gh)xx}}$ ad caſum III. et quia eſt $f>0$, ſumi debet $g<0$, $h>0$; et $k<0$, vnde obtinetur:

$$\int dz \sqrt{\frac{f-gzz}{h-kzz}} = C + \frac{g}{k} z \sqrt{\frac{h-kzz}{f-gzz}} + \frac{(fk-gh)}{k} \int dx \sqrt{\frac{1+gxx}{h-(fk-gh)xx}}$$

eſt vero ex caſu III. (40)

$$\int dx \sqrt{\frac{1+gxx}{h-(fk-gh)xx}} = \frac{-fk}{fk-gh} \sqrt{\frac{1}{fk-gh}} . \Pi \frac{fk-gh}{fk} \left(1 - x\sqrt{\frac{fk-gh}{h}}\right)\left[\frac{fk-gh}{fk}\right]$$

vbi, cum ſit $fk>gh$, iterum caſus VI. occurrit;

Integratio caſus VI.

$$\int dz \sqrt{\frac{f-gzz}{h-kzz}} = C + \frac{g}{k} z \sqrt{\frac{h-kzz}{f-gzz}} - \frac{f}{\sqrt{(fk-gh)}} \Pi \frac{fk-gh}{fk} \left(1 \frac{-z\sqrt{(fk-gh)}}{\sqrt{h(f-gzz}}\right)\left[\frac{fk-gh}{fk}\right]$$

80. Si ellipſin in aliam ſui ſimilem inuertamus, erit:

$$\int dz \sqrt{\frac{f-gzz}{h-kzz}} = C + \frac{g}{k} z \sqrt{\frac{h-kzz}{f-gzz}} + \frac{(fk-gh)}{k\sqrt{fk}} \Pi \frac{fk}{fk-gh} \left(1 - \frac{\sqrt{f(h-kzz)}}{\sqrt{h(f-gzz)}}\right)\left[\frac{fk}{fk-gh}\right]$$

quod integrale cum ſuperiori (41) comparatum egregiam ſuppeditat arcuum ellipticorum relationem. Sit autem ſemiaxis $\frac{fk}{fk-gh} = a$, et $z\sqrt{\frac{k}{h}} = t$, ſeu $zz = \frac{htt}{k}$, erit $\sqrt{\frac{h-kzz}{f-gzz}} = \sqrt{\frac{h}{f}} \cdot \frac{a(1-tt)}{a-(a-1)tt}$, ob $gh = \frac{a-1}{a} fk$; vnde fit:

$$\Pi a(1-t)[a] + \Pi a\left(1 \sqrt{\frac{a(1-tt)}{a-(a-1)tt}}\right)[a] + (a-1)t\sqrt{\frac{a(1-tt)}{a-(a-1)tt}} = C.$$

Sumtis ergo duabus variabilibus t et u, habebitur:

$$\left.\begin{aligned} &+\Pi a(1-t)[a] + \Pi a\left(1-\sqrt{\frac{a(1-tt)}{a-(a-1)tt}}\right)[a] \\ &-\Pi a(1-u)[a] - \Pi a\left(1-\sqrt{\frac{a(1-uu)}{a-(a-1)uu}}\right)[a] \end{aligned}\right\} = \left\{\begin{aligned} &-(a-1)t\sqrt{\frac{a(1-tt)}{a-(a-1)tt}} \\ &+(a-1)u\sqrt{\frac{a(1-uu)}{a-(a-1)uu}} \end{aligned}\right.$$

vnde

vnde comparationes arcuum ellipticorum dudum a me demonſtratae facile colliguntur.

Si hic ſumatur g negatiue, oritur caſus III. et tum formula $\int dx\sqrt{\frac{1-gxx}{1-(fk+gb)xx}}$ ad caſum VI. referenda fuiſſet, quare non opus eſt, vt hunc caſum euoluamus.

Exemplum 2.

81. Haec forma niſi inuertatur $\int dx\sqrt{\frac{gxx-1}{(gb-fk)xx-b}}$, ad caſum XII. reduci nequit; vbi eſſe debet $f<0$, habebimus ergo:

$$\int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{b+kzz}} = C + \frac{g}{k}z\sqrt{\frac{b+kzz}{-f+gzz}} - \frac{(fk+gb)}{k}\int dx\sqrt{\frac{gxx-1}{(fk+gb)xx-b}},$$

verum nunc ad caſum XI. refertur: indeque acquireremus caſum IX. iam ſupra inuentum.

Exemplum 3.

82. Verum formulam $\int dx\sqrt{\frac{1-gxx}{b+(fk-gb)xx}}$, ad caſum II. reducamus, quod fit ſumendo $g<0$, exiſtente $f>0$, et $x=\frac{z}{\sqrt{(f-gzz)}}$, vt habeatur:

$$\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{b+kzz}} = C - \frac{g}{k}z\sqrt{\frac{b+kzz}{f-gzz}} + \frac{(fk+gb)}{k}\int dx\sqrt{\frac{1+gxx}{b+(fk+gb)xx}}$$

verum haec reductio non ſuccedit, niſi $k<0$, ita vt ſit:

$$\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{b-kzz}} = C + \frac{g}{k}z\sqrt{\frac{b-kzz}{f-gzz}} - \frac{(gb-fk)}{k}\int dx\sqrt{\frac{1+gxx}{b+(gb-fk)xx}}$$

exiſtente $x=\frac{z}{\sqrt{(f-gzz)}}$, eritque ex §. 51.

$$\int dx\sqrt{\frac{1+gxx}{b+(gb-fk)xx}} = \frac{1}{\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gb-fk}\left(\frac{\sqrt{(b+(gb-fk)xx)}}{\sqrt{b}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gb-fk}\right]$$

et. $\sqrt{(b+(gb-fk)xx)} = \frac{\sqrt{f(b-kzz)}}{\sqrt{(f-gzz)}}$, vnde caſus VII. colligitur.

Inte-

Integratio caſus VII.

$$\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{h-kzz}} = C + \frac{g}{k}z\sqrt{\frac{h-kzz}{f-gzz}} - \frac{(gh-fk)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh-fk}\left(\frac{\sqrt{f(h-kzz)}}{\sqrt{h(f-gzz)}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gh-fk}\right]$$

exiſtente $gh > fk$

83. Conſtat ergo hoc integrale parte algebraica et arcu hyperbolico, hicque caſus ad iam expeditos de nouo accedit.

Scholion.

84. Hactenus ergo octo caſus per valores reales integrauimus, qui ſunt II, III, VI, VII, IX, X, XI et XII. et reliqui quatuor ita ſunt comparati, vt per ſimiles formas nullo modo integrari queant. Exigunt ſcilicet praeter partem algebraicam duos arcus, alterum ellipticum, alterum hyperbolicum, ac pars quidem algebraica, vel huius formae $z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$, vel huius $z\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$, aſſumi poteſt: vnde duo adhuc problemata euolui conueniet.

Problema 8.

85. Inuenire caſus, quibus expreſſio $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$ aequatur quantitati algebraicae $\alpha z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$ vna cum duobus arcubus ſectionum conicarum.

Solutio.

Poſito $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \alpha z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} + Z$, erit differentiando:

$$dZ = \frac{dz((1-\alpha)fh + (fk + (1-2\alpha)gh)zz + (1-\alpha)gkz^4)}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(f+gzz)}}$$

quae

quae in duas partes, formulis Probl. 5. traditis contentas, reſoluantur.

1. Ponatur $Z = p\int \frac{dz}{(b+kzz)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(f+gzz)}} + q\int \frac{zzdz}{(b+kzz)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(f+gzz)}}$ fierique debet:

$(1-\alpha)fb = p$; $fk + (1-2\alpha)gb = q$; $(1-\alpha)gk = 0$ vnde ob $\alpha = 1$, euaneſceret quoque p contra hypotheſin.

2. Ponatur $Z = p\int \frac{dz}{(b+kzz)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(f+gzz)}} + q\int \frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{(b+kzz)^{\frac{3}{2}}}$ fierique debet:

$(1-\alpha)fb = p + qf$; $fk + (1-2\alpha)gb = qg$, et $(1-\alpha)gb = 0$, vnde $\alpha = 1$; $q = \frac{fk - gb}{g}$; $p = \frac{-f(fk-gb)}{g}$. ideoque

$$\int dz \sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}} = C + z\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}} + \frac{f}{g}\int dy \sqrt{\frac{g-kyy}{byy-f}} - \frac{(fk-gb)}{gk}\int dx \sqrt{\frac{g+(fk-gb)xx}{1-bxx}}$$

exiſtente $y = \sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}$ et $x = \frac{1}{\sqrt{(b+kzz)}}$.

3. Ponatur $Z = p\int \frac{dz}{(b+kzz)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(f+gzz)}} + q\int \frac{zzdz}{\sqrt{(f+gzz)(b+kzz)}}$ ac fieri neceſſe eſt:

$(1-\alpha)fb = p$, $fk + (1-2\alpha)gb = qb$; $(1-\alpha)gk = qk$, vnde deducitur $\alpha = \frac{fk}{gb}$; $q = \frac{gb-fk}{b}$; $p = \frac{f(gb-fk)}{g}$.

 Quo-

Quocirca habebimus:

$$\int dz \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = C + \frac{fk}{gh} z \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} + \frac{f}{g}\int dy \sqrt{\frac{g-kyy}{hyy-f}} + \frac{gh-fk}{gh}\int dx \sqrt{\frac{xx-f}{gh-fk+kxx}}$$

exiſtente $y = \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$ et $x = \sqrt{(f+gzz)}$.

4. Ponatur $Z = p\int \frac{dz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(f+gzz)}} + q\int dz \sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$ fierique oportet:

$$(1-\alpha)fh = p+qhh;\; fk+(1-2\alpha)gh = 2qhk;\; (1-\alpha)gk = qkk$$

vnde deducitur $fk-gh=0$, quod eſt abſurdum.

5. Ponatur $Z = p\int \frac{zzdz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(f+gzz)}} + q\int \frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}}$ fiet:

$$(1-\alpha)fh = qf;\; fk+(1-2\alpha)gh = p+qg \text{ et } (1-\alpha)gk = 0$$

vnde nihil ob $q=0$ concludere licet.

6. Ponatur $Z = p\int \frac{zzdz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(f+gzz)}} + q\int dz \sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$, fietque:

$$(1-\alpha)fh = qhh;\; fk+(1-2\alpha)gh = p+2ghk;\; (1-\alpha)gk = qkk,$$

vnde pariter nihil colligi poteſt.

7.

7. Ponatur $Z = p\int \frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{(b+kzz)^{\frac{3}{2}}} + q\int \frac{zzdz}{\sqrt{(f+gzz)(b+kzz)}}$

eritque:

$$(1-\alpha)fb = pf;\; fk + (1-2\alpha)gb = pg + qb;$$
$$(1-\alpha)gk = qk,$$

vnde quoque nihil concluditur.

8. Ponatur $Z = p\int \frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{(b+kzz)^{\frac{3}{2}}} + q\int dz\sqrt{\frac{b+kzz}{f+gzz}}$

eritque:

$$(1-\alpha)fb = pf + qbb;\; fk - gb + 2(1-\alpha)gb = pg + 2qbk;$$
$$(1-\alpha)gk = qkk,$$

vnde elicitur $\alpha = \frac{gb-fk}{gb}$; $p = \frac{fk-gb}{g}$; $q = \frac{f}{b}$.

Quare erit:

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}} = C + \frac{gb-fk}{gb} z\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}} + \frac{f}{b}\int dz\sqrt{\frac{b+kzz}{f+gzz}}$$
$$+ \frac{fk-gb}{gb}\int dy\sqrt{\frac{f-(fk-gb)yy}{1-kyy}}$$

exiſtente $y = \frac{z}{\sqrt{(b+kzz)}}$.

Plures combinationes idoneas inſtituere non licet.

Coroll. 1.

86. Ex hypotheſi vltima ſponte ſequitur integratio caſus primi, quo eſt $fk > gb$; ex caſu enim II. eſt

$$\int dz\sqrt{\frac{b+kzz}{f+gzz}} = \frac{b}{\sqrt{(fk-gb)}}\Pi\frac{fk-gb}{gb}\left(\frac{\sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{f}} - 1\right)\left[\frac{-fk+gb}{gb}\right]$$

deinde ex caſu VI. eſt (41)

$$\int dy\sqrt{\frac{f-(fk-gb)yy}{1-kyy}} = \frac{gb}{fk}\sqrt{\frac{f}{k}}.\Pi\frac{fk}{gb}(1-y\sqrt{k})\left[\frac{fk}{gb}\right]$$

hincque colligitur.

Integratio caſus I.

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}} = C - \frac{(fk-gb)}{gb} z\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}$$
$$+ \frac{f}{\sqrt{(fk-gb)}}\Pi\frac{fk-gb}{gb}\left(\frac{\sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{f}}-1\right)\left[\frac{-fk+gb}{gb}\right]$$
$$- \frac{(fk-gb)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gb}\left(1-\frac{z\sqrt{k}}{\sqrt{(b+kzz)}}\right)\left[\frac{fk}{gb}\right].$$

Coroll. 2.

87. Ex hypotheſi n°. 3. caſus V. deduci poſſe videtur, vnde fit:

$$\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{b+kzz}} = \frac{-fk}{gb} z\sqrt{\frac{f-gzz}{b+kzz}} - \frac{f}{g}\int dy\sqrt{\frac{g+kyy}{f-kyy}}$$
$$+ \frac{fk+gb}{gb}\int dx\sqrt{\frac{f-xx}{fk+gb-kxx}}$$

exiſtente $y=\sqrt{\frac{f-gzz}{b+kzz}}$ et $x=\sqrt{(f-gzz)}$ ſed haec vltima formula ex caſu VI. confici nequit; neque etiam ex hypotheſi n°. 2.

Coroll. 3.

88. Conſideremus formam VIII, vbi g et b ſunt negatiua $fk>gb$, atque n°. 3. huc transferendo habebimus

$$\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{-b+kzz}} = \frac{fk}{gb} z\sqrt{\frac{f-gzz}{-b+kzz}} - \frac{f}{g}\int dy\sqrt{\frac{g+kyy}{f+byy}}$$
$$+ \frac{gb-fk}{gb}\int dx\sqrt{\frac{f-xx}{fk-gb-kxx}}$$

exiſtente $y=\sqrt{\frac{f-gzz}{-b+kzz}}$ et $x=\sqrt{(f-gzz)}$

nunc vero eſt ex caſu II.

$$\int dy\sqrt{\frac{g+kyy}{f+byy}} = \frac{g}{\sqrt{(fk-gb)}}\Pi\frac{fk-gb}{gb}\left(\frac{\sqrt{(f+byy)}}{\sqrt{f}}-1\right)\left[\frac{-fk+gb}{gb}\right]$$

exiſtente $\sqrt{(f+byy)}=\frac{z\sqrt{(fk-gb)}}{\sqrt{(-b+kzz)}}$

deinde

deinde ex caſu VI.

$$\int dx \surd \frac{f-xx}{fk-gh-kxx} = \frac{-gh}{k\surd fk} \Pi \frac{fk}{gh} \left(1 - x\surd \frac{k}{fk-gh}\right) \left[\frac{fk}{gh}\right]$$

vnde ſequitur

Integratio caſus VIII.

$$\int dz \surd \frac{f-gzz}{-h+kzz} = C + \frac{fk}{gh} z \surd \frac{f-gzz}{-h+kzz}$$
$$- \frac{f}{\surd(fk-gh)} \Pi \frac{fk-gh}{gh} \left(\frac{z\surd(fk-gh)}{\surd f(-h+kzz)} - 1\right) \left[\frac{-fk+gh}{gh}\right]$$
$$+ \frac{(fk-gh)}{k\surd fk} \Pi \frac{fk}{gh} \left(1 - \frac{\surd k(f-gzz)}{\surd(fk-gh)}\right) \left[\frac{fk}{gh}\right].$$

Scholion.

89. Sic igitur caſus duos nouos I. et VIII. ſumus adepti, ita vt tantum IV. et V. ſuperſint, quos ope ſequentis problematis ſuperare licebit.

Problema 9.

90. Inuenire caſus, quibus expreſſio $\int dz \surd \frac{f+gzz}{h+kzz}$ aequatur quantitati algebraicae $az\surd \frac{h+kzz}{f+gzz}$ vna cum duobus arcubus ſectionum conicarum.

Solutio.

Poſito $\int dz \surd \frac{f+gzz}{h+kzz} = az\surd \frac{h+kzz}{f+gzz} + Z$ erit differentiando

$$dZ = \frac{dz(ff - afh + 2f(g-ak)zz + g(g-ak)z^4)}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}} \surd(h+kzz)}$$

cuius reſolutio in duas partes idoneas ſequenti modo inſtituatur:

1. Ponatur $Z = p\int\frac{zz\,dz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(b+kzz)}} + q\int\frac{dz\sqrt{(b+kzz)}}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}}$ fietque

$f(f-ab)=qb;\ 2f(g-ak)=p+qk;\ g(g-ak)=0,$

vnde colligitur:

$$a=\frac{g}{k};\ q=\frac{f(fk-gb)}{bk};\ p=\frac{-f(fk-gb)}{b}$$

ac propterea:

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}} = C + \frac{gz}{k}\sqrt{\frac{b+kzz}{f+gzz}} - \frac{f}{b}\int dy\sqrt{\frac{fyy-b}{k-gyy}} + \frac{fk-gb}{bk}\int dx\sqrt{\frac{b+(fk-gb)xx}{1-gxx}}$$

exiſtente $y=\sqrt{\frac{b+kzz}{f+gzz}}$ et $x=\frac{z}{\sqrt{(f+gzz)}}$

2°. Ponatur $Z = p\int\frac{zz\,dz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(b+kzz)}} + q\int\frac{zz\,dz}{\sqrt{(f+gzz)(b+kzz)}}$ fietque

$f(f-ab)=0,\ 2f(g-ak)=p+qf;\ g(g-ak)=qg$

hincque $a=\frac{f}{b};\ p=\frac{f(gb-fk)}{b}$ et $q=\frac{gb-fk}{b}$

quare habebitur:

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}} = C + \frac{fz}{b}\sqrt{\frac{b+kzz}{f+gzz}} - \frac{f}{b}\int dy\sqrt{\frac{fyy-b}{k-gyy}} + \frac{gb-fk}{gb}\int dx\sqrt{\frac{xx-f}{gb-fk+kxx}}$$

exiſtente $y=\sqrt{\frac{b+kzz}{f+gzz}}$ et $x=\sqrt{(f+gzz)}$

3°. Ponatur $Z = p\int\frac{zz\,dz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(b+kzz)}} + q\int dz\sqrt{\frac{b+kzz}{f+gzz}}$

fietque:

$f(f-ab)=qfb;\ 2f(g-ak)=p+q(fk+gb);\ g(g-ak)=qgk$

vnde

vnde nihil concludere licet.

4°. Ponatur $Z = p\int \frac{dz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(b+kzz)}}$
$+ q\int \frac{zzdz}{\sqrt{(f+gzz)(b+kzz)}}$ fietque:

$f(f-\alpha b) = p$; $2f(g-\alpha k) = qf$; $g(g-\alpha k) = qg$

vnde nihil concludere licet.

5°. Ponatur $Z = p\int \frac{dz\sqrt{(b+kzz)}}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}} + q\int \frac{zzdz}{\sqrt{(f+gzz)(b+kzz)}}$

fietque:

$f(f-\alpha b) = pb$; $2f(g-\alpha k) = pk+qf$; $g(g-\alpha k) = qg$

vnde nihil colligere licet.

6°. Ponatur $Z = p\int \frac{dz\sqrt{(b+kzz)}}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}} + q\int dz\sqrt{\frac{b+kzz}{f+gzz}}$

fieri debet:

$f(f-\alpha b) = pb+qfb)$; $2f(g-\alpha k) = pk+q(fk+gb)$;
$g(g-\alpha k) = qgk$

vnde colligitur:

$\alpha = \frac{gb-fk}{bk}$; $p = \frac{f(fk-gb)}{bk}$ et $q = \frac{f}{b}$, ideoque

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}} = C + \frac{gb-fk}{bk} z\sqrt{\frac{b+kzz}{f+gzz}} + \frac{fk-gb}{bk}\int dy\sqrt{\frac{b+(fk-gb)yy}{1-gyy}} + \frac{f}{b}\int dz\sqrt{\frac{b+kzz}{f+gzz}}$$

exiſtente $y = \frac{z}{\sqrt{(f+gzz)}}$.

Coroll. 1.

91. Hinc omnes quatuor caſus difficiliores derivari poſſunt. Primus nempe ſtatim deducitur ex no. 6; nam ob $fk > gb$, erit ex caſu III.

$$\int dy\sqrt{\frac{b+(fk+gb)yy}{1-gyy}} = -\frac{fk}{g\sqrt{gb}} \Pi \frac{gb}{fk} (1-y\sqrt{g}) \left[\frac{gb}{fk}\right]$$

exiſten-

exiſtente $y = \frac{z}{\sqrt{(f+gzz)}}$, tum vero ex caſu II.

$$\int dz \sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} = \frac{h}{\sqrt{(fk-gh)}} \Pi \frac{fk-gh}{gh} \left(\frac{\sqrt{(h+kzz)}}{\sqrt{h}} - 1\right)\left[\frac{-fk+gh}{gh}\right]$$

hincque

Integratio caſus I.

$$\int dz \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = C - \frac{(fk-gh)}{hk} z \sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$$
$$- \frac{f(f-gh)}{gh\sqrt{gh}} \Pi \frac{gh}{fk} \left(1 - \frac{z\sqrt{g}}{\sqrt{(f+gzz)}}\right)\left[\frac{gh}{fk}\right]$$
$$+ \frac{f}{\sqrt{(fk-gh)}} \Pi \frac{fk-gh}{gh} \left(\frac{\sqrt{(h+kzz)}}{\sqrt{h}} - 1\right)\left[\frac{-fk+gh}{gh}\right]$$

Coroll. 2.

92. Hic membrum medium per inuerſionem ellipſis abit in

$$+ \frac{(fk-gh)}{k\sqrt{fk}} \Pi \frac{fk}{gh} \left(1 - \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{(f+gzz)}}\right)\left[\frac{fk}{gh}\right]$$

vnde ſi g negatiue capiatur pro caſu V manifeſto fit pro hyperbola. At ſumto g negatiuo, erit vltimum membrum ex caſu III.

$$\int dz \sqrt{\frac{h+kzz}{f-gzz}} = \frac{-(fk+gh)}{gh} \sqrt{\frac{h}{g}}. \Pi \frac{gh}{fk+gh}\left(1 - z\sqrt{\frac{g}{f}}\right)\left[\frac{gh}{fk+gh}\right]$$
$$= + \frac{h}{\sqrt{(fk+gh)}}. \Pi \frac{fk+gh}{gh}\left(1 - \frac{\sqrt{(f-gzz)}}{\sqrt{f}}\right)\left[\frac{fk+gh}{gh}\right]$$

vnde deducitur

Integratio caſus V.

$$\int dz \sqrt{\frac{f-gzz}{h+kzz}} = C - \frac{(fk+gh)}{hk} z \sqrt{\frac{h+kzz}{f-gzz}}$$
$$+ \frac{(fk+gh)}{k\sqrt{fk}} \Pi \frac{fk}{gh} \left(\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{(f-gzz)}} - 1\right)\left[\frac{-fk}{gh}\right]$$
$$+ \frac{f}{\sqrt{(fk+gh)}} \Pi \frac{fk+gh}{gh} \left(1 - \frac{\sqrt{(f-gzz)}}{\sqrt{f}}\right)\left[\frac{fk+gh}{gh}\right].$$

Coroll.

Coroll. 3.

93. Per n°. 2. conſtruitur caſus IV. quo h negatiue capitur. Erit enim

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{-h+kzz}} = C - \frac{fz}{h}\sqrt{\frac{-h+kzz}{f+gzz}} + \frac{f}{h}\int dy\sqrt{\frac{h+fyy}{k-gyy}}$$
$$+\frac{fk+gh}{gh}\int dx\sqrt{\frac{-f+xx}{-fk-gh+kxx}}$$

exiſtente $y=\sqrt{\frac{-h+kzz}{f+gzz}}$ et $x=\sqrt{(f+gzz)}$.

Nunc vero eſt

$$\int dy\sqrt{\frac{h+fyy}{k-gyy}} = \frac{-(fk+gh)}{gh}\sqrt{\frac{h}{g}}.\Pi\frac{hh}{fk+gh}\left(1-y\sqrt{\frac{g}{k}}\right)\left[\frac{gh}{fk+gh}\right]$$
$$= +\frac{h}{\sqrt{(fk+gh)}}\Pi\frac{fk+gh}{gh}\left(1-\frac{\sqrt{(k-gyy)}}{\sqrt{k}}\right)\left[\frac{fk+gh}{gh}\right]$$

exiſtente $\sqrt{(k-gyy)}=\frac{\sqrt{(fk+gh)}}{\sqrt{(f+gzz)}}$ et

$$\int dx\sqrt{\frac{-f+xx}{-fk-gh+kxx}} = \frac{gh}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh}\left(x\sqrt{\frac{k}{fk+gh}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gh}\right]$$

vnde colligitur

Integratio caſus IV.

$$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{-h+kzz}} = B - \frac{fz}{h}\sqrt{\frac{-h+kzz}{f+gzz}}$$
$$+\frac{f}{(\sqrt{fk+gh})}\Pi\frac{fk+gh}{gh}\left(1-\frac{\sqrt{(fk+gh)}}{\sqrt{k(f+gzz)}}\right)\left[\frac{fk+gh}{gh}\right]$$
$$+\frac{fk+gh}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh}\left(\frac{\sqrt{k(f+gzz)}}{\sqrt{(fk+gh)}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gh}\right].$$

Coroll. 4.

94. Si hic inſuper g ſumamus negatiue, prodit

Integratio caſus VIII.

$$\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{-h+kzz}} = C - \frac{fz}{h}\sqrt{\frac{-h+kzz}{f-gzz}}$$
$$+\frac{f}{\sqrt{(fk-gh)}}\Pi\frac{fk-gh}{gh}\left(\frac{\sqrt{(fk-gh)}}{\sqrt{k(f-gzz)}}-1\right)\left[\frac{-fk+gh}{gh}\right]$$
$$+\frac{fk+gh}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh}\left(1-\frac{\sqrt{k(f-gzz)}}{\sqrt{(fk-gh)}}\right)\left[\frac{fk}{gh}\right]$$

hocque modo omnes plane 12. caſus expediuimus.

Concluſio.

95. Intelligimus ergo duodecim caſus formulae $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$ ſupra enumeratos in tres claſſes diſtingui, quarum quaelibet quatuor caſus complectatur. Prima ſcilicet claſſis eos continebit caſus, quorum integratio ſimplici arcui ſectionis conicae abſoluitur: ſecunda vero eos, qui inſuper partem algebraicam aſſumunt. At tertia claſſis praeter partem algebraicam duos arcus, alterum ellipticum, alterum hyperbolicum, poſtulat. Cum igitur in enumeratione caſuum ad hunc ordinem non reſpexerimus, iam ita diſponendi videntur:

Claſſis		Integralia exprimuntur
Prima	III. VI.	arcu elliptico
	II. XII	arcu hyperbolico
Secunda	XI. IX.	parte algebraica et arcu elliptico
	X. VII.	parte algebraica et arcu hyperbolico
Tertia	I. IV. V. VIII.	parte algebraica et duobus arcubus, altero elliptico, altero hyperbolico.

ELEMEN-

ELEMENTA
CALCVLI VARIATIONVM.

Auctore

L. EVLERO.

Mox poſt inuenta calculi differentialis principia eiusmodi problemata tractari ſunt coepta, quae plane ſingularem huius calculi applicationem requirebant. Cum enim munus calculi differentialis in hoc potiſſimum conſiſtat, vt propoſita functione quacunque quantitatis variabilis x eius incrementum inueſtigetur, dum quantitas x ſuo differentiali dx creſcere aſſumitur: translatione ad Geometriam facta in promtu erat inde linearum curuarum tangentes et ipſas curuaturas definire, quarum rerum inueſtigatio immediate ex natura differentialium deriuatur. Aliter vero comparata eſt ratio eiusmodi problematum, quibus innumerabiles lineae curuae ſub quapiam generali aequatione contentae proponuntur, a quibus arcus longitudine aequales, ſiue qui a graui deſcendente eodem tempore percurrantur, abſcindi oporteat, ex quo poſteriori genere problema curuarum ſynchronarum eſt natum. In his enim quaeſtionibus non tam id eſt ſpectandum, quantum incrementum cuiusque curuae applicata accipiat, dum abſciſſa ſuo differentiali augetur; quam, quantum ſiue tempus deſcenſus per eundem varietur, ſi ipſe arcus in alia curua capiatur. Talia problemata per differentia-

tionem parametrorum reſolui dicuntur, quandoquidem variabilitas parametri omnes illas innumerabiles curuas propoſitas complectitur. Quo autem clarius perſpiciatur principium, ex quo huiusmodi problematum ſolutio eſt petenda, propoſita ſit aequatio quaecunque inter abſciſſam x et applicatam y, quae inſuper quantitatem conſtantem a parametrum vocandam contineat; quae quamdiu eundem valorem retinet, aequatio praebebit vnam quandam lineam curuam, verum ſi ipſi a ſucceſſiue alii atque alii valores tribuantur, aliae continuo lineae curuae orientur. Quodſi iam quaeſtio circa arcus harum curuarum verſetur, quoniam cuiusque curuae arcus per $\int V(dx^2+dy^2)$ exprimitur, in qua integratione parameter a pro conſtanti aſſumitur; totum negotium huc redit, vt formulae integralis $\int V(dx^2+dy^2)$ incrementum definiatur, quod accipit, dum in ea loco quantitatis a eadem ſuo incremento da aucta ſubſtituatur. Generatim igitur ſi loco arcus alia quaecunque expreſſio integralis $\int Zdx$ tractetur, quae integratio ex data inter x et y aequatione ſit conficienda, parametro a pro conſtanti habita; quaeritur quantam variationem eadem expreſſio $\int Zdx$ iam integrata ſit paſſura, ſi in aequatione inter x et y data parameter a elemento da augeatur. Eodem referendum eſt celebre illud traiectoriarum orthogonalium problema, in quo etiam infinitae lineae curuae ſub data aequatione inter abſciſſam x, applicatam y, et parametrum variabilem a, contentae proponuntur, atque eiusmodi linea curua quaeritur, quae illas omnes ad angulos rectos traiiciat. Ad quod problema ſoluendum applicata y vt functio ipſarum

ipſarum x et a ſpectari ſolet, ex cuius differentiatione talis forma $dy = pdx + qda$ emergere concipitur, tum vero peruenitur ad hanc aequationem differentialem: $dx(1+pp)+pqda=0$, ſiue ad hanc: $dx+pdy=0$, ex qua cum illa coniuncta parametrum a eliminari oportet, vt eliciatur aequatio inter x et y, naturam curuae quaeſitae exprimens. Quando quidem curuae ſecandae per aequationem algebraicam inter x et y dantur, res nullam habet difficultatem, cum inde valor ipſius y abſolute per x et a definiri, indeque per differentiationem valores litterarum p et q aſſignari queant, vnde aequatio differentialis inter duas tantum variabiles x et a obtinetur; verum ſi aequatio pro curuis ſecandis ipſa iam ſit differentialis, parametrum a vt quantitatem conſtantem inuoluens; quae idcirco erit huius formae $dy=pdx$, ſeu $y=\int pdx$ ante omnia inueſtigari oportet, cuius modi aequatio differentialis proditura eſſet, ſi praeter x etiam parameter a vt variabilis ſtatuatur, vt inde quantitas q innoteſcat; quae inueſtigatio ſaepe maxime ſit difficilis, atque adeo vires Analyſeos ſuperare videtur. Etiamſi autem ratio huius inueſtigationis ex ſolis calculi differentialis principiis ſit petenda, tamen in ipſa tractatione ingens ſtatim cernitur diſcrimen; propterea quod, cum differentiatio ordinaria nulli difficultati ſoleat eſſe obnoxia, hic tota difficultas in inuentione differentialium ex variabilitate parametri oriundorum reſideat, haecque ipſa inventio ſingulares regulas requirat. Quam ob rem non praeter neceſſitatem partes Analyſeos infinitorum multiplicari videbuntur, ſi inueſtigationem huiusmodi differentia-

rentialium, quae ex variabilitate parametri naſcuntur, ad peculiarem calculum referamus, quem diſtinctionis cauſa *Calculum variationum* appellare liceat. Cuius neceſſitas adhuc clarius perſpicietur, ſi perpendamus, eius vim multo latius patere, quam ad ſolam parametrorum variabilitatem, qua etſi lineae curuae in infinitum multiplicantur, omnes tamen ſemper ſub certo quodam genere, quod ſcilicet in data aequatione contineatur, comprehenduntur. Noſtrum autem calculum variationum non ſolum ad huiusmodi genera curuarum determinata extendi conueniet, ſed etiam ad omnes omnino curuas, quae quidem concipi queant, veluti ſi inter omnes plane curuas ea ſit definienda, quae data quapiam maximi minimiue proprietate gaudeat. Atque huc referendum erit celebratiſſimum illud problema iſoperimetricum latiſſimo ſenſu acceptum, prout id quidem in libro ſingulari pertractaui; quem qui attente legerit, non dubitabit, quin huius generis inveſtigationes calculi ſpeciem prorſus ſingularem poſtulent, a conſuetis Analyſeos regulis non parum diuerſam. Haec enim problemata ad talem quaeſtionem reducuntur, vt eiusmodi aequatio inter binas variabiles x et y determinetur, ex qua expreſſio quaepiam integralis $\int Z dx$, quomodocunque Z per x et y componatur, maximum ſiue minimum valorem conſequatur. Ad hoc autem efficiendum neceſſe eſt, vt propoſita huiusmodi formula $\int Z dx$ quacunque, quae quidem ex aſſumta quauis relatione inter x et y determinatum valorem accipiat, in genere definiatur, quantam mutationem ea formula ſit ſubitura, ſi ipſa relatio inter x

et

et *y* infinite parum quomodocunque varietur; haecque quaeſtio iam infinities latius patet, quam ſuperior, vbi tantum mutatio ex variatione parametri oriunda aſſignari debebat. Poteſt etiam loco ſimplicis formulae integralis $\int Z dx$ expreſſio quaecunque, vtcunque ex *x*, *y*, harumque differentialibus atque formulis integralibus compoſita, conſiderari, quo longius haec tractatio extendatur; tum vero calculus variationum regulas ſuppeditabit, mutationem huiusmodi expreſſionum definiendi, quae ob relationem variabilium *x* et *y*, vtcunque infinite parum mutatam, ipſis inducitur. Methodus quidem in ſolutione problematum iſoperimetricorum adhiberi ſolita iam eximia huius calculi ſpecimina ſuggerit, quae autem cum ſint ex alieno quaſi fonte, Geometria ſcilicet, hauſta, non ad conſtitutionem principiorum iſtius calculi deſiderati referri poſſunt. Deinde vero etiam haec ſpecimina ad ſcopum nimis particularem ſunt adſtricta, quam vt amplitudinem noſtri calculi complecti poſſint. Quam ob rem conſtitui eius elementa ex primis Analyſeos principiis repetere, eaque ita euoluere, vt non ſolum problematibus ſupra commemoratis facile et concinne ſoluendis inſeruire poſſint, ſed etiam nouum quaſi campum aperiant, ſeſe ad plurima alia talium quaeſtionum genera extendentem, in quo Geometrae non ſine inſigni finium Analyſeos promotione vires ſuas exercere queant.

Elemen-

Elementa Calculi Variationum.

Hypotheſis 1.

1.

Detur inter variabiles binas x et y aequatio quaecunque, qua earum relatio mutua exprimatur, ita vt inde quicunque valor determinatus ipſi x tribuatur, valor quoque determinatus pro y definiatur.

Coroll. 1.

2. Propoſita ergo aequatione inter binas variabiles x et y, ſingulis valoribus ipſius x, quicunque concipi poſſunt, determinati valores ipſius y reſpondebunt.

Coroll. 2.

3. Vi ergo iſtius aequationis propoſitae erit y certa quaedam functio ipſius x, et quemadmodum ipſi x reſpondet y, ita illius valori ſequenti $x' = x + dx$, reſpondebit $y' = y + dy$, cuius differentia a praecedente y, differentiale nempe dy, per vulgares differentiandi regulas aſſignari poterit.

Coroll. 3.

4. Cum y ſit functio ipſius x, etiam $\frac{dy}{dx}$ erit functio ipſius x, per relationem inter x et y datam aſſignabilis; ac ſi ponatur $\frac{dy}{dx} = p$, ſimili modo $\frac{dp}{dx}$ erit certa

certa functio ipſius x: ac ſi porro ponamus $\frac{dp}{dx}=q$, $\frac{dq}{dx}=r$, $\frac{dr}{dx}=s$ etc. etiam hae quantitates q, r, s etc. erunt certae functiones ipſius x itidem per relationem inter x et y datam aſſignabiles.

Coroll. 4.

5. Si deinde V ſit expreſſio quomodocunque ex x et y conflata, ea quoque ope relationis inter x et y datae ita erit comparata, vt pro omnibus valoribus ipſius x valores determinatos adipiſcatur. Ac ſi V' deſignet valorem ſequentem, ſeu ipſi $x+dx$ conuenientem; erit $V'=V+dV$, ſiue $dV=V'-V$, ſecundum prima calculi differentialis principia.

Hypotheſis 2.

6. Quaecunque proponatur relatio inter x et y, quia inde ſimul relatio differentialium dx et dy innoteſcit, ponam in ſequentibus perpetuo:

$$\frac{dy}{dx}=p;\ \frac{dp}{dx}=q;\ \frac{dq}{dx}=r;\ \frac{dr}{dx}=s \text{ etc.}$$

eruntque p, q, r, s etc. perinde ac y, functiones ipſius x, per illam relationem datam aſſignabiles.

Coroll. 1.

7. Quemadmodum littera p relationem differentialium dx et dy continet, ita q complectetur relationem differentialium ſecundi gradus; r vero differentialium tertii gradus, s quarti gradus etc.

 Coroll.

Coroll. 2.

8. Viciſſim igitur etiam, ſi qua in expreſſione V differentialia, ſiue primi, ſiue ſecundi, ſiue altioris ordinis, inſint, ea introducendis his quantitatibus p, q, r, s, etc. ex calculo tolli poterunt.

Axioma.

9. Si inter variabiles x et y alia relatio a propoſita infinite parum diſcrepans conſtituatur, valores ipſius y, ſingulis valoribus ipſius x reſpondentes, ab iis, quos propoſita relatio praebet, infinite parum diſcrepabunt.

Coroll. 1.

10. Cum huiusmodi relatio variata infinitis modis a relatione propoſita diſcrepare poſſit, ita vt diſcrepantia ſit infinite parua, euenire poteſt, vt vnus pluresue valores ipſius y, qui certis valoribus ipſius x reſpondent, nullam inde mutationem patiantur.

Coroll. 2.

11. Iſta variatio relationis ita generalis concipi poteſt, vt inde omnes valores ipſius y mutationes quascunque patiantur, quo nullo modo a ſe inuicem pendeant. Quo igitur haec tractatio latiſſime pateat, huiusmodi variationem relationis generaliſſime conceptam intelligi conueniet.

Hypotheſis 3.

12. Si relatio inter x et y propoſita parum mutetur, valorem ipſius y, qui inde ipſi x reſpondet, per

per $y + \delta y$ deſignemus, ita vt δy variationem denotet, quam y ob variatam relationem patitur.

Coroll. 1.

13. Simili modo cum y' ſit valor ipſi $x + dx$ vi relationis propoſitae reſpondens, eius valorem, qui eidem $x + dx$ vi relationis variatae conuenit, per $y' + \delta y'$ exprimamus, ita vt $\delta y'$ variationem ipſius y' denotet, quae ex variatione relationis oritur.

Coroll. 2.

14. Cum igitur ſit $y' = y + dy$, erit $\delta y' = \delta(y + dy) = \delta y + \delta dy$, et $\delta dy = \delta y' - \delta y$. Denotabit autem δdy variationem ipſius dy, ex variatione inter x et y propoſitae ortam.

Coroll. 3.

15. Quemadmodum autem y' ſtatum ſequentem ipſius y denotat, ſtatu ſcilicet ſequente ad $x + dx$ relato; ita $\delta y'$ ſtatum ſequentem ipſius δy denotat, ex quo $\delta y' - \delta y$ exprimet differentiale ipſius δy, quod eſt $d\delta y$. Cum ergo ſit $\delta dy = \delta y' - \delta y$, erit $\delta dy = d\delta y$.

Coroll. 4.

16. Hinc ergo conſequimur iſtam inſignem proprietatem: quod variatio differentialis ipſius y aequalis ſit differentiali variationis ipſius y. Eſt enim δdy variatio ipſius dy, hoc eſt differentialis ipſius y, et $d\delta y$ eſt differentiale ipſius δy, hoc eſt variationis ipſius y.

Definitio I.

17. Si V ſit expreſſio vtcunque ex x et y conflata, propoſita quadam relatione inter x et y, eius variatio, quam per δV indicabo, eſt incrementum, quod quantitas V capit, ſi relatio inter x et y propoſita infinite parum varietur.

Coroll. I.

18. Probe ergo diſtingui oportet differentiale dV, et variatio δV; differentiale enim denotat incrementum ipſius V, dum x ſuo elemento dx augetur, manente relatione inter x et y propoſita; variatio autem denotat incrementum ipſius V, dum ipſa relatio variatur manente x.

Coroll. 2.

19. Cum per variationem relationis, inter x et y propoſitae, quantitas y incrementum capiat δy, manente x eadem; quomodocunque quantitas V ex x et y fuerit conflata, eius variatio reperietur, ſi loco y vbique ſcribatur $y + \delta y$, et a valore hinc pro V oriundo ipſe valor V ſubtrahatur.

Coroll. 3.

20. Scilicet ſi in V vbique pro y ſcribatur $y + \delta y$, prodibit valor variatus ipſius V, qui eſt $V + \delta V$; ipſa autem variatio reperitur, ſi a valore variato $V + \delta V$ valor primitiuus V ſubtrahatur.

Definitio.

Definitio 2.

21. Calculus variationum eſt methodus inueniendi variationes quantitatum vtcunque ex binis variabilibus x et y conflatarum, quas patiuntur, ſi relatio inter x et y propoſita infinite parum quomodocunque immutetur.

Coroll. 1.

22. Propoſita ergo relatione inter x et y, ſi V denotet quantitatem quomodocunque ab x et y pendentem, hic calculus docet inuenire variationem ipſius V, ſeu valorem ipſius δV.

Coroll. 2.

23. Quia relationem inter x et y datam vtcunque immutari aſſumimus, vt y pro ſingulis valoribus ipſius x variationes quascunque, quae etiam a ſe inuicem non pendeant, accipiat, hic calculus latiſſime patet, atque ad quasuis conditiones variationum datas accommodari poterit.

Scholion 1.

24. Quo vſus huius calculi clarius perſpici queat, exemplum afferamus. Propoſita ergo ſit haec relatio inter x et y:

$$aayy - bbxx = aabb$$

quae ſcribendo $b + db$ loco b infinite parum immutetur. Iam ſi proponatur quantitas quaepiam ab x et y pendens, veluti $\int \frac{\surd(dx^2 + dy^2)}{\surd y}$, huius variatio ex illa immutatione relationis oriunda ope iſtius calculi exhiberi

beri poterit; cum enim ſit $y = \frac{b}{a}\sqrt{(aa-xx)}$ erit $\delta y = \frac{db}{a}\sqrt{(aa-xx)}$ quae eſt variatio ipſius y. Quemadmodum autem ex cognita variatione ipſius y quantitatum vtcunque ab y et x pendentium, ideoque etiam huius: $\int\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{y}}$, variationes inde natae determinari debeant, in hoc calculo eſt oſtendendum; vnde patet, omnia, quae de variabilitate parametrorum paſſim ſunt tradita, hic contineri. Deinde vero etiam quaeſtiones inuerti poſſunt, veluti ſi propoſita huiusmodi formula $\int\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{y}}$ ea relatio inter x et y quaeratur, vnde variatio iſtius formulae datae prodeat magnitudinis, vel etiam nulla, quo poſteriori caſu relatio inuenta formulae propoſitae maximum minimumue valorem comparabit; atque huc referenda erunt omnia problemata, quae circa curuas maximi minimiue proprietate gaudentes adhuc ſunt tractata.

Scholion 2.

25. Praecepta huius calculi ad diuerſitatem rationis, qua formula quaepiam propoſita V a binis variabilibus x et y pendet, ſunt accommodanda, quae diuerſitas cum ſit infinita, eam ad aliquot genera praecipua reuocari conueniet. Primum ergo genus complectatur eas formulas, quae ex ipſis quantitatibus x et y earumque deriuatis $p = \frac{dy}{dx}$; $q = \frac{dp}{dx}$; $r = \frac{dq}{dx}$ etc. vtcunque ſunt compoſitae, ita tamen, vt nullas formulas integrales inuoluant. Ad ſecundum genus refero eas formulas, quae integralia huiusmodi $\int Z\,dx$ contineant, ita tamen, vt ipſa

ipſa formula Z ad primum genus pertineat. Tertium genus comprehendet eiusmodi formulas, in quibus non ſolum integralia $\int Z\,dx$ inſunt, ſed vbi quantitas Z ipſa inſuper integralia inuoluit. Tandem ſequetur quartum genus, in quo formula varianda V non abſolute, ſed demum per aequationem differentialem, vel primi, vel adeo altioris gradus, definitur, quod genus vtique latiſſime patet, ac praecedentia omnia in ſe complectitur. Quod autem ad aequationem, qua relatio inter x et y exprimitur, attinet, etſi eam vt datam ſpecto, tamen non definio, ne praecepta tradenda vllo modo limitentur.

Theorema 1.

26. Variatio differentialis cuiusuis quantitatis V aequalis eſt differentiali variationis eiusdem, ſeu eſt $\delta d V = d\delta V$.

Demonſtratio.

Cum ſit $dV = V' - V$ denotante V' valorem ſequentem ipſius V, qui ipſi $x + dx$ conuenit, vti V ipſi x reſpondet, erit $\delta dV = \delta V' - \delta V$; verum $d\delta V$ exprimit differentiam inter δV eiusque valorem ſequentem, qui eſt $\delta V'$, ita vt ſit $d\delta V = \delta V' - \delta V$, vnde perſpicuum eſt, eſſe $\delta dV = d\delta V$.

Coroll. 1.

27. Eodem modo, ſi loco V ſcribamus dV, patet eſſe $\delta ddV = d\delta dV$; ſed $\delta dV = d\delta V$, vnde fit $d\delta dV = dd\delta V$, ſicque aequales inter ſe erunt hae tres formae:

$$\delta ddV = d\delta dV = dd\delta V.$$

Coroll.

Coroll. 2.

28. Porro vero ſi et hic pro V ſcribamus dV, obtinebimus aequalitatem inter has quatuor formas:

$$\delta dddV = d\delta ddV = dd\delta dV = ddd\delta V$$

tum vero inter has quinque:

$$\delta d^4V = d\delta d^3V = d^2\delta d^2V = d^3\delta dV = d^4\delta V.$$

Coroll. 3.

29. Si habeatur differentiale cuiuscunque ordinis ipſius V, nempe d^nV, cuius variatio ſit inueſtiganda, erit:

$$\delta d^nV = d^m\delta d^{n-m}V = d^n\delta V$$

aequatur ſcilicet differentiali ordinis n ipſius variationis δV. Hinc ergo reducitur variatio differentialium ad differentiationem variationis.

Problema 1.

30. Determinare variationes quantitatum p, q, r, s etc. rationem differentialium ipſarum x et y in ſe continentium.

Solutio.

Quia variatio non ad x pertinere cenſetur, erit $\delta x = 0$, et variatio ipſius y, nempe δy, tanquam cognita ſpectatur. Hinc cum ſit $p = \frac{dy}{dx}$, erit $\delta p = \frac{\delta dy}{dx} = \frac{d\delta y}{dx}$. Deinde ob $q = \frac{dp}{dx}$ erit $\delta q = \frac{\delta dp}{dx} = \frac{d\delta p}{dx}$; ſumto autem elemento dx conſtante, eſt $d\delta p = \frac{dd\delta y}{dx}$, hincque $\delta q = \frac{dd\delta y}{dx^2}$; et $d\delta q = \frac{d^3dy}{dx^2}$. Porro autem cum ſit $r = \frac{dq}{dx}$, erit $\delta r = \frac{\delta dq}{dx} = \frac{d\delta q}{dx}$, ideoque $\delta r = \frac{d^3\delta y}{dx^3}$, vnde variationes quanti-

quantitatum ex x et y deriuatarum p, q, r, s, etc. ita ſe habebunt:

$$\delta p = \frac{d\delta y}{dx};\ \delta q = \frac{d^2\delta y}{dx^2};\ \delta r = \frac{d^3\delta y}{dx^3};\ \delta s = \frac{d^4\delta y}{dx^4};\ \text{etc.}$$

ſi quidem elementum dx pro conſtante aſſumatur.

Coroll. 1.

31. Haec differentialia primi altiorumque graduum variationis δy determinantur per variationes valorum ipſius y, qui conueniunt ſequentibus valoribus ipſius x, ſcilicet $x + dx$; $x + 2dx$; $x + 3dx$; etc. Si enim ſequentes valores ipſius y ita exhibeantur: y', y''; y''', y'''' etc. eorumque variationes ita: $\delta y'$; $\delta y''$; $\delta y'''$; $\delta y''''$ ex natura differentialium nouimus eſſe:

$$d\delta y = \delta y' - \delta y;\ dd\delta y = \delta y'' - 2\delta y' + \delta y;$$
$$d^3\delta y = \delta y''' - 3\delta y'' + 3\delta y' - \delta y \text{ etc.}$$

Coroll. 2.

32. Si ergo ſolus valor y variationem pateretur, ſequentes vero y', y'', y''' nulli eſſent obnoxiae, vt eſſet $\delta y' = 0$, $\delta y'' = 0$, $\delta y''' = 0$ etc. foret

$$d\delta y = -\delta y;\ dd\delta y = +\delta y;\ d^3\delta y = -\delta y;\ d^4\delta y = +\delta y \text{ etc.}$$

ideoque:

$$\delta p = -\frac{\delta y}{dx};\ \delta q = +\frac{\delta y}{dx^2};\ \delta r = -\frac{\delta y}{dx^3};\ \delta s = +\frac{\delta y}{dx^4} \text{ etc.}$$

Problema 2.

33. Si V fuerit quantitas quomodocunque ex variabilibus x et y earumque differentialibus cuiuscunque

 ordinis

ordinis conflata, ſeu ſi fuerit functio quaecunque quantitatum x, y, p, q, r, s etc. determinare eius variationem δV.

Solutio.

Differentietur more conſueto haec functio V, prodeatque

$dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + S\,ds +$ etc.

quod differentiale nil aliud eſt, niſi incrementum quod functio V capit, ſi loco quantitatum x, y, p, q, r, s etc. ſubſtituantur iſtae $x+dx$; $y+dy$; $p+dp$; $q+dq$; $r+dr$ etc. Simili ergo modo ſi pro x, y, p, q, r, s etc. ſubſtituantur:

$x+o$; $y+\delta y$; $p+\delta p$, $q+\delta q$, $r+\delta r$, $s+\delta s$ etc.

incrementum, quod inde functio V capit, erit eius variatio:

$$\delta V = N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + S\delta s + \text{etc.}$$

Quare, ſi pro δp, δq, δr etc. valores ſupra inuentis ſcribantur, prodibit variatio quaeſita:

$$\delta V = N\delta y + \frac{P\,d\,\delta y}{dx} + \frac{Q\,dd\,\delta y}{dx^2} + \frac{R\,d^3\,\delta y}{dx^3} + \frac{S\,d^4\,\delta y}{dx^4} \text{ etc.}$$

Theorema 2.

34. Propoſita formula integrali quacunque $\int Z\,dx$ eius variatio aequalis eſt integrali variationis differentialis $Z\,dx$, ſeu erit $\delta\int Z\,dx = \int \delta Z\,dx$.

Demonſtratio.

Cum $\int Z\,dx$ exprimat ſummam omnium $Z\,dx$, eius variatio $\delta\int Z\,dx$ comprehendet ſummam omnium varia-

variationum ipſius Zdx, ſeu erit $\delta\int Zdx = \int\delta Zdx$. Quod etiam hoc modo diſtinctius oſtendi poteſt: ſit $\int Zdx = V$, ita vt definiri oporteat δV; cum igitur ſit $dV = Zdx$, erit $\delta dV = \delta Zdx = d\delta V$; vnde ſumtis integralibus fiet $\delta V = \int\delta Zdx$.

Problema 3.

35. Propoſita formula integrali $\int Zdx$, in qua Z quantitas quomodocunque ex ipſis x et y, earumque differentialibus cuiuscunque ordinis conflata, inueſtigare eius variationem $\delta\int Zdx$.

Solutio.

Cum ergo Z ſit functio ipſarum x, y, p, q, r, s etc. eius differentiale more conſueto ſumtum huiusmodi formam habebit:

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + Sds \text{ etc.}$$

vnde eiusdem quantitatis Z variatio erit:

$$\delta Z = N\delta y + \frac{Pd\delta y}{dx} + \frac{Qdd\delta y}{dx^2} + \frac{Rd^3\delta y}{dx^3} + \frac{Sd^4\delta y}{dx^4} \text{ etc.}$$

Cum nunc ſit $\delta\int Zdx = \int\delta Zdx$, erit:

$$\delta\int Zdx = \int N\delta y dx + \int Pd\delta y + \int\frac{Qdd\delta y}{dx} + \int\frac{Rd^3\delta y}{dx^2} + \text{etc.}$$

ne iam in vlteriori reductione expreſſio δy turbet, ponamus tantisper $\delta y = \omega$, et reductiones ita ſe habebunt:

$$\int Pd\omega = P\omega - \int\omega dP$$

$$\int\frac{Qdd\omega}{dx} = \frac{Qd\omega}{dx} - \int\frac{dQ}{dx}d\omega = \frac{Qd\omega}{dx} - \frac{\omega dQ}{dx} + \int\frac{\omega ddQ}{dx}$$

$$\int\frac{Rd^3\omega}{dx^2} = \frac{Rdd\omega}{dx^2} - \frac{dRd\omega}{dx^2} + \frac{\omega ddR}{dx^2} - \int\frac{\omega d^3R}{dx^2}$$

etc.

 Colli-

Colligantur omnes iſti valores, et pro ω reſtituatur δy, ſicque obtinebitur:

$$\delta\int Z dx = \int \delta y dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \delta y \left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \frac{d^3S}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{d\delta y}{dx}\left(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{dd\delta y}{dx^2}\left(R - \frac{dS}{dx} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{d^3\delta y}{dx^3}(S - \text{etc.})$$

in qua expreſſione differentiale dx ſumtum eſt conſtans.

Coroll. 1.

36. Conſtat ergo variatio formulae integralis $\int Z dx$ ex parte integrali $\int \delta y dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.}\right)$ et partibus abſolutis, quae praeter ipſam variationem δy etiam eius differentialia $d\delta y$, $dd\delta y$, $d^3\delta y$ etc. complectuntur.

Coroll. 2.

37. Partem autem integralem per reductiones adhibitas ita inſtruximus, vt tantum ipſam variationem δy complecteretur, ab eiusque differentialibus immunis exhiberetur, quae forma in applicatione calculi variationum maximam praeſtat vtilitatem.

Problema 4.

38. Si in formula integrali $\int Z dx$, quantitas Z non ſolum litteras x et y cum relationibus differentialium p, q, r, s etc. ſed etiam formulam integralem $\Pi = \int \mathfrak{Z} dx$ vtcun-

vtcunque complectatur, in qua autem ſit $\mathfrak{Z}$ functio ipſarum x, y, p, q, r, s etc. definire variationem formulae illius integralis $\int Z\,dx$.

Solutio.

Cum quantitas Z praeter quantitates x, y, p, q, r, s etc. etiam formulam integralem $\Pi = \int \mathfrak{Z}\,dx$ involuat, ſpectari poterit tanquam functio quantitatum Π, x, y, p, q, r, s etc. vnde ſi more ſolito differentietur, prodibit talis forma:

$$dZ = L\,d\Pi + M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + S\,ds \text{ etc.}$$

vnde colligitur variatio ipſius Z:

$$\delta Z = L\,\delta\Pi + N\,\delta y + P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + S\,\delta s + \text{etc.}$$

Cum deinde ſit $\mathfrak{Z}$ functio ipſarum x, y, p, q, r, s etc. ponatur:

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{M}\,dx + \mathfrak{N}\,dy + \mathfrak{P}\,dp + \mathfrak{Q}\,dq + \mathfrak{R}\,dr + \mathfrak{S}\,ds + \text{etc.}$$

atque ex praecedente problemate erit $\delta\Pi$, ſeu

$$\begin{aligned}\delta\int\mathfrak{Z}\,dx = \int\delta y\,dx\Big(\mathfrak{N} - \tfrac{d\mathfrak{P}}{dx} + \tfrac{dd\mathfrak{Q}}{dx^2} - \tfrac{d^3\mathfrak{R}}{dx^3} + \tfrac{d^4\mathfrak{S}}{dx^4} - \text{etc.}\Big)\\ + \delta y\Big(\mathfrak{P} - \tfrac{d\mathfrak{Q}}{dx} + \tfrac{dd\mathfrak{R}}{dx^2} - \tfrac{d^3\mathfrak{S}}{dx^3} + \text{etc.}\Big)\\ + \tfrac{d\delta y}{dx}\Big(\mathfrak{Q} - \tfrac{d\mathfrak{R}}{dx} + \tfrac{dd\mathfrak{S}}{dx^2} - \text{etc.}\Big)\\ + \tfrac{dd\delta y}{dx^2}\Big(\mathfrak{R} - \tfrac{d\mathfrak{S}}{dx} + \text{etc.}\Big)\\ + \tfrac{d^3\delta y}{dx^3}\big(\mathfrak{S} - \text{etc.}\big)\end{aligned}$$

Vel ſumatur potius prior forma:

$$\delta\int\mathfrak{Z}\,dx = \int\mathfrak{N}\,\delta y\,dx + \int\mathfrak{P}\,d\delta y + \int\frac{\mathfrak{Q}\,dd\delta y}{dx} + \int\frac{\mathfrak{R}\,d^3\delta y}{dx^2} + \int\frac{\mathfrak{S}\,d^4\delta y}{dx^3} + \text{etc.}$$

 eritque

eritque ob $\delta \Pi = \delta \int \mathfrak{Z} dx$:

$$\delta Z = \mathfrak{L}\int \mathfrak{N}\delta y dx + \mathfrak{L}\int \mathfrak{P} d\delta y + \mathfrak{L}\int \frac{\mathfrak{Q} dd\delta y}{dx} + \mathfrak{L}\int \frac{\mathfrak{R} d^3\delta y}{dx^2} + \mathfrak{L}\int \frac{\mathfrak{S} d^4\delta y}{dx^3} + \text{etc.}$$
$$+ N\delta y + \frac{P d\delta y}{dx} + \frac{Q dd\delta y}{dx^2} + \frac{R d^3\delta y}{dx^3} + \frac{S d^4\delta y}{dx^4}.$$

Cum igitur ſit $\delta\int Z dx = \int \delta Z dx$, habebimus:

$$\delta\int Z dx = \int \mathfrak{L} dx \int \mathfrak{N}\delta y dx + \int \mathfrak{L} dx \int \mathfrak{P} d\delta y + \int \mathfrak{L} dx \int \frac{\mathfrak{Q} dd\delta y}{dx} + \int \mathfrak{L} dx \int \frac{\mathfrak{R} d^3\delta y}{dx^2} + \text{etc.}$$
$$+ \int N\delta y dx + \int P d\delta y + \int \frac{Q dd\delta y}{dx} + \int \frac{R d^3\delta y}{dx^2} + \text{etc.}$$

Ponatur $\int \mathfrak{L} dx = W$, ſeu $\mathfrak{L} dx = dW$, et ob

$$\int \mathfrak{L} dx \int \mathfrak{N}\delta y dx = W\int \mathfrak{N}\delta y dx - \int \mathfrak{N} W \delta y dx$$
$$\int \mathfrak{L} dx \int \mathfrak{P} d\delta y = W\int \mathfrak{P} d\delta y - \int \mathfrak{P} W d\delta y$$
$$\int \mathfrak{L} dx \int \frac{\mathfrak{Q} dd\delta y}{dx} = W\int \frac{\mathfrak{Q} dd\delta y}{dx} - \int \frac{\mathfrak{Q} W dd\delta y}{dx}$$

obtinebimus:

$$\delta\int Z dx = W\int \mathfrak{N}\delta y dx + W\int \mathfrak{P} d\delta y + W\int \frac{\mathfrak{Q} dd\delta y}{dx} + W\int \frac{\mathfrak{R} d^3\delta y}{dx^2} + \text{etc.}$$
$$+ \int (N - \mathfrak{N}W)\delta y dx + \int (P - \mathfrak{P}W) d\delta y$$
$$+ \int (Q - \mathfrak{Q}W)\frac{dd\delta y}{dx} + \int (R - \mathfrak{R}W)\frac{d^3\delta y}{dx^2} + \text{etc.}$$

Hae formulae eodem modo vt ſupra reductae dabunt:

$$\delta\int Z dx = W\int \delta y dx \left(\mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{dd\mathfrak{Q}}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{R}}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+ W\delta y \left(\mathfrak{P} - \frac{d\mathfrak{Q}}{dx} + \frac{dd\mathfrak{R}}{dx^2} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{W d\delta y}{dx}\left(\mathfrak{Q} - \frac{d\mathfrak{R}}{dx} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{W dd\delta y}{dx^2}\left(\mathfrak{R} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \int \delta y dx \left((N - \mathfrak{N}W) - \frac{d(P - \mathfrak{P}W)}{dx} + \frac{dd(Q - \mathfrak{Q}W)}{dx^2} - \frac{d^3(R - \mathfrak{R}W)}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \delta y \left((P - \mathfrak{P}W) - \frac{d(Q - \mathfrak{Q}W)}{dx} - \frac{dd(R - \mathfrak{R}W)}{dx^2} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{d\delta y}{dx}\left((Q - \mathfrak{Q}W) - \frac{d(R - \mathfrak{R}W)}{dx} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{dd\delta y}{dx^2}\left((R - \mathfrak{R}W) - \text{etc.}\right)$$

Coroll.

Coroll. 1.

39. Quia reductiones adhibitae quouis caſu facile expediri poſſunt, iis praetermiſſis variatio quaeſita hoc modo ſuccinctius exhibitur, poſito $W = \int L dx$:

$$\delta \int Z dx = W \int dx (\mathfrak{N} \delta y + \frac{\mathfrak{P} d \delta y}{dx} + \frac{\mathfrak{Q} dd\delta y}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R} d^3 \delta y}{dx^3} + \text{etc})$$
$$+ \int dx ((N - \mathfrak{N} W) \delta y + (P - \mathfrak{P} W) \frac{d \delta y}{dx} + (Q - \mathfrak{Q} W) \frac{dd\delta y}{dx^2}$$
$$+ (R - \mathfrak{R} W) \frac{d^3 \delta y}{dx^3} + \text{etc.})$$

Coroll. 2.

40. Ac ſi quantitas Z inuoluat inſuper aliam formulam integralem $\Pi' = \int \mathfrak{Z}' dx$, vt ſit:

$$dZ = L d\Pi + L' d\Pi' + M dx + N dy + P dp + Q dq + \text{etc.}$$

tum vero:

$$d\mathfrak{Z}' = \mathfrak{M}' dx + \mathfrak{N}' dy + \mathfrak{P}' dp + \mathfrak{Q}' dq + \mathfrak{R}' dr + \text{etc.}$$

Si ponatur $\int L dx = W$, $\int L' dx = W'$, inſuperque ad abbreuiandum:

$$N - \mathfrak{N} W - \mathfrak{N}' W' = (N); \quad P - \mathfrak{P} W - \mathfrak{P}' W' = (P)$$
$$Q - \mathfrak{Q} W - \mathfrak{Q}' W' = (Q); \; R - \mathfrak{R} W - \mathfrak{R}' W' = (R) \text{ etc.}$$

erit variatio quaeſita:

$$\delta \int Z dx = W \int dx (\mathfrak{N} \delta y + \mathfrak{P} \frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q} \frac{dd\delta y}{dx^2} + \mathfrak{R} \frac{d^3 \delta y}{dx^3} + \text{etc.})$$
$$+ W' \int dx (\mathfrak{N}' \delta y + \mathfrak{P}' \frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}' \frac{dd\delta y}{dx^2} + \mathfrak{R}' \frac{d^3 \delta y}{dx^3} + \text{etc.})$$
$$+ \int dx ((N) \delta y + (P) \frac{d\delta y}{dx} + (Q) \frac{dd\delta y}{dx^2} + (R) \frac{d^3 \delta y}{dx^3} + \text{etc.})$$

Problema 5.

41. Si in formula $\int Z dx$ quantitas Z praeter litteras x, y, p, q, r etc. inuoluat formulam integralem

lem $\Pi = \int \mathfrak{Z}\, dx$, in qua quantitas $\mathfrak{Z}$ praeter litteras x, y, p, q, r etc. inſuper complectatur formulam integralem $\pi = \int \mathfrak{z}\, dx$, vbi $\mathfrak{z}$ autem ſit functio ſolarum litterarum x, y, p, q, r etc. inuenire variationem formulae $\int Z\, dx$.

Solutio.

Cum Z ſit functio quantitatum x, y, p, q, r etc. et $\Pi = \int \mathfrak{Z}\, dx$, eius differentiale more conſueto ſumtum erit huius formae:

$$dZ = L\, d\Pi + M\, dx + N\, dy + P\, dp + Q\, dq + R\, dr + \text{etc.}$$

ideoqne eius variatio

$$\delta Z = L\, \delta\Pi + N\, \delta y + P \frac{d\,\delta y}{dx} + Q \frac{dd\,\delta y}{dx^2} + R \frac{d^3\,\delta y}{dx^3} + \text{etc.}$$

vnde variatio quaeſita erit $\delta \int Z\, dx = \int \delta Z\, dx =$

$$\int L\, dx\, \delta\Pi + \int dx \left(N\, \delta y + P \frac{d\,\delta y}{dx} + Q \frac{dd\,\delta y}{dx^2} + R \frac{d^3\,\delta y}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$

At cum ſit $\mathfrak{Z}$ functio quantitatum x, y, p, q, r etc. et $\pi = \int \mathfrak{z}\, dx$, erit differentiando:

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{L}\, d\pi + \mathfrak{M}\, dx + \mathfrak{N}\, dy + \mathfrak{P}\, dp + \mathfrak{Q}\, dq + \mathfrak{R}\, dr + \text{etc.}$$

hincque variatio eius

$$\delta \mathfrak{Z} = \mathfrak{L}\, \delta\pi + \mathfrak{N}\, \delta y + \mathfrak{P} \frac{d\,\delta y}{dx} + \mathfrak{Q} \frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \mathfrak{R} \frac{d^3\,\delta y}{dx^3} + \text{etc.}$$

quare cum ſit $\Pi = \int \mathfrak{Z}\, dx$, erit $\delta\Pi = \delta \int \mathfrak{Z}\, dx = \int \delta \mathfrak{Z}\, dx$, ac propterea:

$$\delta\Pi = \int \mathfrak{L}\, dx\, \delta\pi + \int dx \left(\mathfrak{N}\, \delta y + \mathfrak{P} \frac{d\,\delta y}{dx} + \mathfrak{Q} \frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \mathfrak{R} \frac{d^3\,\delta y}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$

vnde reperitur:

$$\int L\, dx\, \delta\Pi = \int L\, dx \int \mathfrak{L}\, dx\, \delta\pi + \int L\, dx \int dx \left(\mathfrak{N}\, \delta y + \mathfrak{P} \frac{d\,\delta y}{dx} + \mathfrak{Q} \frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \text{etc.}\right)$$

Supereſt

Supereſt ergo vt definiamus $\delta\pi$, eſt autem $\pi = \int \mathfrak{z}\, dx$, et quia $\mathfrak{z}$ eſt functio litterarum x, y, p, q, r etc. tantum, fiat differentiando:

$$d\mathfrak{z} = \mathfrak{m}\, dx + \mathfrak{n}\, dy + \mathfrak{p}\, dp + \mathfrak{q}\, dq + \mathfrak{r}\, dr + \text{etc.}$$

ex quo concluditur eius variatio:

$$\delta\mathfrak{z} = \mathfrak{n}\,\delta y + \mathfrak{p}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \mathfrak{r}\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.}$$

tum vero, ob $\delta\pi = \delta\int\mathfrak{z}\, dx = \int\delta\mathfrak{z}\, dx$, erit:

$$\delta\pi = \int dx\left(\mathfrak{n}\,\delta y + \mathfrak{p}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \mathfrak{r}\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$

Quamobrem habebimus $\int L\, dx \int \mathfrak{L}\, dx\, \delta\pi =$

$$\int L\, dx \int \mathfrak{L}\, dx \int dx\left(\mathfrak{n}\,\delta y + \mathfrak{p}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \mathfrak{r}\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$

Vt iam hanc formulam a ſignis integralibus multiplicatis liberemus, ponamus $\int L\, dx = W$, eritque:

$$\int L\, dx\,\delta\Pi = W\delta\Pi - \int W\, d\delta\Pi,$$

verum $d\delta\Pi = \delta\mathfrak{Z}\, dx$, vnde $\int L\, dx\,\delta\Pi = W\delta\Pi - \int W\delta\mathfrak{Z}\, dx$ ideoque:

$$\int L\, dx\,\delta\Pi = W\int\mathfrak{L}\, dx\,\delta\pi + W\int dx\left(\mathfrak{N}\,\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.}\right)$$
$$- \int\mathfrak{L}\, W\, dx\,\delta\pi \quad \int W\, dx\left(\mathfrak{N}\,\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.}\right)$$

ſit $\int\mathfrak{L}\, dx = \mathfrak{W}$, erit $\int\mathfrak{L}\, dx\,\delta\pi = \mathfrak{W}\delta\pi - \int\mathfrak{W}\,\delta\mathfrak{z}\, x$ hincque:

$$\int\mathfrak{L}\, dx\,\delta\pi = \mathfrak{W}\int dx\left(\mathfrak{n}\,\delta y + \mathfrak{p}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \mathfrak{r}\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$
$$- \int\mathfrak{W}\, dx\left(\mathfrak{n}\,\delta y + \mathfrak{p}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \mathfrak{r}\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$

Porro ponatur $\int\mathfrak{L}\, W\, dx = \int W\, d\mathfrak{W} = \mathfrak{V}$, vt ſit:

$$\int\mathfrak{L}\, W\, dx\,\delta\pi = \mathfrak{V}\int dx\left(\mathfrak{n}\,\delta y + \mathfrak{p}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \mathfrak{r}\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$
$$- \int\mathfrak{V}\, dx\left(\mathfrak{n}\,\delta y + \mathfrak{p}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \mathfrak{r}\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$

Ex his omnibus colligetur variatio quaeſita $\delta\int Z dx =$

$$(W\mathfrak{W}-\mathfrak{V})\int dx(\mathfrak{n}\delta y+\mathfrak{p}\frac{d\delta y}{dx}+\mathfrak{q}\frac{dd\delta y}{dx^2}+\text{etc.})$$
$$-W\int\mathfrak{W}dx(\mathfrak{n}\delta y+\mathfrak{p}\frac{d\delta y}{dx}+\mathfrak{q}\frac{dd\delta y}{dx^2}+\text{etc.})$$
$$+\int\mathfrak{V}dx(\mathfrak{n}\delta y+\mathfrak{p}\frac{d\delta y}{dx}+\mathfrak{q}\frac{dd\delta y}{dx^2}+\text{etc.})$$
$$+W\int dx(\mathfrak{N}\delta y+\mathfrak{P}\frac{d\delta y}{dx}+\mathfrak{Q}\frac{dd\delta y}{dx^2}+\text{etc.})$$
$$-\int W dx(\mathfrak{N}\delta y+\mathfrak{P}\frac{d\delta y}{dx}+\mathfrak{Q}\frac{dd\delta y}{dx^2}+\text{etc.})$$
$$+\int dx(N\delta y+P\frac{d\delta y}{dx}+Q\frac{dd\delta y}{dx^2}+\text{etc.})$$

Coroll. 1.

42. Si quaeratur variatio formulae $\int Z dx$ a valore $x=0$ vsque ad valorem determinatum $x=a$, ſumantur integralia $W=\int L dx$, $\mathfrak{W}=\int\mathfrak{L}dx$ et $\mathfrak{V}=\int W d\mathfrak{W}$, ita vt euaneſcant poſito $x=0$, tum vero facto $x=a$ fiat $W=A$, $\mathfrak{W}=\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{V}=\mathfrak{B}$, quos valores in formula inuenta loco litterarum W, $\mathfrak{W}$ et $\mathfrak{V}$, vbi extra ſignum integrale occurrunt, ponere licebit.

Coroll. 2.

43. Ponatur ergo ad abbreuiandum:

$$N+(A-W)\mathfrak{N}+(A\mathfrak{A}-\mathfrak{B}-A\mathfrak{W}+\mathfrak{V})\mathfrak{n}=(N)$$
$$P+(A-W)\mathfrak{P}+(A\mathfrak{A}-\mathfrak{B}-A\mathfrak{W}+\mathfrak{V})\mathfrak{p}=(P)$$
$$Q+(A-W)\mathfrak{Q}+(A\mathfrak{A}-\mathfrak{B}-A\mathfrak{W}+\mathfrak{V})\mathfrak{q}=(Q)$$
$$R+(A-W)\mathfrak{R}+(A\mathfrak{A}-\mathfrak{B}-A\mathfrak{W}+\mathfrak{V})\mathfrak{r}=(R)$$

etc.

et variatio quaeſita formulae $\int Z dx$ vsque ad valorem determinatum $x=a$ erit:

$$\int dx((N)\delta y+(P)\frac{d\delta y}{dx}+(Q)\frac{dd\delta y}{dx^2}+(R)\frac{d^3\delta y}{dx^3}+\text{etc.})$$

Coroll.

Coroll. 3.

44. Quodſi iam hic reductiones ſuperiores adhibeantur, reperietur eadem variatio ita expreſſa:

$$\delta\int Z\,dx = \int dx\,\delta y\left((N) - \frac{d(P)}{dx} + \frac{dd(Q)}{dx^2} - \frac{d^3(R)}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \delta y\left((P) - \frac{d(Q)}{dx} + \frac{dd(R)}{dx^2} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{d\delta y}{dx}\left((Q) - \frac{d(R)}{dx} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{dd\delta y}{dx^2}\left((R) - \text{etc.}\right)$$

Coroll. 4.

45. Cum ſit $\mathfrak{V} = \int W\,d\mathfrak{W}$, erit $A\mathfrak{W} - \mathfrak{V} = \int (A-W)\mathfrak{L}dx$; quare ſi ponatur integrale $\int (A-W)\mathfrak{L}dx = X$, ita ſumtum, vt euaneſcat, poſito $x = 0$, tum vero facto $x = a$, fiat $X = B$, ita vt ſit:

$\int \mathfrak{L}dx = W$, et poſito $x = a$, fiat $W = A$,
$\int (A-W)\mathfrak{L}dx = X$, et poſito $x = a$, fiat $X = B$

ſuperiores valores Coroll. 2. exhibiti ita ſe habebunt:

$$N + (A-W)\mathfrak{N} + (B-X)\mathfrak{n} = (N)$$
$$P + (A-W)\mathfrak{P} + (B-X)\mathfrak{p} = (P)$$
$$Q + (A-W)\mathfrak{Q} + (B-X)\mathfrak{q} = (Q)$$
$$R + (A-W)\mathfrak{R} + (B-X)\mathfrak{r} = (R)$$
etc.

Problema 6.

46. Si in formula integrali $\Phi = \int Z\,dx$, quantitas Z praeter litteras x, y, p, q, r etc. etiam ipſam formulam integralem Φ inuoluat, determinare eius variationem $\delta\Phi = \delta\int Z\,dx$.

 Solutio.

Solutio.

Cum Z ſit functio quantitatum x, y, p, q, r etc. inſuperque ipſam formulam integralem $\Phi = \int Z dx$ inuoluat, differentietur more ſolito ac prodeat

$$dZ = L d\Phi + M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \text{etc.}$$

Hinc igitur erit variatio ipſius Z ſcilicet:

$$\delta Z = L \delta \Phi + N \delta y + P \frac{d \delta y}{dx} + Q \frac{dd \delta y}{dx^2} + R \frac{d^3 \delta y}{dx^3} + \text{etc.}$$

ideoque ob $\delta \Phi = \delta \int Z dx = \int \delta Z dx$

$$\delta \Phi = \int L dx \delta \Phi + \int dx \left(N \delta y + P \frac{d \delta y}{dx} + Q \frac{dd \delta y}{dx^2} + R \frac{d^3 \delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right)$$

Ponamus $\delta \Phi = z$, cum ſit id ipſum quod quaeritur, et breuitatis gratia $\int dx \left(N dy + P \frac{d \delta y}{dx} + Q \frac{dd \delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right) = u$, vt habeatur $z = \int L z dx + u$, et differentiando:

$$dz = L z dx + du, \text{ eritque integrando}$$

$$z = e^{\int L dx} \int e^{-\int L dx} du;$$

ſtatuatur breuitatis gratia $\int L dx = W$, et habebitur variatio quaeſita:

$$\delta \int Z dx = e^{W} \int e^{-W} dx \left(N \delta y + P \frac{d \delta y}{dx} + Q \frac{dd \delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right)$$

ſi deſideretur variatio vsque ad datum terminum $x = a$, fiatque tum $W = A$; ponatur ad abbreuiandum.

$$e^{A-W} N = (N); \; e^{A-W} P = (P); \; e^{A-W} Q = (Q) \text{ etc.}$$

eritque reductionibus vt ſupra factis variatio:

$$\delta \int Z dx = \int dx \delta y \left((N) - \frac{d(P)}{dx} + \frac{dd(Q)}{dx^2} - \frac{d^3(R)}{dx^3} + \text{etc.} \right)$$
$$+ \delta y \left((P) - \frac{d(Q)}{dx} + \frac{dd(R)}{dx^2} - \text{etc.} \right)$$
$$+ \frac{d \delta y}{dx} \left((Q) - \frac{d(R)}{dx} + \text{etc.} \right)$$
$$+ \frac{dd \delta y}{dx^2} \left((R) - \text{etc.} \right)$$

Coroſ-

Corollarium.

47. Si ergo quantitas varianda Φ definiatur per hanc aequationem differentialem $d\Phi = Z dx$, in qua Z inuoluat vtcunque ipſam quantitatem Φ et inſuper litteras x, y, p, q, r etc. eius variatio $\delta\Phi$ per hoc problema aſſignari poterit.

Problema 7.

48. Si in formula integrali $\Phi = \int Z dx$ quantitas Z praeter litteras x, y, p, q, r etc. non ſolum ipſam quantitatem Φ, ſed inſuper adhuc aliam formulam integralem $\Pi = \int \mathfrak{Z} dx$ quomodocunque implicet, in qua autem quantitas $\mathfrak{Z}$ tantum per litteras x, y, p, q, r etc. detur; inueſtigare variationem huius formulae $\delta\Phi = \delta\int Z dx = \int \delta Z dx$.

Solutio.

Cum Z ſit functio quantitatum x, y, p, q, r etc. inſuperque formularum $\Phi = \int Z dx$, et $\Pi = \int \mathfrak{Z} dx$, praebeat ea differentiando:

$$dZ = K d\Phi + L d\Pi + M dx + N dy + P dp + Q dq + \text{etc.}$$

vnde eius variatio erit:

$$\delta Z = K\delta\Phi + L\delta\Pi + N\delta y + P\frac{d\delta y}{dx} + Q\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.}$$

Porro autem cum $\mathfrak{Z}$ ſit functio litterarum x, y, p, q, r etc. tantum ponatur:

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{M} dx + \mathfrak{N} dy + \mathfrak{P} dp + \mathfrak{Q} dq + \mathfrak{R} dr + \text{etc.}$$

eritque ob $\delta\Pi = \int \delta \mathfrak{Z} dx$

$$\delta\Pi = \int dx \left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \mathfrak{R}\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$

Ponatur vt ante $\delta\Phi = z$ et $L\delta\Pi + N\delta y + P\frac{d\delta y}{dx} + Q\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.} = u$; ob $\delta\Phi = \int\delta Z dx = z$ erit $\delta Z = \frac{dz}{dx}$ ideoque $\frac{dz}{dx} = Kz + u$; vnde oritur

$$z = e^{\int K dx}\int e^{-\int K dx} u dx = \delta\Phi$$

ſit $\int K dx = V$, eritque

$$e^{-\int K dx} u dx = e^{-V}\mathfrak{L} dx \int dx(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.})$$
$$+ e^{-V} dx(N\delta y + P\frac{d\delta y}{dx} + Q\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.})$$

ſtatuatur porro $\int e^{-V} L dx = W$, eritque integrando variatio quaeſita:

$$\delta\Phi = e^{V} W \int dx(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.})$$
$$- e^{V}\int W dx(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.})$$
$$+ e^{V}\int e^{-V} dx(N\delta y + P\frac{d\delta y}{dx} + Q\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.})$$

Si variatio vsque ad datum terminum $x = a$ deſideretur, ac poſito $x = a$, fiat $V = A$ et $W = B$, tum ſtatuatur breuitatis gratia:

$$e^{A-V}N + e^{A}(B-W)\mathfrak{N} = (N)$$
$$e^{A-V}P + e^{A}(B-W)\mathfrak{P} = (P)$$
$$e^{A-V}Q + e^{A}(B-W)\mathfrak{Q} = (Q)$$
$$e^{A-V}R + e^{A}(B-W)\mathfrak{R} = (R)$$
etc.

quo facto erit variatio formulae $\Phi = \int Z dx$ vsque ad terminum $x = a$ extenſa:

$$\delta\Phi = \int dx\,\delta y((N) - \frac{d(P)}{dx} + \frac{dd(Q)}{dx^2} - \frac{d^3(R)}{dx^3} + \text{etc.}$$
$$+ \delta y((P) - \frac{d(Q)}{dx} + \frac{dd(R)}{dx^2} - \text{etc.})$$
$$+ \frac{d\delta y}{dx}((Q) - \frac{d(R)}{dx} + \text{etc.})$$
$$+ \frac{dd\delta y}{dx^2}((R) - \text{etc.})$$

Corol-

Corollarium.

49. Sic ergo variatio definitur quantitatis Φ per aequationem differentialem $d\Phi = Z\,dx$ datae, in qua Z non ſolum praeter litteras x, y, p, q, r etc. ipſam Φ, ſed inſuper formulam integralem $\int \mathfrak{Z}\,dx = \Pi$ vtcunque inuoluit, dummodo $\mathfrak{Z}$ per ſolas litteras x, y, p, q, r etc. determinetur.

Problema 8.

50. Si in formula integrali $\Phi = \int Z\,dx$ quantitas Z praeter litteras x, y, p, q, r etc. formulam integralem $\Pi = \int \mathfrak{Z}\,dx$ inuoluat, hic autem quantitas $\mathfrak{Z}$ praeter litteras x, y, p, q, r etc. ipſam formulam integralem $\Pi = \int \mathfrak{Z}\,dx$ contineat, definire variationem formulae propoſitae $\Phi = \int Z\,dx$.

Solutio.

Cum Z ſit functio quantitatum x, y, p, q, r etc. et ipſius $\Pi = \int \mathfrak{Z}\,dx$, eius differentiale erit huiusmodi:

$$dZ = L\,d\Pi + M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \text{etc.}$$

hinc eius variatio erit

$$\delta Z = L\,\delta\Pi + N\,\delta y + P\frac{d\,\delta y}{dx} + Q\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + R\frac{d^3\,\delta y}{dx^3} + \text{etc.}$$

ex quo ob $\delta\Phi = \int \delta Z\,dx$ habebitur:

$$\delta\Phi = \int L\,dx\,\delta\Pi + \int dx\left(N\,\delta y + P\frac{d\,\delta y}{dx} + Q\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \text{etc.}\right)$$

At quia $\mathfrak{Z}$ eſt functio ipſarum x, y, p, q, r etc. et $\Pi = \int \mathfrak{Z}\,dx$, ſit eius differentiale:

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{L}\,d\Pi + \mathfrak{M}\,dx + \mathfrak{N}\,dy + \mathfrak{P}\,dp + \mathfrak{Q}\,dq + \text{etc.}$$

eritque:

$$\delta\mathfrak{Z} = \frac{d\,\delta\Pi}{dx} \pm \mathfrak{L}\,\delta\Pi + \mathfrak{N}\,\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\,\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\,\delta y}{dx^2} + \text{etc.}$$

Ponatur

Ponatur $\int \mathfrak{L}\,dx = \mathfrak{W}$, eritque:

$$\delta\Pi = e^{\mathfrak{W}}\int e^{-\mathfrak{W}}dx\left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.}\right)$$

Fiat $\int e^{\mathfrak{W}}\mathrm{L}\,dx = \mathrm{W}$ et obtinebitur:

$$\delta\Phi = \mathrm{W}\int e^{-\mathfrak{W}}dx\left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.}\right)$$
$$-\int e^{-\mathfrak{W}}\mathrm{W}\,dx\left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.}\right)$$
$$+\int dx\left(\mathrm{N}dy + \mathrm{P}\frac{d\delta y}{dx} + \mathrm{Q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.}\right)$$

Si hanc variationem ad terminum $x = a$ vsque extendi oporteat, ac poſito $x = a$ fiat $\mathrm{W} = \mathrm{A}$, vocetur breuitatis gratia

$$\mathrm{N} + e^{-\mathfrak{W}}(\mathrm{A}-\mathrm{W})\mathfrak{N} = (\mathrm{N})$$
$$\mathrm{P} + e^{-\mathfrak{W}}(\mathrm{A}-\mathrm{W})\mathfrak{P} = (\mathrm{P})$$
$$\mathrm{Q} + e^{-\mathfrak{W}}(\mathrm{A}-\mathrm{W})\mathfrak{Q} = (\mathrm{Q})$$
etc.

eritque reductiones ſupra expoſitas introducendo variatio formulae integralis $\Phi = \int \mathrm{Z}dx$ ad terminum $x - a$ extenſa:

$$\delta\int \mathrm{Z}dx = \int dx\,\delta y\left((\mathrm{N}) - \frac{d(\mathrm{P})}{dx} + \frac{dd(\mathrm{Q})}{dx^2} - \frac{d^3(\mathrm{R})}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+\delta y\left((\mathrm{P}) - \frac{d(\mathrm{Q})}{dx} + \frac{dd(\mathrm{R})}{dx^2} - \text{etc.}\right)$$
$$+\frac{d\delta y}{dx}\left((\mathrm{Q}) - \frac{(d\mathrm{R})}{dx} + \text{etc.}\right)$$
$$\frac{dd\delta y}{dx^2}\left((\mathrm{R}) - \text{etc.}\right)$$

Scholion.

51. Vſus huius problematis cernitur in deſcenſu corporum ſuper lineis curuis in medio quocunque reſiſtente, dum corpora a viribus quibuscunque ſollicitantur, ſi variationem temporis deſcenſus definire velimus, dum curua quomodocunque variatur. Denotet hoc caſu

caſu Φ tempus deſcenſus per arcum, qui abſciſſae x reſpondeat, ſitque applicata $=y$, et Π altitudo celeritati acquiſitae debita; ac tempus deſcenſus erit $\Phi = \int \frac{dx\surd(1+pp)}{\surd\Pi}$, poſito $dy = pdx$, vt $dx\surd(1+pp)$ elementum arcus deſignet. Verum ex ſollicitationibus erit:

$$d\Pi = Xdx + Ydy - V\surd(dx^2 + dy^2)$$

vbi X et Y ſignificant functiones ipſarum x et y, et V functionem ipſius Π, cui reſiſtentia eſt proportionalis. Erit ergo ob $dy = pdx$

$$\Pi = \int (X + Yp - V\surd(1+pp))dx$$

ideoque $\mathfrak{Z} = X + Yp - V\surd(1+pp)$, exiſtente $Z = \frac{\surd(1+pp)}{\surd\Pi}$.

Corollarium.

52. Si ad ſimilitudinem valorum (N), (P), (Q) ponatur:

$$M + e^{-\mathfrak{W}}(A-W)\mathfrak{M} = (M)$$

erit $(M)dx + (N)dy + (P)dp + (Q)dq + (R)dr +$ etc. differentiale verum huius formulae:

$$Z + e^{-\mathfrak{W}}(A-W)\mathfrak{Z}.$$

Concluſio.

53. Quaecunque ergo formula integralis $\Phi = \int Zdx$ proponatur, cuius variationem inueſtigari oporteat, eius

 variatio,

variatio, vſque ad terminum $x=a$ extenſa, ſemper exprimetur hoc modo:

$$\delta\Phi = \int dx\,\delta y\left((N) - \frac{d(P)}{dx} + \frac{dd(Q)}{dx^2} - \frac{d^3(R)}{dx^3} + \frac{d^4(S)}{dx^4} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \delta y\left((P) - \frac{d(Q)}{dx} + \frac{dd(R)}{dx^2} - \frac{d^3(S)}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{d\delta y}{dx}\left((Q) - \frac{d(R)}{dx} + \frac{dd(S)}{dx^2} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{dd\delta y}{dx^2}\left((R) - \frac{d(S)}{dx} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{d^3\delta y}{dx^3}\left((S) - \text{etc.}\right)$$

ſumto elemento dx conſtante. Quemadmodum autem litterae (N), (P), (Q), (R), (S) etc. ſe habeant, id quouis caſu patebit.

Caſus I.

54. Si $dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + Sds$ etc. erit

$$(N)=N;\ (P)=P;\ (Q)=Q;\ (R)=R;\ (S)=S \text{ etc.}$$

Caſus II.

55. Si $dZ = Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr +$ etc. exiſtente $\Pi = \int \mathfrak{Z}\,dx$, et

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{M}dx + \mathfrak{N}dy + \mathfrak{P}dp + \mathfrak{Q}dq + \mathfrak{R}dr + \text{etc.}$$

ſit $\int Ldx = W$, ac poſito $x=a$, fiat $W=A$, quo facto erit:

$$(N) = N + (A-W)\mathfrak{N};\quad (P) = P + (A-W)\mathfrak{P}$$
$$(Q) = Q + (A-W)\mathfrak{Q};\quad (R) = R + (A-W)\mathfrak{R}$$
$$(S) = S + (A-W)\mathfrak{S};\quad \text{etc.}$$

Caſus

Caſus III.

56. Si fuerit

$$dZ = L d\Pi + L' d\Pi' + M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \text{etc.}$$

exiſtente $\Pi = \int \mathfrak{Z} dx$ et $\Pi' = \int \mathfrak{Z}' dx$, tum vero:

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{M}\, dx + \mathfrak{N}\, dy + \mathfrak{P}\, dp + \mathfrak{Q}\, dq + \mathfrak{R}\, dr + \text{etc.}$$

$$d\mathfrak{Z}' = \mathfrak{M}' dx + \mathfrak{N}' dy + \mathfrak{P}' dp + \mathfrak{Q}' dq + \mathfrak{R}' dr + \text{etc.}$$

ponatur $\int L dx = W$, et $\int L' dx = W'$, ac facto $x = a$, fiat

$$W = A \text{ et } W' = A'$$

quo facto erit:

$$(N) = N + (A - W)\mathfrak{N} + (A' - W')\mathfrak{N}'$$
$$(P) = P + (A - W)\mathfrak{P} + (A' - W')\mathfrak{P}'$$
$$(Q) = Q + (A - W)\mathfrak{Q} + (A' - W')\mathfrak{Q}'$$
$$(R) = R + (A - W)\mathfrak{R} + (A' - W')\mathfrak{R}'$$

etc.

Caſus IV.

57. Si Z contineat formulam integralem $\Pi = \int \mathfrak{Z} dx$, vt ſit:

$$dZ = L d\Pi + M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \text{etc.}$$

quantitas $\mathfrak{Z}$ vero formulam integralem $\pi = \int \mathfrak{z}\, dx$, vt ſit:

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{L}\, d\pi + \mathfrak{M} dx + \mathfrak{N} dy + \mathfrak{P} dp + \mathfrak{Q} dq + \mathfrak{R} dr + \text{etc.}$$

at $\mathfrak{z}$ nullum porro integrale inuoluat, ita vt ſit:

$$d\mathfrak{z} = \mathfrak{m}\, dx + \mathfrak{n}\, dy + \mathfrak{p}\, dp + \mathfrak{q}\, dq + \mathfrak{r}\, dr + \text{etc.}$$

Ponatur $\int L dx = W$, et poſito $x = a$, fiat $W = A^{*}$;

tum

tum vero ponatur $\int(A-W)\mathfrak{L}dx=\mathfrak{W}$, caſuque $x=a$ fiat $\mathfrak{W}=\mathfrak{A}$, quo facto erit:

$$(N)=N+(A-W)\mathfrak{N}+(\mathfrak{A}-\mathfrak{W})\mathfrak{n}$$
$$(P)=P+(A-W)\mathfrak{P}+(\mathfrak{A}-\mathfrak{W})\mathfrak{p}$$
$$(Q)=Q+(A-W)\mathfrak{Q}+(\mathfrak{A}-\mathfrak{W})\mathfrak{q}$$
$$(R)=R+(A-W)\mathfrak{R}+(\mathfrak{A}-\mathfrak{W})\mathfrak{r}$$
etc.

Caſus V.

58. Si Z contineat ipſam formulam $\Phi=\int Z dx$, vt ſit:

$$dZ=Kd\Phi+M dx+N dy+P dp+Q dq+R dr+\text{etc.}$$

ponatur $\int K dx=V$, et facto $x=a$, ſit $V=C$, erit:

$$(N)=e^{C-V}N;\ (P)=e^{C-V}P;\ (Q)=e^{C-V}Q;\ (R)=e^{C-V}R\ \text{etc.}$$

Caſus VI.

59. Si Z praeter formulam $\Phi=\int Z dx$ contineat aliam formulam integralem $\Pi=\int\mathfrak{Z}dx$, ſitque:

$$dZ=Kd\Phi+Ld\Pi+M dx+N dy+P dp+Q dq+R dr+\text{etc.}$$

tum vero $\mathfrak{Z}$ nullam formulam integralem inuoluat:

$$d\mathfrak{Z}=\mathfrak{M}dx+\mathfrak{N}dy+\mathfrak{P}dp+\mathfrak{Q}dq+\mathfrak{R}dr+\text{etc.}$$

ſit $\int K dx=V$, et poſito $x=a$, fiat $V=C$. Deinde ſit $\int e^{C-V}L dx=W$, et poſito $x=a$, fiat $W=\mathrm{A}$, eritque:

$$(N)=e^{C-V}N+(A-W)\mathfrak{N}$$
$$(P)=e^{C-V}P+(A-W)\mathfrak{P}$$
$$(Q)=e^{C-V}Q+(A-W)\mathfrak{Q}$$
$$(R)=e^{C-V}R+(A-W)\mathfrak{R}$$
etc.

Caſus

Caſus VII.

60. Si Z contineat formulam $\Pi = \int \mathfrak{Z}\, dx$, vt ſit:
$$dZ = L\, d\Pi + M\, dx + N\, dy + P\, dp + Q\, dq + R\, dr + \text{etc.}$$
tum vero $\mathfrak{Z}$ denuo eandem formulam $\Pi = \int \mathfrak{Z}\, dx$ involuat, vt ſit:
$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{L}\, d\Pi + \mathfrak{M}\, dx + \mathfrak{N}\, dy + \mathfrak{P}\, dp + \mathfrak{Q}\, dq + \mathfrak{R}\, dr + \text{etc.}$$
Ponatur $\int \mathfrak{L}\, dx = \mathfrak{W}$, et poſito $x = a$, fiat $\mathfrak{W} = \mathfrak{A}$; deinde ponatur $\int e^{-\mathfrak{A}+\mathfrak{W}} L\, dx = W$, et poſito $x = a$, fiat $W = A$, eritque
$$(N) = N + e^{\mathfrak{A}-\mathfrak{W}}(A - W)\mathfrak{N}$$
$$(P) = P + e^{\mathfrak{A}-\mathfrak{W}}(A - W)\mathfrak{P}$$
$$(Q) = Q + e^{\mathfrak{A}-\mathfrak{W}}(A - W)\mathfrak{Q}$$
$$(R) = R + e^{\mathfrak{A}-\mathfrak{W}}(A - W)\mathfrak{R}$$
etc.

61. Simili modo hanc inueſtigationem ad alias formulas complicatas extendere licet, verum cum tales vix vnquam occurrere ſoleant, labor ſuperfluus foret. Cum igitur formularum integralium tam ſimpliciorum, quam magis compoſitarum, variationes definire docuerim, calculus variationum fere penitus abſolutus videtur; quomodocunque enim quantitas varianda fuerit, tam ex formulis abſolutis, quam integralibus, conflata, ope differentiationis ordinariae eius variatio reperiri poterit. Veluti ſi quantitas varianda U contineat formulas integrales quaſcunque:
$$\Phi = \int Z\, dx;\ \Phi' = \int Z'\, dx;\ \Phi'' = \int Z''\, dx \text{ etc.}$$
differentietur ea more ſolito, prodeatque:
$$\delta U = K\, d\Phi + K'\, d\Phi' + K''\, d\Phi'' \text{ etc.}$$
 tum

tum euidens eſt, fore eius variationem:

$$\delta U = K\delta\Phi + K'\delta\Phi' + K''\delta\Phi'' \text{ etc.}$$

at variationes $\delta\Phi$, $\delta\Phi'$, $\delta\Phi''$ etc. per praecepta modo expoſita aſſignabuntur. Simul vero patet, variationem δU ſemper huiusmodi forma expreſſum iri, vt ſit:

$$\delta V = \int (A)\, dx\, \delta y + (B)\delta y + (C)\frac{d\delta y}{dx} + (D)\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.}$$

vbi (A), (B), (C), etc. ſunt functiones ex regulis ſupra traditis inueniendae. Iſtius autem calculi variationum vſum in ſolutione celeberrimi problematis iſoperimetrici, latiſſima ſignificatione accepti, breuiter indicari conueniet.

Applicatio Calculi variationum ad ſolutionem problematis iſoperimetrici latiſſima ſignificatione accepti.

62. Problema primarium huc ſpectans ita enunciari poteſt, vt inter omnes curuas ſuper eadem data baſi $x = a$ extruendas, ea definiatur, pro qua formula quaepiam U maximum minimumue valorem obtineat. Etſi enim enunciatio problematis curuas tantum eiusdem longitudinis complectitur, tamen haec conditio commode, vt eius ambitus latius pateat, omittitur, neque etiam commemoratione vnicae formulae U, cuius valor maximus minimusue euadere debet, eius vis reſtringi eſt cenſenda; poſtquam in genere demonſtraui: ſi inter omnes curuas ſuper eadem baſi $x = a$ extruendas, pro quibus formula V eundem nanciſcatur valorem, definiri

niri debeat ea, in qua valor formulae U maximus euadat minimusue; quaeſtionem huc reduci, vt inter omnes plane curuas, ſuper baſi $x = a$ extruendas, ea definiatur, pro qua haec formula compoſita $\alpha V + \beta U$ conſequatur maximum minimum ve valorem. Interim tamen et huius reductionis ratio ex ipſis calculi variationum principiis dilucide explicari poteſt.

63. Quaeſtio autem haec a conſideratione linearum curuarum remota hoc modo proponi poteſt:

Propoſita formula quacunque U *definire eam relationem inter binas variabiles* x *et* y, *per quam ſi valor ipſius* U *determinetur, atque a valore* $x = o$ *vsque ad valorem* $x = a$ *extendatur, is prodíturus ſit ſiue maximus ſiue minimus.*

Spectemus ergo relationem inter x et y tanquam iam inuentam, ita vt inde oriatur valor ipſius U maximus vel minimus; atque manifeſtum eſt, ſi relatio inter x et y infinite parum immutetur, nullam inde mutationem in valore ipſius U naſci debere; ſeu quod eodem redit variationem ipſius U ſeu δU nihilo aequalem eſſe oportere; ſicque aequatio $\delta U = o$ relationem quaeſitam inter x et y complectetur.

64. Variationem autem δU inde definire docuimus, quod pro quouis valore ipſius x valorem ipſius y, qui ipſi vi relationis quaeſitae competeret, particula quapiam δy augeri aſſumſimus. Cum igitur relatio quaeſita inter omnes plane poſſibiles hac praerogatiua gaudere debeat, variatio δU ſemper eſſe debet nihilo aequalis, quomodocunque ſinguli valores ipſius y tali-

bus

bus particulis δy augeantur; et quomodocunque haec augmenta fuerint comparata, quoniam prorſus ſunt arbitraria, neque vllo modo a ſe inuicem pendentia. Neque etiam opus eſt, vt omnibus valoribus ipſius y huiusmodi variationes tribuantur, ſed ſiue vnicus quispiam, ſiue duo, ſiue quotcunque pro lubitu varientur, ſemper aeque neceſſe eſt, vt variatio, quae inde in totum valorem ipſius U, quatenus is a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = a$ extenditur, redundat, in nihilum abeat.

65. Ex iis autem, quae ſupra ſunt tradita, manifeſtum eſt, variationem ipſius U ſemper hoc modo exprimi, vt ſit:

$$\delta U = \int (A) dx \delta y + (B) \delta y + (C) \frac{d \delta y}{dx} + (D) \frac{d d \delta y}{dx^2} \text{ etc.}$$

cuius formae ſingulas partes ſeorſim conſiderari conuenit. At praeter primum membrum integrale reliquae partes $(B)\delta y$, $(C)\frac{d\delta y}{dx}$ etc. tantum a variatione vltimi valoris y, qui valori $x = a$ conuenit, pendent, neque rationem variationis praecedentium implicant; vt enim tota variatio ipſius U obtineatur, in expreſſione inuenta vbique ſtatui debet $x = a$, quod in ſingulis partibus praeter primam actu fieri poteſt, ſicque in iis δy denotabit variationem, quae ſoli vltimo valori ipſius y tribuitur, et quae omnino eſt arbitraria, neque a praecedentibus pendet. Vnde perſpicuum eſt, niſi membrum integrale adeſſet, ex reliquis partibus nihil plane pro relatione inter x et y concludi poſſe.

66. Verum membrum integrale $\int (A) dx \delta y$ etiam variationes, quae omnibus praecedentibus valoribus ipſius y tribuun-

tribuuntur inuoluit, dum continet ſummam omnium elementorum $(A)dx\delta y$ ex variatione ſingulorum valorum y oriundorum. Ita ſi vnicus eius valor ipſi x quaſi determinatum valorem haberet, ſpectato reſpondens varietur, ſeu particula δy augeatur, membrum illud integrale tantum eſſet $=(A)dx\delta y$, nihilque ſummandum haberetur; ſin autem inſuper ſequens valor y' ipſi $x+dx$ reſpondens, particula $\delta y'$ augeatur, poſitoque $x+dx$, loco x functio (A) abeat in $(A)'$ membrum integrale conſtabit his duabus partibus:

$$(A)dx\delta y+(A)'dx\delta y'$$

Simili modo ſi tres pluresue valores ſucceſſiui y, y', y'', y''', y^{IV} etc. particulis δy, $\delta y'$, $\delta y''$, $\delta y'''$ etc. augeantur, membrum integrale aequiualebit huic expreſſioni:

$$(A)dx\delta y+(A)'dx\delta y'+(A)''dx\delta y''+(A)'''dx\delta y'''+\text{etc.}$$

quae ſeries tam retrorſum vsque ad terminum $x=0$, quam antrorſum vsque ad terminum $x=a$, continuata concipi poteſt.

67. Etſi igitur variatio δU ad terminum determinatum $x=a$ adſtringitur, tamen ob membrum integrale omnes variationes intermedias complectitur; vnde ſi pro reliquis partibus abſolutis, quae tantum ad terminum vltimum $x=a$ referuntur, breuitatis gratia ſcribamus I, variatio δU ita erit expreſſa, vt ſit:

$$\delta U=(A)dx\delta y+(A)'dx\delta y'+(A)''dx\delta y''+(A)'''dx\delta y'''+\text{etc.}+I$$

quae, vt problemati ſatisfiat, nihilo aequari debet. Cum autem variationes δy, $\delta y'$, $\delta y''$ etc. non a ſe

inuicem pendeant, ſed ſingulae mere ſint arbitrariae, illa annihilatio locum habere nequit, niſi ſingulae partes ſigillatim euaneſcant; ex quo neceſſe eſt, vt ſit:

$$(A)=0,\ (A)'=0,\ (A)''=0,\ (A)'''=0,\ \text{etc.}$$

quae aequatiunculae omnes in hac vna indefinita $(A)=0$ continentur, ſeu quicunque valor ipſi x tribuatur, perpetuo eſſe oportet $(A)=0$, hacque aequatione relatio quaeſita inter x et y continetur.

68. En igitur ſolutionem facilem problematis propoſiti, quo ea relatio inter x et y requiritur, ex qua pro formula praeſcripta U, poſtquam eius valor a termino $x=0$ vsque ad $x=a$ fuerit extenſus, maximus minimusue valor reſultet. Quaeratur ſcilicet variatio formulae U pariter a termino $x=0$ vsque ad $x=a$ extenſa, quae per praecepta ſupra tradita huiusmodi formam habere debet:

$$\delta U=\int (A)dx\delta y+(B)\delta y+(C)\frac{d\delta y}{dx}+(D)\frac{dd\delta y}{dx^2}+\text{etc.}$$

hincque ex ſolo membro integrali $\int (A)dx\delta y$ relatio inter x et y quaeſita ita definietur, vt ſit $(A)=0$, reliquae autem partes, quia vltimum tantum valorem ipſius y afficiunt, nihil conferunt ad relationem indefinitam inter x et y, quae deſideratur.

69. Iſtae tamen partes poſteriores relationi inventae magis determinandae inſeruire poſſunt; eatenus enim tantum huiusmodi partes accedunt, quatenus in membro integrali $\int (A)dx\delta y$ functio (A) differentialium rationem $\frac{dy}{dx}=p$, vel etiam rationes differentialium ſuperiorum, nempe $q=\frac{dp}{dx}$; $r=\frac{dq}{dx}$ etc. inuoluit. Quando autem hoc vſu venit, aequatio $(A)=0$ erit differentia-

rentialis vel primi vel etiam altioris gradus; ſicque relatio quaeſita inter x et y poſt vnam pluresue demum integrationes reperitur. Cum autem quaelibet integratio quantitatem conſtantem arbitrariam inuehat, hoc modo ad aequationem finitam vagam peruenietur, atque nunc noua quaeſtio exiſtet, quomodo has conſtantes arbitrarias determinari oporteat, vt valor ipſius U omnium maximus minimusue prodeat. Cum enim quaelibet illarum conſtantium determinatio iam per ſe maximi minimiue proprietate ſit praedita, hic porro vel maximum maximorum vel minimum minimorum inueſtigandum relinquitur.

70. Ad hoc igitur nouum problema acceſſorium reſoluendum partes illae a ſigno integrali immunes adhiberi poterunt. Conſtantes ſcilicet per integrationes inuectas ita determinari conueniet, vt poſito $x = a$ coefficientes ipſarum δy, $\frac{d \delta y}{d x}$, $\frac{d d \delta y}{d x^2}$ etc. ſinguli ſeorſim euaneſcant, ſiue vt hoc caſu ſatisfiat his conditionibus:

$$(B) = o; \ (C) = o; \ (D) = o \text{ etc.}$$

Deinde quia ambos terminos $x = o$, et $x = a$, inter ſe permutare licet, etiam, poſito $x = o$, efficiendum erit, vt fiat $(B) = o$, $(C) = o$, $(D) = o$ etc. Etſi enim partes, quae hoc exigant, in noſtra expreſſione non continentur, tamen eae in membro integrali contineri ſunt cenſendae.

71. Ex iisdem principiis etiam problemata, quae ad methodum relatiuam retuli, ſolui poſſunt; haec autem problemata ita generaliter enunciare licet:

Inter omnes relationes, quibus y per x definitur, quae hac communi gaudent proprietate, vt pro formula U poſito x = a eundem valorem exhibeant, determinare eam relationem, ex qua formula U, ſiquidem a termino x = o vsque ad terminum x = a extendatur, maximum vel minimum conſequatur valorem.

Hic igitur variationes, quae ſingulis valoribus ipſius y tribuuntur, non omnes ſunt arbitrariae, ſed ita ſtatuendae ſunt, vt fiat $\delta\mathfrak{U} = 0$, ſi quidem eius valor a termino $x = 0$ vsque ad $x = a$ extendatur. Tum vero etiam natura maximi minimiue poſtulat, vt ſecundum eandem extenſionem ſit, vt ante, $\delta U = 0$.

72. Per methodum ergo ante expoſitam tam formulae $\mathfrak{U}$, quae debet eſſe communis, quam formulae U, quae maxima fieri debet vel minima, quaeratur variatio a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = a$ extendenda; atque relatio quaeſita inter x et y ex coniunctione harum duarum aequationum $\delta\mathfrak{U} = 0$ et $\delta U = 0$ erit inueſtiganda. At hae variationes ita expreſſae reperientur:

$$\delta\mathfrak{U} = \int(\mathfrak{A})\,dx\,\delta y + (\mathfrak{B})\,\delta y + (\mathfrak{C})\frac{d\delta y}{dx} + (\mathfrak{D})\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.}$$

$$\delta U = \int(A)\,dx\,\delta y + (B)\,\delta y + (C)\frac{d\delta y}{dx} + (D)\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.}$$

vbi de membris a ſigno integrali liberis eadem ſunt tenenda, quae ſupra iam obſeruaui; ideoque relationem inter x et y quaeſitam tantum ex membris integralibus deriuari oportebit.

73.

73. Hinc itaque binas ſequentes conſequemur aequationes:

$$(\mathfrak{A})\delta y + (\mathfrak{A})'\delta y' + (\mathfrak{A})''\delta y'' + (\mathfrak{A})'''\delta y''' + \text{etc.} = 0$$

$$(A)\delta y + (A)'\delta y' + (A)''\delta y'' + (A)'''\delta y''' + \text{etc.} = 0$$

quarum priore aſſumtio variationum δy, $\delta y'$, $\delta y''$ etc. conditioni communi praeſcriptae conueniens definitur, quae deinde in alteram introducta relationem quaeſitam manifeſtabit. Omnes ergo variationes δy, $\delta y'$, $\delta y''$ etc. praeter vnam, vt arbitrariae, ſpectari poſſunt, quippe quae vna ex priori aequatione eſt definienda. Iam vero euidens eſt, poſtquam vna ita fuerit ſumta, vt priori aequationi ſatisfiat, tum ſimul alteri ſatisfactum iri, ſi ſtatuatur $(A) = n(\mathfrak{A})$, ſumendo pro n quantitatem quamcunque conſtantem.

74. Problema igitur propoſitum hac reſoluetur aequatione:

$$\alpha(A) + \beta(\mathfrak{A}) = 0$$

ſumtis pro α et β quantitatibus quibusuis conſtantibus. Eadem autem ſolutio prodiiſſet, ſi inter omnes omnino relationes inter x et y ea exquiri debuiſſet, vnde formula $\alpha U + \beta \mathfrak{U}$ maximum minimum ve valorem imperraret; ex quo ſimul intelligitur, binas formulas $\mathfrak{U}$ et U propoſitas inter ſe permutari poſſe, eaque omnia, quae in Tractatu meo annotaui hinc multo magis fiunt perſpicua. Simili enim modo res ſe habebit, ſi non vna formula $\mathfrak{U}$ ſed plures debeant eſſe communes; ſicque ſtabilito *Calculo variationum* omnia huius generis problemata facillime et breuiſſime expediuntur.

ANALYTICA EXPLICATIO METHODI MAXIMORVM ET MINIMORVM.

Auctore

L. EVLERO.

I.

Quae vulgo in elementis de methodo maximorum et minimorum tradi ſolent; ea in functionibus vnius cuiuspiam quantitatis variabilis potiſſimum conſumuntur, ita vt propoſita functione quacunque V, quae vtcunque ex quantitate variabili z et conſtantibus fuerit compoſita, eas variabilis z determinationes inueſtigari oporteat, quae functioni V maximum minimumue valorem inducant. Interdum etiam functiones duarum plurium ve variabilium z, y, x conſiderantur valoresque iis ſingulis aſſignandi quaeruntur, quibus functio maximum vel minimum valorem conſequatur. Methodus autem, qua huius poſterioris generis quaeſtiones reſoluuntur, prorſus conuenit cum ea, quae in genere priori adhibetur; ſi enim plures implicentur variabiles ſucceſſiue vnica tanquam variabilis ſpectatur, eiusque valor pro maximo minimo ve producendo idoneus indagatur; quae operatio, ſi per ſingulas variabiles fuerit inſtituta, omnium valores innoteſcunt, quibus valor functionis propoſitae vel maximus vel minimus reddatur.

II.

II.

Haud aliter res ſe habet, ſi proponatur functio duarum variabilium x et y, quaeraturque valor ipſi y tribuendus, vt, cum pro x data quantitas a fuerit poſita, ipſa functio maximum minimumue valorem impetret: ſtatim enim vbique pro x ſcribatur a, et quaeſtio manifeſto ad primum genus erit reducta. Verum ſi illa functio vatiabilium x et y non fuerit euoluta, ſed per integrationem determinetur, quaeſtiones ad genus omnino diuerſum erunt referendae, methodumque ſoluendi longe diuerſam requirunt. Veluti ſi Z fuerit functio quaecunque ipſarum x et y, ac proponatur formula integralis $\int Z\,dx$; quaeſtionem ita enunciari conueniet: *Definire relationem inter binas variabiles* x *et* y, *vt valor iſtius formulae, poſtquam poſuerimus* $a = x$, *fiat omnium maximus vel minimus.*

III.

Quantum inter huiusmodi quaeſtiones et eas, quas ad prius genus retuli, interſit, ad ſequentia momenta vel leuiter attendenti mox patebit. Sit enim V functio euoluta ipſarum x et y, pro qua inueſtigari debeat valor ipſius y, vt poſito $x = a$ valor functionis V euadat maximus minimus ve; atque ad hanc quaeſtionem ſoluendam ſtatim poni poteſt $x = a$, quo facto valor ipſius y per methodum priorem ita determinabitur, vt non pendeat a valore indefinito ipſius x. At propoſita formula integrali $\int Z\,dx$, non in formula differentiali $Z\,dx$, ſed demum poſt integrationem ipſi x valorem illum determinatum a tribuere licet; neque vt

tum

tum formulae $\int Z\,dx$ valor euadat maximus minimusue. Valor quidam determinatus pro y ſumendus negotium conficit, ſed relatio quaedam inter x et y aſſignari debet; propterea quod etiam ſi poſt integrationem ponatur $x = a$, tamen valor integralis $\int Z\,dx$ a relatione indefinita, quae inter x et y intercedit, pendeat, et per omnes valores medios ipſius y determinetur.

IV.

Verum tales quaeſtiones circa formulam $\int Z\,dx$ maximam minimam ve reddendam multo latius patent, neque tantum ad caſus, quibus Z eſt functio ipſarum x et y, reſtringuntur, ſed pro Z aſſumi poteſt expreſſio quaecunque, quae relatione quapiam inter x et y aſſumta determinetur. Hinc Z inuoluere poterit praeter ipſas variabiles x et y etiam relationem differentialium earum, neque ſolum primi ordinis, ſed etiam altiorum ordinum quorumcunque; ſcilicet ſi hae differentialium rationes ita exprimantur, vt ſit $\frac{dy}{dx} = p$; $\frac{dp}{dx} = q$; $\frac{dq}{dx} = r$ etc. quantitas Z ſpectari poterit vt functio quaecunque omnium harum x, y, p, q, r etc. Quin etiam quantitas Z praeterea in ſe complecti poteſt nouas formulas integrales vtcunque in ea inuolutas; vnde plura genera huiusmodi quaeſtionum naſcuntur, ad quae methodus ſoluendi accommodari debet.

V.

Huiusmodi problemata primum occaſione famoſi illius Problematis Iſoperimetrici, a *Iacobo Bernoullio* olim in ſummum Analyſeos incrementum agitati, tractari ſunt coepta, quod arduum negotium etſi mira ſagaci-

ſagacitate a Viro illo acutiſſimo eſt expeditum, tamen methodus ab eo adhibita tantum ad caſus, quibus quantitas Z praeter x et y ſolum earum differentialia prima ſeu litteram p inuoluebat, extendebatur, et quouis caſu ſingulari quaſi ex conſiderationibus geometricis repeti debebat. Poſtquam autem in vberiori huius argumenti enodatione diu deſudaſſem, methodum tandem maxime generalem ſum adeptus, cuius ope omnia huiusmodi problemata, quibus quantitas Z non ſolum differentialia cuiusque ordinis ſed etiam formulas integrales quascunque in ſe contineret, reſolui poſſunt, quam methodum libro ſingulari ample ſum perſecutus.

VI.

Etſi autem haec methodus ita eſt comparata, vt eius applicatio nullas figuras geometricas requirat, tamen ipſa iſtius methodi inueſtigatio ex contemplatione linearum curuarum eſt petita, quam ob cauſam mihi etiam tum non ſatis naturalis eſt viſa. Cum enim haec quaeſtio, qua relatio inter x et y quaeritur, vt formula integralis $\int Z\,dx$, poſito poſt integrationem $x = a$, maximum minimum ve valorem obtineat, ſine vllo reſpectu ad geometriam proponi poſſit, ſolutio etiam adaequata et ex veris principiis deducta ab omni geometrica conſideratione immunis eſſe debere videtur. Quod deſiderium cum in meo tractatu non obſcure eſſem teſtatus, Vir quidam Clariſſimus et in arte Analytica verſatiſſimus, *de la Grange Tournier*, litteris Taurini ad me datis nunciauit, ſe huius voti compotem eſſe factum, ſimulque fundamenta ſuae Ana-

lyſeos mecum beneuole communicauit. Quae cum plurimum in receſſu habere videantur, meo more explicanda et vberius excolenda ſtatui.

VII.

Conſideremus igitur in genere formulam integralem $\int Z\,dx$, in qua ſit Z functio vtcunque per x et y compoſita, quae etiam rationem differentialium non ſolum primi ſed etiam ſuperiorum ordinum inuoluat, ac praeterea quoque vnam plures ve formulas integrales complectatur. Pro eius autem determinatione aſſumamus integrale ita capi, vt euaneſcat poſito $x = 0$; tum vero poſt integrationem tribuamus ipſi x valorem quendam datum $x = a$, ſitque A valor, quem formula integralis tum recipit. Iam quaeſtio in hoc verſatur, vt definiri debeat ea relatio inter x et y, ex qua per iſtas operationes maximus vel minimus valor pro A obtineatur. Hanc igitur relationem inter x et y, quae quaeſito ſatisfaciat, aequatione quadam ſiue finita ſiue differentiali cuiuscunque ordinis exprimi oportet, quae ſimulac fuerit inuenta, problema pro ſoluto erit habendum.

VIII.

Ponamus, vti in Analyſi fieri ſolet, hanc relationem inter x et y, quae quaeritur, iam conſtare, ita vt quicunque valor definitus pro x aſſumatur, inde y quoque, ac proinde etiam functio Z, valorem determinatum adipiſcatur. Concipiantur hoc modo ſucceſſiue pro x omnes poſſibiles valores a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = a$ ſubſtitui, qui interuallis infinite paruis

paruis dx progrediantur; tum vero valores ipſius Z, qui his ſingulis valoribus ipſius x reſpondent, per dx multiplicari; haecque omnia producta in vnam ſummam collecta eam quantitatem, quam littera A indicauimus, conſtituent, quae maxima vel minima eſſe debet. Quod ita eſt intelligendum, vt, ſi ex alia relatione inter x et y quacunque ſingulis valoribus ipſius x alii valores ipſi y hincque ipſi Z conueniant, ex iis pro A, ſi fuerit maximum, valor certe minor, ſin autem fuerit minimum, certe maior ſit proditurus, quam ſi iuſta relatio inter x et y fuiſſet adhibita.

IX.

Quod ſi autem hae variationes, quae ſingulis valoribus ipſius y inducuntur, infinite paruae concipiantur, tum per indolem maximorum et minimorum inde nulla mutatio in quantitatem A redundare debet; atque ex hoc ipſo fonte determinatio maximorum et minimorum peti ſolet. Cum ſcilicet valoribus ipſius y pro arbitrio variationes infinite paruas tribuerimus, mutatio, quae inde in valoribus omnibus ipſius $Z\,dx$, ac proinde in eorum ſumma tota A oritur, calculo colligi debet, quae deinceps nihilo aequalis poſita praebebit aequationem, in qua natura maximi minimi ve, ideoque quaeſita relatio inter x et y continebitur. Hac igitur operatione methodus huiusmodi maxima vel minima inueſtigandi abſoluitur, quae idcirco iisdem principiis atque vulgaris methodus maximorum ac minimorum innititur; quae, quomodo per ſola Analyſeos praecepta, ſine vllis ex Geometria petitis ſubſidiis, inſtitui poſſit,

 accuratius

accuratius perpendamus, quandoquidem hoc idem negotium principiis geometricis innixus iam ſatis proſpero ſucceſſu ſum executus.

X.

Cum igitur variationes infinite paruae ſingulis valoribus ipſius y inductae nullam mutationem in valore quantitatis A producere debeant, hocque fieri oporteat, vtcunque illae variationes accipiantur, dummodo fuerint infinite paruae; ſufficiet in vnico tantum quodam valore ipſius y huiusmodi variationem concipere, et mutationem, quae inde in quantitate A oritur, euaneſcentem reddere, ex quo fonte etiam vniuerſa mea methodus maximorum et minimorum eſt petita. Verum etiamſi pluribus valoribus ipſius y, quin etiam plane omnibus, huiusmodi variationes infinite paruae quaecunque inducantur, nihilominus natura maximorum et minimorum exigit, vt mutatio, quam quantitas A inde adipiſcitur, ad nihilum redigatur, atque hoc vſu venire debet, vtcunque illae variationes, quippe quae omnes mere ſunt arbitrariae, aſſumantur.

XI.

Sed quoniam in mea praecedente ſolutione vnicum quendam valorem ipſius y variationem infinite paruam accipere poſui, dum reliqui omnes immutati manerent, in hoc principium continuitatis vim patiebatur, haecque praecipua erat cauſa, quod tota inueſtigatio per ſola Analyſeos praecepta expediri nequiuerit, ſed contemplatio figurae geometricae, in qua valores ipſius y per applicatas lineae curuae repraeſentarentur, in

in ſubſidium vocari debuerit, quo inde variationes, quas ratio differentialium cuiusque ordinis ſubiret, commodius elici poſſent. Quam ob rem ne nimis principio continuitatis aduerſemur, quo applicatio praeceptorum mere Analyticorum impediebatur, ſingulis valoribus ipſius *y* variationes infinite paruas tribuamus, quae tamen ita ſint indefinitae, vt ſingulae deinceps ad libitum determinari, atque adeo omnes praeter vnam ad nihilum redigi poſſint; quo pacto ad ſolutiones meas priores deuoluamur neceſſe eſt.

XII.

Cum autem nunc non ſolum vni valori ipſius *y*, ſed innumerabilibus, quin plane omnibus, variationes infinite paruas quidem, ſed tamen arbitrarias, tribuimus, dubium eſt nullum, quin haec methodus multo latius pateat, quam praecedens, atque ad ſolutionem plurium aliorum problematum manuducat, ad quae prior methodus vel difficilius vel etiam fruſtra adhiberetur. Si enim illae variationes certo quodam modo determinentur, quaeſtione ad Geometriam translata huiusmodi problemata reſolui poterunt, in quibus non inter omnes plane lineas curuas, ſed tantum eas numero quidem infinitas, quae ſub certa quadam ſpecie comprehendantur, ea debeat aſſignari, quae maximi minimi ve cuiuspiam proprietate ſit praedita. Tales autem quaeſtiones plerumque plurimum difficultatis implicare deprehenduntur; verum praeterea hinc adhuc plura incrementa in Analyſi merito expectare licet.

XIII.

Cum igitur hic ſingulis valoribus ipſius y variationes infinite paruas tribuamus, duplicem ſtatum formulae $\int Z\,dx$ conſideramus, in quorum altero ſinguli valores ipſius y ſint ii ipſi, quos quaeſita relatio inter x et y requirit, in altero autem iidem valores variati contineantur; priorem ſtatum diſtinctionis cauſa *principalem*, alterum vero *ſtatum variatum* appellabo. Natura ergo maximorum et minimorum poſtulat, vt differentia inter hos duos ſtatus euaneſcat. Quemadmodum igitur in ſtatu principali valor ipſius y quicunque, dum variabilis x differentiali dx creſcere ſumitur, incrementum dy capere cenſetur, ita manente x, dum a ſtatu principali ad ſtatum variatum progredimur, valorem ipſius y elemento δy augeri ſtatuamus; vnde diſcrimen inter has duas expreſſiones differentiales dy et δy probe notetur. Dum autem ſingulis valoribus ipſius y, tranſitu ad ſtatum variatum facto, huiusmodi incrementa δy tribuimus, ea tanquam plane indeterminata, neque vllo modo ab ipſis valoribus ipſius y pendentia, ſunt ſpectanda.

XIV.

His poſitis indagari debet, quantum incrementum quaecunque functio Z pro quolibet valore ipſius x, dum a ſtatu principali ad variatum transfertur, capiat; quod incrementum a ſola variatione ipſius y, quatenus hac translatione elemento δy augetur, proficiſcitur. Indicemus hoc incrementum per δZ, ita vt valor ipſius Z a ſtatu principali ad variatum translatus ſit $= Z + \delta Z$; ac primo ſtatim patet, ſi functio Z a ſola variabili

variabili x penderet, neque alteram y implicaret, fore $\delta Z = 0$; neque igitur variabilis x, vtcunque ea in formationem functionis Z ingrediatur, quicquam ad δZ conferet, ſed eius valor a ſolo elemento δy, quo variabilis y creſcere concipitur, reſultat. Hic autem prout Z vel ſolas quantitates finitas x et y, vel etiam earum differentialium rationem, vel adeo formulas integrales inuoluit, ita diuerſi caſus erunt examinandi.

XV.

Ponamus ergo primo, functionem Z tantum ipſas quantitates finitas x et y inuoluere, ita vt neque ratio differentialium, neque vllae formulae integrales, in eam ingrediantur, atque ad eius variationem δZ definiendam, in functione Z vbique loco y ſcribi oportet $y + \delta y$, relicto x inuariato, ſicque prodibit valor variatus $Z + \delta Z$, a quo ſi principalis Z ſubtrahatur, remanebit variatio δZ. Manifeſtum ergo eſt, hanc variationem obtineri, ſi functio Z more ſolito differentietur, poſita ſola y variabili, dummodo pro dy ſcribatur δy. Quare ſi differentiatione more ſolito inſtituta, ſumta vtraque quantitate x et y variabili, fuerit $dZ = M dx + N dy$, erit pro translatione a ſtatu principali ad variatum $\delta Z = N \delta y$; haec ergo variatio reperitur, ſi in differentiali ordinario pro dx ſcribatur o, pro dy autem δy; hocque modo caſum primum facillime expediuimus.

XVI.

Videamus autem porro, quomodo pro hoc caſu primo, quo Z eſt functio ipſarum x et y tantum, formulae integralis $\int Z dx$ valor maximus vel minimus inueniri queat. Cum igitur pro quouis valore ipſius x functio Z creſcat elemento $N \delta y$, ideoque $Z dx$ particula

ticula $N dx \delta y$; ſumma omnium harum particularum a termino $x = o$ vsque ad $x = a$ dabit variationem ipſius A, quae ſi ponatur δA, erit $\delta A = \int N dx \delta y$; quae expreſſio cum debeat euaneſcere, quamcunque legem variationes δy teneant, neceſſe eſt, vt pro ſingulis valoribus ipſius x ſit $N = o$. Haec ergo aequatio exprimit relationem inter x et y qnaeſitam, ex qua formula $\int Z dx$ adipiſcitur valorem vel maximum vel minimum: neque haec proprietas tantum locum habebit caſu praeſcripto $x = a$, ſed etiam quicunque alius valor ipſi x tribuatur.

XVII.

Complectatur ſecundo functio Z praeter x et y etiam rationem differentialium primorum, ſeu poſito $\frac{dy}{dx} = p$, ſit Z functio quaecunqne quantitatum x, y et p, qua more ſolito differentiata prodeat $dZ = M dx + N dy + P dp$. Hinc igitur quaeri debet variatio ipſius Z, dum a ſtatu principali in ſtatum variatum transfertur, qua translatione quantitas x manet eadem, y vero augetur elemento δy, elementum autem, quo quantitas p creſcit, ſit δp. Cum autem ſit $p = \frac{dy}{dx}$, ſi in ſtatu principali valorem ipſius y, qui ipſi $x + dx$ reſpondet, per y' indicemus, erit $p = \frac{y' - y}{dx}$; creſcat iam in translatione in ſitum variatum y elemento δy, et y' elemento $\delta y'$, eritque $\delta p = \frac{\delta y' - \delta y}{dx}$. At $\delta y' - \delta y$ exprimit incrementum ipſius δy, dum x creſcit differentiali dx, ita vt ſit $\delta y' - \delta y = d \delta y$: tum vero etiam $\delta y' - \delta y$ ſpectari poteſt vt variatio ipſius $y' - y = dy$, dum in ſtatum variatum progredimur, ſicque erit quoque $\delta y' - \delta y = \delta dy$; vnde perficitur, eſſe $d \delta y = \delta dy$, ideoque $\delta p = \frac{d \delta y}{dx} = \frac{\delta dy}{dx}$.

XVIII.

XVIII.

Simili autem modo, ſi Z praeter x et y etiam differentialia ſuperiorum ordinum inuoluat, vt poſitis $\frac{dy}{dx}=p$, $\frac{dp}{dx}=q$, $\frac{dq}{dx}=r$ etc. ſit Z functio quaecunque quantitatum x, y, p, q, r etc. et more ſolito differentiando $dZ=Mdx+Ndy+Pdp+Qdq+Rdr$ etc. incrementa quantitatum q, r etc. dum a ſtatu principali in variatum transferuntur, determinantur. Nam ob $q=\frac{dp}{dx}$ erit $\delta q=\frac{\delta p'-\delta p}{dx}=\frac{d\delta p}{dx}=\frac{\delta dp}{dx}$; pariterque $\delta r=\frac{d\delta q}{dx}=\frac{\delta dq}{dx}$ etc. Verum ex ſuperioribus eſt $d\delta p=\frac{dd\delta y}{dx}=\frac{d\delta dy}{dx}$, et $\delta dp=\frac{\delta ddy}{dx}$, ita vt ſit:

$$\delta q=\frac{dd\delta y}{dx^2}=\frac{d\delta dy}{dx^2}=\frac{\delta ddy}{dx^2}$$

eodem vero modo perſpicitur fore:

$$\delta r=\frac{ddd\delta y}{dx^3}=\frac{dd\delta dy}{dx^3}=\frac{d\delta ddy}{dx^3}=\frac{\delta dddy}{dx^3}$$

quarum formularum ſpecie diuerſarum aequalitas probe eſt tenenda.

XIX.

Dum igitur functio Z ex ſtatu principali in variatum tranſit, quia quantitas x incrementum nullum capit, y vero incrementum δy, tum quantitas p incrementum $\frac{d\delta y}{dx}$, quantitas q incrementum $\frac{dd\delta y}{dx^2}$, quantitas r incrementum $\frac{ddd\delta y}{dx^3}$ etc. ipſius functionis Z incrementum huic translationi conueniens reperietur per ordinariam differentiationem, ponendo $dx=0$, $dy=\delta y$, $dp=\frac{d\delta y}{dx}$, $dq=\frac{dd\delta y}{dx^2}$, $dr=\frac{dd\,d\delta y}{dx^3}$ etc. vnde id erit:

$$\delta Z=N\delta y+P\frac{d\delta y}{dx}+Q\frac{dd\delta y}{dx^2}+R\frac{ddd\delta y}{dx^3}+\text{etc.}$$

 Hinc-

Hincque ergo variatio functionis Z pro quouis ipſius x valore definiri poterit; quae forma adhuc magis illuſtrabitur, ſi, quemadmodum eſt $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr$ etc. obſeruetur, eſſe oportere, ob $\delta x = 0$,

$$\delta Z = N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.}$$

tum vero eſſe, ob $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$, $r = \frac{dq}{dx}$ etc.

$$\delta p = \frac{\delta dy}{dx} = \frac{d\delta y}{dx};\ \delta q = \frac{\delta dp}{dx} = \frac{d\delta p}{dx} = \frac{dd\delta y}{dx^2};\ \delta r = \frac{ddd\delta y}{dx^3}.$$

XX.

Cum ergo translatione in ſtatum variatum functio Z incrementum capiat δZ, ipſa formula $\int Z\,dx$ incrementum nanciſcetur $\int \delta Z . dx$, quod itaque erit:

$$\int dx \left(N\delta y + P\frac{d\delta y}{dx} + Q\frac{dd\delta y}{dx^2} + R\frac{ddd\delta y}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$

in quo, ſi poſt integrationem ponatur $x = a$, obtinebitur variatio ipſius A, ſeu δA, quae nihilo aequalis poſita inducet quantitati A valorem maximum ſeu minimum. In hac autem integratione non amplius ad tranſitum in ſtatum variatum reſpicitur, ſed ea per omnia incrementa ipſius x extendi debet, cum denotet ſummam omnium variationum ſingulis valoribus ipſius x a termino $x = 0$ vsque ad $x = a$ conuenientium. Ne igitur ratio differentialium per δ indicatorum turbet, pro δy ſcribatur ω, ita vt ω exhibeat quantitatem infinite paruam arbitrariam vtcunque ab x pendentem; ac ſuperius incrementum nihilo aequandum erit:

$$\int dx \left(N\omega + P\frac{d\omega}{dx} + Q\frac{dd\omega}{dx^2} + R\frac{d^3\omega}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$

XXI.

Perſpicuum eſt, in his differentialibus ſuperioribus elementum dx aſſumi conſtans; quia enim poſuimus

mus $\frac{d\delta p}{dx}$, ſeu $d.\frac{\delta p}{dx} = \frac{dd\delta y}{dx^2}$, ob $\delta p = \frac{d\delta y}{dx}$, aperte dx conſtans eſt aſſumtum. Hoc ergo obſeruato, ſi ſingulas partes integralis inuenti ſeorſim integremus, habebimus:

$$\int dx.\,N\omega = \int N\omega\,dx$$

$$\int dx.\,P\frac{d\omega}{dx} = \int P\,d\omega = P\omega - \int \omega\,dP$$

$$\int dx.\,Q\frac{dd\omega}{dx^2} = \int \frac{Q\,dd\omega}{dx} = \frac{Q\,d\omega}{dx} - \frac{\omega\,dQ}{dx} + \int \frac{\omega\,ddQ}{dx}$$

$$\int dx.\,R\frac{d^3\omega}{dx^3} = \int \frac{R\,d^3\omega}{dx^2} = \frac{R\,dd\omega}{dx^2} - \frac{dR\,d\omega}{dx^2} + \frac{\omega\,ddR}{dx^2} - \int \frac{\omega\,d^3R}{dx^2}$$

etc.

Hinc itaque variatio quaeſita partim ex membris integralibus, partim ex abſolutis conſtabit, eritque:

$$\int \omega\,dx\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \omega\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \text{etc.}\right) + \frac{d\omega}{dx}\left(Q - \frac{dR}{dx} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{dd\omega}{dx^2}(R - \text{etc.})$$

XXII.

Reſtituamus δy pro ω, ac formulae integralis $\int Z\,dx$, exiſtente $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + S\,ds$ etc. et $p = \frac{dy}{dx}$; $q = \frac{dp}{dx}$; $r = \frac{dq}{dx}$; $= s\frac{dr}{dx}$ etc. incrementum, dum in ſtatum quemcunque variatum transfertur, quod hoc modo $\delta\int Z\,dx$ exprimere licet, ita ſe habebit:

$$\int dx\,\delta y\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \delta y\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \frac{d^3S}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{d\delta y}{dx}\left(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{dd\delta y}{dx^2}\left(R - \frac{dS}{dx} + \text{etc.}\right) + \frac{d^3\delta y}{dx^3}(S - \text{etc.})$$

 in

in quibus formulis, quatenus differentialia ſuperiorum graduum inuoluunt, differentiale dx conſtans eſt aſſumtum. At δy pro ſingulis valoribus ipſius x valorem habet arbitrarium.

XXIII.

Si igitur pro valore $x = a$ formula $\int Z dx$ maxima vel minima fieri debeat, incrementum modo inventum, ſi in eo ſtatuatur $x = a$, nihilo aequale poni oportet; hocque ita vt ſemper euaneſcat, quomodocunque variationes δy aſſumantur. Quare etiam, ſi talis variatio vnico cuipiam valori y, qui conuenit valori cuicunque ipſius x, minori quam a, tribuatur, expreſſio inuenta in nihilum abire debet. Tum autem nulla mutatio inde valoribus vltimis ipſius y, qui ipſi $x = a$ reſpondent, inducuntur; quare cum, poſito $x = a$, pars incrementi abſoluta $\delta y(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \frac{d^3S}{dx^3} + \text{etc.}) + \frac{d\delta y}{dx}(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \text{etc.}) + \frac{dd\delta y}{dx^2}(R - \frac{dS}{dx} + \text{etc.}) + \text{etc.}$ tantum ab vltimorum ipſius y valorum variatione pendeat, pro iis erit $\delta y = 0$, $d\delta y = 0$, $dd\delta y = 0$ etc. ſicque haec pars ſponte euaneſcit. Ex quo neceſſe eſt, vt ſola pars integralis ſeorſim nihilo aequalis reddatur, indeque fieri debeat:

$$\int dx \delta y (N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.}) = 0.$$

XXIV.

Haec autem expreſſio ſummam omnium variationum, quae ex ſingulorum ipſius y variationibus naſcuntur, complectitur; ſed quia talis mutatio in vnico valore fieri concipitur, tota ſumma ad hanc vnam variationem

riationem reducitur, reliquis omnibus euaneſcentibus; quare neceſſe eſt, vt pro hoc caſu ſit

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.} = 0.$$

Quoniam vero, in quocunque loco haec variatio fieri concipiatur, natura maximi minimi ve aeque hanc annihilationem poſtulat, neceſſe eſt, vt pro omnibus valoribus ipſius x ſit $N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.} = 0$; quae ergo aequatio continet relationem indefinitam inter x et y, qua efficitur, vt inde oriundus valor formulae integralis $\int Zdx$ fiat maximus vel minimus, poſito $x = a$, vnde patet, hanc relationem non ab iſta quantitate a pendere.

XXV.

Haec iam eſt eadem aequatio, quam pro ſolutione eiusdem problematis olim in Tractatu meo de Maximis ac Minimis dedi; nunc autem ex meris principiis analyticis deriuaui; quod negotium ideo commode ſucceſſit, quod ſingulis valoribus ipſius y variationes accedere aſſumſi, quibus in ſtatum variatum transferantur. Deinde vero reductio formularum integralium §. 21. facta negotium penitus confecit, qua illae ita fuerunt in partes reſolutae, vt aliae a ſigno ſummatorio $\int$ eſſent liberae, quae autem eo manſerunt adſtrictae, eae tantum ipſam variationem $\omega = \delta y$, ſine eius differentialibus, inuoluerent; quo ipſo hoc commodi ſumus nacti, vt, cum quaelibet variatio ſeorſim ad nihilum perduci debeat, formula integralis ſtatim praebuerit aequationem

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.} = 0,$$

 qua

qua indefinite relatio inter x et y exprimeretur, reliquae vero incrementi partes abſolutae, vtpote ad vltimos tantum ipſius y valores pertinentes, non in computum venirent.

XXVI.

Neque tamen hae partes abſolutae fruſtra ſunt inuentae, ſed ſingularem praeſtant vſum, ad quem methodus mea prior, quae tantum aequationem $N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \text{etc.} = 0$ ſuppeditauit, minus eſt accommodata; quam ob cauſam haec methodus illi longe eſt anteferenda. Quem vſum quo clarius exponam, ſit primo Z functio tantum ipſarum x et y, earum differentialia non inuoluens, ita vt ſit $dZ = M\,dx + N\,dy$, exiſtentibus $P = 0$, $Q = 0$, etc. ac manifeſtum eſt, hoc caſu partes abſolutas ſponte euaneſcere, atque adeo problema perfecte eſſe ſolutum, ſtatim ac fecerimus $N = 0$. Ita ſi $(bb - nxy + \frac{y^3}{c})dx$ debeat eſſe maximum vel minimum, ob $N = -nx + \frac{3yy}{c}$ quaeſtioni ſatisfit, ſtatuendo $yy = \frac{1}{3}ncx$, neque hic quicquam vltra determinandum ſupereſt.

XXVII.

At ſi Z praeterea inuoluat $p = \frac{dy}{dx}$, vt ſit $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp$, tum, vt $\int Z\,dx$ fiat maximum vel minimum, vtique neceſſe eſt, ſit $N - \frac{dP}{dx} = 0$. Verum quia haec aequatio eſt differentialis, atque adeo differentio-differentialis, ſi functio P ipſam quantitatem $p = \frac{dy}{dx}$ inuoluat, integratio eius vnam vel duas conſtantes arbitrarias accipiet, neque propterea relatio inter x et y penitus determinabitur. Obſeruaui igitur iam

iam in meo tractatu, hanc relationem maximo minimo ve conuenientem ita praeterea ad lubitum definiri poſſe, vt, poſito $x = a$, altera variabilis y datum valorem obtineat; ac ſi illa aequatio $N - \frac{dP}{dx} = 0$ fuerit differentialis ſecundi gradus, inſuper vnam determinationem arbitrio noſtro relinqui. His igitur caſibus conditioni maximi vel minimi adhuc alia conditio, ad valores extremos ipſius y pertinens, adiungi poteſt.

XXVIII.

Porro igitur quaeri poteſt, cum his caſibus relatio inter x et y non penitus determinetur, eaque adhuc infinitis modis exhiberi queat, quinam prae omnibus reliquis maximum minimum ve producat. Hoc vero colligere poterimus ex parte incrementi abſoluta ante neglecta, quae hoc caſu eſt $P\delta y$; cuius igitur valor, quem induit poſito $x = a$, etiam euaneſcere debet. Atque hinc in genere intelligimus, ſi $\int Z dx$ debeat eſſe maximum vel minimum, exiſtente $dZ = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + S ds$ etc. aequationem $N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} -$ etc. $= 0$, ita vlterius determinari debere, vt, poſito $x = a$, ſequentibus ſatisfiat aequationibus:

$$P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \frac{d^3S}{dx^3} + \text{etc.} = 0$$

$$Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \text{etc.} = 0$$

$$R - \frac{dS}{dx} + \text{etc.} = 0;\ S = 0 \text{ etc.}$$

XXIX.

XXIX.

Quia exemplo haec clariora euadent, quaeratur relatio inter x et y, vt poſito $x=a$ haec formula $\int\frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{y}}$, exiſtente $p=\frac{dy}{dx}$, maximum minimum ve obtineat valorem. Cum ergo ſit $Z=\frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{y}}$, erit $M=0$, $N=-\frac{\sqrt{(1+pp)}}{2y\sqrt{y}}$ et $P=\frac{p}{\sqrt{y(1+pp)}}$, ſicque primo adimplenda eſt haec aequatio $N-\frac{dP}{dx}=0$, ſeu $Ndx-dP=0$, quae per p multiplicata dat $Ndy=pdP$. At ob $M=0$ eſt $dZ=Ndy+Pdp$, ideoque $dZ=pdP+Pdp$, quae integrata praebet $Z=Pp+C$, ſeu $\frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{y}}=\frac{pp}{\sqrt{y(1+pp)}}+C$ hoc eſt $\frac{1}{\sqrt{y(1+pp)}}=C=\frac{1}{\sqrt{b}}$. Hinc porro nanciſcimur $b=y(1+pp)$ et $p=\sqrt{\frac{b-y}{y}}=\frac{dy}{dx}$, ita vt ſit $dx=\frac{ydy}{\sqrt{(by-yy)}}$ et integrando $x=c-\sqrt{(by-yy)}$ $+b\,\mathrm{A\,ſin.}\frac{2\sqrt{(by-yy)}}{b}$. Verum ad pleniorem determinationem debet eſſe $P=0$, poſito $x=a$, hoc eſt $p=0$, et $y=b$; vnde poſitis $x=a$, et $y=b$, conſtans c ita definitur, vt ſit $c=a-\pi b$. Ac ſi velimus, vt poſito $x=0$ fiat et $y=0$, debet eſſe $b=\frac{a}{\pi}$.

XXX.

Antequam hanc inueſtigationem analyticam ad caſus, quibus functio Z etiam formulas integrales in ſe complectitur, accommodemus, ipſam analyſin, qua hactenus ſumus vſi, diligentius examinemus, ac momenta, quibus innititur, accuratius perpendamus. Verſatur autem haec Analyſis circa duas variabiles x et y, quae partim ad ſtatum, quem vocaui principalem, partim ad ſtatum variatum referuntur, ita vt earum altera x ad vtrumque ſtatum aeque pertineat, altera vero

vero y, dum a ſtatu principali ad variatum transfertur, incrementum capiat δy, dum autem in eodem ſtatu ad valorem $x + dx$ promouetur, augmentum differentiale conſuetum dy accipiat; hinc ſi variabilis y ſimul a ſtatu principali in variatum et locum ipſi $x + dx$ reſpondentem promoueatur, augmentum eius erit $dy + \delta y$. Cum autem x ad vtrumque ſtatum aeque referatur, erit $\delta x = 0$.

XXXI.

Si iam habeatur alia quaecunque functio V ad locum x in ſtatu principali relata, eaque in eodem ſtatu ad locum $x + dx$ promoueatur, eius incrementum, quod ei accedet, more ſolito per dV exprimamus. Sin autem ea, manente valore ipſius x eodem, e ſtatu principali in variatum proferatur, eius augmentum nouo more per δV exponamus. Quodſi iam functio illa V ſit ex quantitatibus x, y, p, q, r etc. vtcunque compoſita, litterae autem p, q, r etc. eiusmodi quantitates deſignent, quarum vtraque incrementa dp, dq, dr etc. et δp, δq, δr etc. exhiberi queant; hinc conſueto differentiandi modo etiam ambo incrementa functionis V aſſignari poterunt. Si enim fuerit, pro translatione a loco x ad locum $x + dx$, in eodem ſtatu, ex differentiatione conſueta

$$dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \text{etc.}$$

erit, pro translatione a ſtatu principali in variatum, eodem vero loco x, exiſtente, vti notauimus, $\delta x = 0$,

$$\delta V = M\,\delta x + N\,\delta y + P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r \text{ etc.}$$

XXXII.

Deinde ſi haec duplicis generis differentialia inter ſe permiſceantur, ex ſuperioribus iam conſtat eſſe

$$\delta\, d\, V = d\, \delta\, V.$$

Hinc ſi V iam ſit differentiale formae dV, erit

$$\delta\, dd U = d\delta\, d U = dd\delta\, U, \text{ ob } \delta\, d U = d\delta\, V$$

atque in genere, quocunque ordine bina differentiationis ſigna d et δ fuerint conſtituta, eorum ordo pro lubitu permutari poteſt ſalua ſignificatione: ſic erit

$$\delta\, d^3 V = d\delta\, d^2 V = d^2 \delta\, dV = d^3 \delta\, V.$$

Quia autem hic vnicum ſtatum variatum conſideramus, ad quem tranſitus ſigno δ indicatur, hoc ſignum nunquam plus quam ſemel in huiusmodi compoſitionibus ineſſe poteſt; ſemper autem e re eſt ſignum δ in talibus formulis in vltimum locum promouere.

XXXIII.

Eadem permutatio quoque ad ſigna integralia extenditur; ſi enim proponatur formula integralis $\int V$, denotante $\int$ ſummam omnium valorum in eodem ſtatu, qui omnibus valoribus ipſius x reſpondent, ſumtorum, erit etiam

$$\delta \int V = \int \delta\, V$$

id quod per ſe eſt perſpicuum, cum incrementum translatitium totius ſummae aequale ſit ſummae omnium incrementorum elementarium in eadem translatione exiſtentium. Atque ex hoc ipſo fonte ſuperior Analyſis eſt deducta; nam cum propoſita eſſet formula integralis $\int Z\, dx$, cuius variatio in ſtatum variatum erat deſi-

definienda, aſſumſimus eſſe $\delta\int Z\,dx = \int\delta(Z\,dx) = \int\delta Z . dx$, quia $\delta(Z\,dx) = \delta Z\,dx + Z\,\delta\,dx$, eſt vero $\delta\,dx = 0$, vti $\delta x = 0$. Quin etiam ſi occurreret integratio geminata $\int\int V$, foret eodem modo

$$\delta\int\int V = \int\delta\int V = \int\int\delta V.$$

XXXIV.

Alterum artificium in transformatione integralium, quando poſt ſignum integrale ſigna d et δ inuicem coniunguntur, vt ſaltem in integratione ſignum δ ſolitarium relinquatur. Ita propoſita formula integrali $\int V\,\delta\,dv$, ob $\delta\,dv = d\,\delta\,v$, conſiderando $\delta\,v$ vti quantitatem ſimplicem, erit

$$\int V\,\delta\,dv = \int V\,d\,\delta\,v = V\,\delta\,v - \int\delta\,v\,dV.$$

Eodemque porro modo perſpicitur fore:

$$\int V\,dd\delta v = V\,d\delta\,v - \delta\,v\,dV + \int\delta\,v\,ddV$$

$$\int V\,d^3\delta\,v = V\,dd\delta\,v - d\delta\,v\,dV + \delta\,v\,ddV - \int\delta v\,d^3V$$

$$\int V\,d^4\delta\,v = V\,d^3\delta v - d^2\delta\,v\,dV + d\delta\,v\,ddV - \delta v\,d^3V + \int\delta v\,d^4V$$

etc.

eſt enim $\int V\,dd\delta\,v = V\,d\delta\,v - \int d\delta\,v\,dV$, at eſt

$$\int d\,\delta\,v\,dV = \delta\,v\,dV - \int\delta\,v\,ddV$$

vnde ratio harum transformationum perſpicitur.

XXXV.

His regulis analyticis praemiſſis non erit difficile, omnes quaeſtiones huiusmodi circa maxima et minima reſoluere, etiamſi in formula $\int Z\,dx$ functio Z formulas integrales quascunque in ſe contineat. Totum negotium, ſcilicet, huc redit, vt incrementum $\delta\int Z\,dx$, quod formula propoſita $\int Z\,dx$, dum a ſtatu principali

in variatum transfertur, accipit, definiatur; quippe quod nihilo aequale poſitum ſolutionem maximi minimi ve continebit. Vocabo autem hoc incrementum variationem differentialem formulae $\int Zdx$, quae oriri intelligenda eſt, ſi ſinguli valores ipſius y particulis infinite paruis δy iisque arbitrariis augeantur. Tum vero hanc variationem per omnes valores ipſius x, a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = a$, extendi debere perſpicuum eſt, pro cuius completa determinatione obſeruandum eſt, eam ita ſumi oportere, vt poſito $x = 0$ ea euaneſcat. Hinc igitur ſequentia problemata ope huius methodi reſoluamus, circa quae tenendum eſt, litteras p, q, r, s etc. rationem differentialium binarum variabilium x et y ita inuoluere, vt ſit

$$p = \frac{dy}{dx};\; q = \frac{dp}{dx};\; r = \frac{dq}{dx};\; s = \frac{dr}{dx} \text{ etc.}$$

Problema 1.

Si Z ſit functio quaecunque variabilium x et y, quantitatumque earum differentialia inuoluentium, p, q, r, s etc. ita vt eius differentiale ſit huiusmodi:

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + Sds \text{ etc.}$$

inuenire variationem differentialem formulae integralis $\int Zdx$ a termino $x = 0$ vsque ad $x = a$ extenſam.

Solutio.

Quaeri ergo debet $\delta \int Zdx$, et cum ſit $\delta \int Zdx = \int \delta Zdx$, habebimus ſtatim, ob $\delta x = 0$,

$$\delta Z = N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + S\delta s \text{ etc.}$$

Eſt

Eſt vero, ſumto differentiali dx conſtante,

$$\delta p = \frac{\delta dy}{dx} = \frac{d\delta y}{dx}$$
$$\delta q = \frac{\delta dp}{dx} = \frac{d\delta p}{dx} = \frac{dd\delta y}{dx^2}$$
$$\delta r = \frac{\delta dq}{dx} = \frac{d\delta q}{dx} = \frac{d^3\delta y}{dx^3}$$
$$\delta s = \frac{\delta dr}{dx} = \frac{d\delta r}{dx} = \frac{d^4\delta y}{dx^4};$$

vnde obtinebimus:

$$\delta Z = N\delta y + P\frac{d\delta y}{dx} + Q\frac{d^2\delta y}{dx^2} + R\frac{d^3\delta y}{dx^3} + S\frac{d^4\delta y}{dx^4} \text{ etc.}$$

Iam pro integratione formulae $\int \delta Z dx$, per partes inſtituenda, vidimus eſſe

$$\int N\delta y dx = \int \delta y dx . N$$
$$\int P d\delta y = P\delta y - \int \delta y dP$$
$$\int Q\frac{dd\delta y}{dx} = Q\frac{d\delta y}{dx} - \frac{\delta y}{dx}dQ + \int \frac{\delta y}{dx}ddQ$$
$$\int R\frac{d^3\delta y}{dx^2} = R\frac{dd\delta y}{dx^2} - \frac{d\delta y}{dx^2}dR + \frac{\delta y}{dx^2}ddR - \int \frac{\delta y}{dx^2}d^3R$$
$$\int S\frac{d^4\delta y}{dx^3} = S\frac{d^3\delta y}{dx^3} - \frac{dd\delta y}{dx^3}dS + \frac{d\delta y}{dx^3}ddS - \frac{\delta y}{dx^3}d^3S - \int \frac{\delta y}{dx^3}d^4S$$

etc.

Ex his ergo colligitur variatio differentialis quaeſita:

$$\delta \int Z dx = \int \delta y dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \delta y \left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \frac{d^3S}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{d\delta y}{dx}\left(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{dd\delta y}{dx^2}\left(R - \frac{dS}{dx} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{d^3\delta y}{dx^3}(S - \text{etc.})$$

vbi pars prima integralis a termino $x = 0$ vsque ad $x = a$ extendi debet, quae ergo omnes variationes intermedias complectitur: in reliquis autem partibus abſolutis ſtatim ponere licet $x = a$, et δy denotabit incremen-

crementum extremi valoris ipſius y; at $d\delta y$, $dd\delta y$ etc. pendebunt inſuper ab incrementis valorum contiguorum.

Coroll. 1.

Si ergo formula integralis $\int Z dx$ debeat eſſe maximum vel minimum pro termino $x = a$, neceſſe eſt, vt eius variatio differentialis euaneſcat, quomodocunque variationes δy accipiantur. Primum ergo oportet ſit, pro omnibus valoribus intermediis ipſius x,

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.} = 0$$

qua aequatione relatio requiſita inter x et y continetur.

Coroll. 2.

Hinc autem, ſi termini P, Q, R etc. adſint, ob integrationes inſtituendas relatio inter x et y non penitus determinatur, quia in eam per ſingulas integrationes conſtantes quantitates arbitrariae ingrediuntur. His igitur caſibus ad quaeſtionem maximi vel minimi aliae nonnullae conditiones adiungi poſſunt, veluti vt pro datis quibusdam valoribus ipſius x, altera variabilis y datos valores obtineat.

Coroll. 3.

Omiſſis autem huiusmodi conditionibus, noua quaeſtio formari poteſt, quemadmodum conſtantes illae per integrationem introductae definiri debeant, vt vel maximum maximorum vel minimum minimorum obtineatur:

tineatur: pro hoc autem neceſſe eſt, vt, poſito $x = a$ his aequationibus ſatisfiat:

$$P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \frac{d^3S}{dx^3} = 0$$

$$Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} = 0$$

$$R - \frac{dS}{dx} = 0$$

$$S = 0.$$

Coroll. 4.

Deinde vero ob easdem rationes opus eſt, vt pro altero termino $x = 0$, iisdem hiſce aequationibus ſatisfiat. Nam cum variatio differentialis euaneſcere debeat poſito $x = 0$, pars integralis eiusmodi conſtantem inuoluit, quae hanc conditionem adimpleat; haec autem conſtans terminos abſolutos, ſi in iis ponatur $x = 0$, ad nihilum redigere debet. Quare formulae illae $P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} -$ etc. $Q - \frac{dR}{dx} +$ etc. $R - \frac{dS}{dx}$ etc. aeque euaneſcere debent caſu $x = 0$, atque caſu $x = a$.

Problema 2.

Si functio Z praeter quantitates x, y, p, q, r etc. etiam formulam quandam integralem $\Phi = \int \mathfrak{Z} dx$ vtcunque implicet, vt ſit

$$dZ = L d\Phi + M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + S ds \text{ etc.}$$

in formula autem Φ ſit $\mathfrak{Z}$ functio quaecunque ipſarum x, y, p, q, r etc. exiſtente

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{M} dx + \mathfrak{N} dy + \mathfrak{P} dp + \mathfrak{Q} dq + \mathfrak{R} dr + \mathfrak{S} ds \text{ etc.}$$

atque his ita ſe habentibus, oporteat definiri variationem differentialem huius formulae integralis $\int Z dx$, a termino $x = 0$ ad terminum $x = a$ extenſam.

Solutio.

Solutio.

Cum ſit $\delta\int Z dx = \int \delta Z dx$, quaeramus ante omnia δZ, ac primo quidem ſtatim patet eſſe

$$\delta Z = L\delta\Phi + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r \text{ etc.}$$

vbi, vt ante, habebitur

$$\delta p = \frac{d\delta y}{dx};\ \delta q = \frac{dd\delta y}{dx^2};\ \delta r = \frac{d^3\delta y}{dx^3};\ \delta s = \frac{d^4\delta y}{dx^4} \text{ etc.}$$

verum, ob $\delta\Phi = \delta\int \mathfrak{Z} dx = \int \delta\mathfrak{Z} dx$, erit ſimili modo

$$\delta\mathfrak{Z} = \mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r \text{ etc.}$$

hincque

$$\delta\Phi = \int dx(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r \text{ etc.})$$

Cum igitur primum membrum formulae $\delta Z dx$ ſit $L dx \delta\Phi$, erit

$$\int L dx\delta\Phi = \int L dx \int(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r \text{ etc.}) dx$$

Ponatur nunc $\int L dx = V$, ac habebitur

$$\int L dx\delta\Phi = V\int dx(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r \text{ etc.})$$
$$- \int V dx(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r \text{ etc.})$$

Perinde hic eſt, qua lege integrale $\int L dx = V$ capiatur, quamcunque enim conſtantem adiiceremus, ea in hac expreſſione iterum tolleretur. Ponamus ergo iſtud integrale ita capi, vt euaneſcat, poſito $x = a$, et quia variatio differentialis ad terminum $x = a$ accommodari debet, erit

$$\int L dx\delta\Phi = -\int V dx(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.})$$

ad quod ſi addantur reliquae partes, colligimus fore

$$\delta\int Z dx = \int dx(N - V\mathfrak{N})\delta y + (P - V\mathfrak{P})\delta p + (Q - V\mathfrak{Q})\delta q \text{ etc.})$$

vbi

vbi, ſi reductiones ſupra indicatas adhibeamus, prodibit iſta variatio differentialis iam ad terminum $x = a$ adſtricta:

$$\int \delta y\, dx\left((N - V\mathfrak{N}) - \frac{d(P - V\mathfrak{P})}{dx} + \frac{dd(Q - V\mathfrak{Q})}{dx^2} - \frac{d^3(R - V\mathfrak{R})}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \delta y\left((P - V\mathfrak{P}) - \frac{d(Q - V\mathfrak{Q})}{dx} + \frac{dd(R - V\mathfrak{R})}{dx^2} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{d\delta y}{dx}\left((Q - V\mathfrak{Q}) - \frac{d(R - V\mathfrak{R})}{dx^2} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{dd\delta y}{dx^2}\left((R - V\mathfrak{R}) - \text{etc.}\right)$$

cuius expreſſionis conſtitutio per ſe eſt manifeſta.

Coroll. 1.

Haec ergo ſolutio ex praecedente oritur, ſi loco quantitatum ſimplicium N, P, Q, R, etc. ſubſtituantur hae compoſitae:

$$N - V\mathfrak{N},\ P - V\mathfrak{P},\ Q - V\mathfrak{Q},\ R - V\mathfrak{R} \text{ etc.}$$

vbi eſt $V = \int L\,dx$, integrali hoc ita ſumto, vt euaneſcat, poſito $x = a$.

Coroll. 2.

Si igitur formula integralis $\int Z\,dx$ debeat reddi maximum vel minimum pro termino $x = a$, efficiendum eſt, vt ex variatione omnium valorum intermediorum ipſius y nulla variatio differentialis reſultet, vnde relatio inter x et y ita definitur, vt ſit:

$$(N - V\mathfrak{N}) - \frac{d(P - V\mathfrak{P})}{dx} + \frac{dd(Q - V\mathfrak{Q})}{dx^2} - \frac{d^3(R - V\mathfrak{R})}{dx^3} + \text{etc.} = 0$$

quae ergo relatio iam terminum praeſcriptum $x = a$ inuoluit, ita vt, ſi alius terminus praeſcribatur, alia quoque relatio indefinita inter x et y eſſet reſultatura, propterea quod quantitas V hunc valorem $x = a$ in ſe complectitur.

Coroll. 3.

Hoc modo eiusmodi relatio inter x et y inuenitur, ex qua formula $\int Z dx$ ita maximum minimum ve valorem adipiſcatur, vt manentibus valoribus ipſius y extremis iisdem, quomodocunque valores intermedii immutentur, formulae $\int Z dx$ valor prodituras ſit ſemper vel minor caſu maximi, vel maior caſu minimi, quam ſi iuſta relatio adhiberetur.

Coroll. 4.

Si vero etiam valores extremi determinationi noſtrae permittantur, ex variatione differentiali inuenta etiam hos definire licet. Relatio ſcilicet inuenta per integrationes ita determinari debet, vt poſito $x = a$ etiam pars abſoluta euaneſcat. Hinc itaque efficiendum eſt, vt poſito $x = a$, ſit

$$(P - V\mathfrak{P}) - \frac{d(Q - V\mathfrak{Q})}{dx} + \frac{dd(R - V\mathfrak{R})}{dx^2} - \text{etc.} = 0$$
$$(Q - V\mathfrak{Q}) - \frac{d(R - V\mathfrak{R})}{dx} + \frac{dd(S - V\mathfrak{S})}{dx^2} - \text{etc.} = 0$$
$$(R - V\mathfrak{R}) - \frac{d(S - V\mathfrak{S})}{dx} + \text{etc.} = 0 \quad \text{etc.}$$

Coroll. 5.

Hoc quidem caſu fit $V = 0$, verumtamen hinc nonniſi eos terminos, qui ipſam quantitatem V inuoluunt, eiicere licet. Vbi enim eius differentialia occurrunt, quia eſt $\frac{dV}{dx} = L$, pro L ſcribi debet valor, quem induit poſito $x = a$, qui forte hoc caſu non euaneſcit, quod idem tenendum eſt de differentialibus ſequentibus: $\frac{ddV}{dx^2} = \frac{dL}{dx}$, $\frac{d^3V}{dx^3} = \frac{ddL}{dx^2}$, etc. qui valores prius in genere ſunt capiendi, antequam in iis ponatur $x = a$.

Coroll.

Coroll. 6.

Sin autem quoque valores primi ipſius y noſtrae determinationi relinquantur, tum iisdem aequationibus ſatisfieri debet ponendo $x=0$, vbi eadem ſunt obſeruanda, quae modo notauimus. Aequationes ſcilicet has ante penitus euolui oportet, quam in iis ſtatuatur $x=0$. His autem conditionibus quantitates tantum conſtantes in relationem indefinitam inter x et y ingreſſae determinantur.

Problema 3.

Si functio Z praeter quantitates x, y, p, q, r etc. etiam duas formulas integrales $\Phi=\int \mathfrak{Z}\,dx$ et $\Phi'=\int \mathfrak{Z}'dx$ vtcunque inuoluat, vt ſit

$$dZ=L\,d\Phi+L'd\Phi'+M\,dx+N\,dy+P\,dp+Q\,dq+R\,dr \text{ etc.}$$

in iis autem formulis Φ et Φ' functiones $\mathfrak{Z}$ et $\mathfrak{Z}'$ tantum per quantitates x, y, p, q, r etc. determinentur, vt ſit

$$d\mathfrak{Z}=\mathfrak{M}\,dx+\mathfrak{N}\,dy+\mathfrak{P}\,dp+\mathfrak{Q}\,dq+\mathfrak{R}\,dr \text{ etc.}$$

$$d\mathfrak{Z}'=\mathfrak{M}'dx+\mathfrak{N}'dy+\mathfrak{P}'dp+\mathfrak{Q}'dq+\mathfrak{R}'dr \text{ etc.}$$

definire relationem inter x et y, vt haec formula integralis $\int Z\,dx$, quatenus a termino $x=0$ vsque ad $x=a$ extenditur, maximum minimum ve valorem conſequatur.

Solutio.

Oportet igitur variationem differentialem formulae $\int Z\,dx$ definiri, quae cum ſit $\delta\int Z\,dx=\int\delta Z\,dx$, habemus primo:

$$\delta Z=L\,\delta\Phi+L'\delta\Phi'+N\,\delta y+P\,\delta p+Q\,\delta q+R\,\delta r \text{ etc.}$$

 deinde

deinde vero eſt $\delta\Phi = \delta\int \mathfrak{Z}\,dx = \int \delta\mathfrak{Z}\,dx$ et $\delta\Phi' = \int \delta\mathfrak{Z}'\,dx$, hincque propterea:

$$\delta\mathfrak{Z} = \mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r \text{ etc.}$$
$$\delta\mathfrak{Z}' = \mathfrak{N}'\delta y + \mathfrak{P}'\delta p + \mathfrak{Q}'\delta q + \mathfrak{R}'\delta r \text{ etc.}$$

ex quibus colligimus:

$$\delta\Phi = \int dx(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r \text{ etc.})$$
$$\delta\Phi' = \int dx(\mathfrak{N}'\delta y + \mathfrak{P}'\delta p + \mathfrak{Q}'\delta q + \mathfrak{R}'\delta r \text{ etc.})$$

Cum igitur ſit variatio differentialis quaeſita

$$\delta\int Z\,dx = \int L\,dx\,\delta\Phi + \int L'dx\,\delta\Phi' + \int N\,dx\,\delta y + \int P\,dx\,\delta p \text{ etc.}$$

ponamus $\int L\,dx = V$ et $\int L'dx = V'$, eritque vt ſupra,

$$\int L\,dx\,\delta\Phi = V\int dx(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r \text{ etc.})$$
$$- \int V\,dx(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r \text{ etc.})$$
$$\int L'dx\,d\Phi = V'\int dx(\mathfrak{N}'\delta y + \mathfrak{P}'\delta p + \mathfrak{Q}'\delta q + \mathfrak{R}'\delta r \text{ etc.}$$
$$- \int V'dx(\mathfrak{N}'\delta y + \mathfrak{P}'\delta p + \mathfrak{Q}'\delta q + \mathfrak{R}'\delta r \text{ etc.})$$

Ponamus autem, haec integralia $V = \int L\,dx$ et $V' = \int L'dx$ ita capi, vt euaneſcant, poſito $x = a$, ac praecedentium formularum partes priores ſponte in nihilum abibunt, ſiquidem earum valores pro termino $x = a$ capi debent. Omnibus igitur partibus coniungendis obtinebimus

$$\delta\int Z\,dx = \int dx\,\delta y(N - V\mathfrak{N} - V'\mathfrak{N}')$$
$$+ \int dx\,\delta p(P - V\mathfrak{P} - V'\mathfrak{P}')$$
$$+ \int dx\,\delta q(Q - V\mathfrak{Q} - V'\mathfrak{Q}')$$
$$+ \int dx\,\delta r(R - V\mathfrak{R} - V'\mathfrak{R}')$$
$$\text{etc.}$$

Cum

Cum vero ſit

$$\int P dx \delta p = P \delta y - \int \delta y dP$$

$$\int Q dx \delta q = Q \frac{d\delta y}{dx} - \frac{\delta y}{dx} dQ + \int \frac{\delta y}{dx} ddQ$$

$$\int R dx \delta r = R \frac{dd\delta y}{dx^2} - \frac{d\delta y}{dx^2} dR + \frac{\delta y}{dx^2} ddR - \int \frac{\delta y}{dx^2} d^3 R$$

etc.

eliciemus variationem differentialem quaeſitam

$$\delta \int Z dx = \int dx \delta y \left((N - V\mathfrak{N} - V'\mathfrak{N}') - \frac{d(P - V\mathfrak{P} - V'\mathfrak{P}')}{dx} + \frac{dd(Q - V\mathfrak{Q} - V'\mathfrak{Q}')}{dx^2} - \text{etc.} \right)$$

$$+ \delta y \left((P - V\mathfrak{P} - V'\mathfrak{P}' - \frac{d(Q - V\mathfrak{Q} - V'\mathfrak{Q}')}{dx} + \text{etc.} \right)$$

$$+ \frac{d\delta y}{dx} \left((Q - V\mathfrak{Q} - V'\mathfrak{Q}') - \frac{d(R - V\mathfrak{R} - V'\mathfrak{R}')}{dx} + \text{etc.} \right)$$

$$+ \frac{dd\delta y}{dx^2} \left((R - V\mathfrak{R} - V'\mathfrak{R}') - \text{etc.} \right) \text{ etc.}$$

Coroll. 1.

Ponamus breuitatis gratia:

$$N - V\mathfrak{N} - V'\mathfrak{N}' = (N); \quad P - V\mathfrak{P} - V'\mathfrak{P}' = (P);$$
$$Q - V\mathfrak{Q} - V'\mathfrak{Q}' = (Q) \text{ etc.}$$

ac relatio indefinita inter x et y exprimetur hac aequatione:

$$(N) - \frac{d(P)}{dx} + \frac{dd(Q)}{dx^2} - \frac{d^3(R)}{dx^3} + \text{etc.} = 0$$

quae tamen iam inuoluit terminum praeſcriptum $x = a$, *quia* formulae integrales $V = \int L dx$, et $V' = \int L' dx$, ita ſunt captae, vt euaneſcant, poſito $x = a$.

Coroll. 2.

Cum autem integratio huius aequationis, ſi fuerit differentialis, conſtantes arbitrarias inuoluat, ſi et *hae* determinationi noſtrae relinquantur, vt formula

$\int Z dx$ valorem omnium maximum vel minimum adipiſcatur, eas ita definiri conuenit, vt tam poſito $x = 0$, quam $x = a$, etiam his aequationibus ſatisfiat:

$$(P) - \frac{d(Q)}{dx} + \frac{d\,d(R)}{dx^2} \text{ etc.} = 0;\ (Q) - \frac{d(R)}{dx} \text{etc.} = 0;\ (R) - \text{etc.} = 0.$$

Coroll. 3.

Si functio Z non ſolum duas huiusmodi formulas integrales $\Phi = \int \mathfrak{Z}\, dx$, $\Phi' = \int \mathfrak{Z}'\, dx$, ſed etiam plures $\Phi'' = \int \mathfrak{Z}''\, dx$, $\Phi''' = \int \mathfrak{Z}'''\, dx$ etc. inuoluat, ita tamen, vt litterae $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}', \mathfrak{Z}''$ etc. denotent tantum functiones quantitatum x, y, p, q, r etc. neque vltra vllas formulas integrales inuoluant; ex ſolutione problematis etiam huiusmodi formularum variationes differentiales facile aſſignantur.

Problema 4.

Si functio Z praeter quantitates x, y, p, q, r etc. etiam formulam integralem $\Phi = \int \mathfrak{Z}\, dx$ vtcunque implicet, vt ſit

$$dZ = L\,d\Phi + M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr \text{ etc.}$$

functio autem $\mathfrak{Z}$ etiam praeter x, y, p, q, r, etc. aliam denuo formulam integralem $\phi = \int \mathfrak{z}\, dx$ inuoluat, vt ſit

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{L}\,d\phi + \mathfrak{M}\,dx + \mathfrak{N}\,dy + \mathfrak{P}\,dp + \mathfrak{Q}\,dq + \mathfrak{R}\,dr + \text{etc.}$$

functio vero $\mathfrak{z}$ tantum ex quantitatibus x, y, p, q, r etc. ſit compoſita, exiſtente

$$d\mathfrak{z} = \mathfrak{m}\,dx + \mathfrak{n}\,dy + \mathfrak{p}\,dp + \mathfrak{q}\,dq + \mathfrak{r}\,dr \text{ etc.}$$

definire relationem inter x et y, vt haec formula integralis $\int Z dx$, quatenus a termino $x = 0$ vsque ad termi-

terminum $x = a$ extenditur, maximum minimum ve valorem conſequatur.

Solutio.

In hunc igitur finem variationem differentialem formulae $\int Z\,dx$ exquiri conuenit; quae cum ſit $\delta \int Z dx = \int \delta Z dx$, habemus primo:

$$\delta Z = L\delta\Phi + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r \text{ etc.}$$

ideoque variatio differentialis erit

$$\delta \int Z dx = \int L dx \delta \Phi + \int N dx \delta y + \int P dx \delta p + \int Q dx \delta q + \int R dx \delta r \text{ etc.}$$

Nunc autem, ob $\delta\Phi = \delta \int \mathfrak{Z} dx = \int \delta \mathfrak{Z} dx$, et

$$\delta \mathfrak{Z} = \mathfrak{L}\delta\Phi + \mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r \text{ etc.}$$

habebimus ſimili modo

$$\delta\Phi = \int \mathfrak{L} dx \delta \Phi + \int \mathfrak{N} dx \delta y + \int \mathfrak{P} dx \delta p + \int \mathfrak{Q} dx \delta q + \int \mathfrak{R} dx \delta r \text{ etc.}$$

Denique vero eſt $d\phi = \delta \int \mathfrak{z} dx = \int \delta \mathfrak{z} dx$, ideoque ob

$$\delta \mathfrak{z} = \mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p}\delta p + \mathfrak{q}\delta q + \mathfrak{r}\delta r \text{ etc.}$$

erit

$$\delta\Phi = \int \mathfrak{n} dx \delta y + \int \mathfrak{p} dx \delta p + \int \mathfrak{q} \delta q + \int \mathfrak{r} dx \delta r \text{ etc.}$$

Sit iam $\int \mathfrak{L} dx = v$, ac fiet

$$\int \mathfrak{L} dx \delta \Phi = v \int dx (\mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p}\delta p + \mathfrak{q}\delta q + \mathfrak{r}\delta r \text{ etc.}) - \int v dx (\mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p}\delta p + \mathfrak{q}\delta q + \mathfrak{r}\delta r \text{ etc.})$$

vnde acquirimus

$$\delta\Phi = v \int dx (\mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p}\delta p + \mathfrak{q}\delta q + \mathfrak{r}\delta r \text{ etc.}) + \int dx \delta y (\mathfrak{N} - v\mathfrak{n}) + \int dx \delta p (\mathfrak{P} - v\mathfrak{p}) + \int dx \delta q (\mathfrak{Q} - v\mathfrak{q}) \text{ etc.}$$

Pona-

Ponamus ergo porro $\int L\,dx = V$ et $\int L v\,dx = T$, eritque

$$\begin{aligned}\int L\,dx\,\delta\Phi = {} & T\int dx(\mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p}\delta p + \mathfrak{q}\delta q + \mathfrak{r}\delta r + \text{etc.})\\ & - \int T\,dx(\mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p}\delta p + \mathfrak{q}\delta q + \mathfrak{r}\delta r + \text{etc.})\\ & + V\int dx\,\delta y(\mathfrak{N} - v\mathfrak{n}) + V\int dx\,\delta p(\mathfrak{P} - v\mathfrak{p}) + V\int dx\,\delta q(\mathfrak{Q} - v\mathfrak{q}) \text{ etc.}\\ & - \int V\,dx\,\delta y(\mathfrak{N} - v\mathfrak{n}) - \int V\,dx\,\delta p(\mathfrak{P} - v\mathfrak{p}) - \int V\,dx\,\delta q(\mathfrak{Q} - v\mathfrak{q}) \text{ etc.}\end{aligned}$$

His igitur omnibus colligendis prodibit variatio differentialis quaeſita

$$\begin{aligned}\delta\int Z dx = {} & T\int dx(\mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p}\delta p + \delta\mathfrak{q}q + \mathfrak{r}\delta r + \text{etc.})\\ & + V\int dx\,\delta y(\mathfrak{N} - v\mathfrak{n}) + V\int dx\,\delta p(\mathfrak{P} - v\mathfrak{p})\\ & + V\int dx\,\delta q(\mathfrak{Q} - v\mathfrak{q}) \text{ etc.}\\ & + V\int dx\,\delta y(N - V\mathfrak{N} + Vv\mathfrak{n} - T\mathfrak{n})\\ & + \int dx\,\delta p(P - V\mathfrak{P} + Vv\mathfrak{p} - T\mathfrak{p})\\ & + \int dx\,\delta q(Q - V\mathfrak{Q} + Vv\mathfrak{q} - T\mathfrak{q})\\ & \text{etc.}\end{aligned}$$

quae cum ad terminum vsque $x = a$ extendi debeat, ponamus integralia $\int L\,dx = V$, et $\int L\,dx \int \mathfrak{L}\,dx = T$, quandoquidem determinatio integrationis noſtro arbitrio relinquitur, ita capi, vt euaneſcant, poſito $x = a$; quo noſtra expreſſio facilior reddatur. Deinde vero ponamus breuitatis gratia :

$$\begin{aligned} N - V\mathfrak{N} + (Vv - T)\mathfrak{n} &= (N)\\ P - V\mathfrak{P} + (Vv - T)\mathfrak{p} &= (P)\\ Q - V\mathfrak{Q} + (Vv - T)\mathfrak{q} &= (Q)\\ R - V\mathfrak{R} + (Vv - T)\mathfrak{r} &= (R)\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

exiſtente

exiſtente, vt aſſumſimus, $v=\int\mathfrak{L}dx$, atque variatio differentialis quaeſita reducetur ad hanc formam:

$$\begin{aligned}\delta\int Zdx=\int dx\delta y\Big((N)&-\frac{d(P)}{dx}+\frac{dd(Q)}{dx^2}-\frac{d^3(R)}{dx^3}+\text{etc.}\Big)\\ &+\delta y\Big((P)-\frac{d(Q)}{dx}+\frac{dd(R)}{dx^2}-\text{etc.}\Big)\\ &+\frac{d\delta y}{dx}\Big((Q)-\frac{d(R)}{dx}+\text{etc.}\\ &+\frac{dd\delta y}{dx^2}\big((R)-\text{etc.}\big)\ \text{etc.}\end{aligned}$$

Coroll. 1.

Cum ſit $v=\int\mathfrak{L}dx$, erit $Vv=\int Ldz.\int\mathfrak{L}dx$ et $Vv-T=\int Ldx.\int\mathfrak{L}dx-\int Ldx\int\mathfrak{L}dx=\int\mathfrak{L}dx\int Ldx$. Quia autem per determinationes aſſumtas expreſſio $Vv-T$ euaneſcit, poſito $x=a$, ſi ponamus $\int Ldx=V$ et $\int\mathfrak{L}Vdx=\mathfrak{V}$, ambo haec integralia ita capi oportet, vt euaneſcant, poſito $x=a$.

Coroll. 2.

His igitur formulis $\int Ldx=V$, et $\int\mathfrak{L}Vdx=\mathfrak{V}$, in computum introductis, ponendum erit:

$$\begin{aligned}N-V\mathfrak{N}+\mathfrak{V}\mathfrak{n}&=(N)\\ P-V\mathfrak{P}+\mathfrak{V}\mathfrak{p}&=(P)\\ Q-V\mathfrak{Q}+\mathfrak{V}\mathfrak{q}&=(Q)\\ R-V\mathfrak{R}+\mathfrak{V}\mathfrak{r}&=(R)\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

et variatio differentialis per litteras (N), (P), (Q) etc. perinde exprimetur, ac ſupra caſu primo per litteras N, P, Q etc. erat definita.

Coroll. 3.

Ex his iam facile colligere licet, ſi etiam functio $\mathfrak{z}$ nouam formulam integralem inuoluat; quemadmodum tum variatio differentialis exprimatur; ſi ſcilicet fuerit $d\mathfrak{z} = \mathfrak{l}\,d\Phi' + \mathfrak{m}\,dx +$ etc. tum ad formulas $V = \int L\,dx$ et $\mathfrak{V} = \int \mathfrak{L} V\,dx$ inſuper tertia $\mathfrak{v} = \int \mathfrak{l}\mathfrak{V}\,dx$ accederet; reliqua attendenti facile ſe offerent.

Problema 5.

Si functio Z, praeter quantitates x, y, p, q, r etc. etiam formulam integralem $\Phi = \int \mathfrak{Z}\,dx$ vtcunque implicet, vt ſit

$$dZ = L\,d\Phi + M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr \text{ etc.}$$

functio vero $\mathfrak{Z}$ praeter quantitates x, y, p, q, r etc. eandem denuo formulam integralem $\Phi = \int \mathfrak{Z}\,dx$ inuoluat, vt ſit

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{L}\,d\Phi + \mathfrak{M}\,dx + \mathfrak{N}\,dy + \mathfrak{P}\,dp + \mathfrak{Q}\,dq + \mathfrak{R}\,dr \text{ etc.}$$

definire relationem inter x et y, vt haec formula integralis $\int Z\,dx$, quatenus a termino $x = 0$ ad terminum datum $x = a$ extenditur, maximum minimum ve valorem adipiſcatur.

Solutio.

Variatio differentialis eſt, vt hactenus,

$$\delta \int Z\,dx = \int L\,dx\,\delta\Phi + \int N\,dx\,\delta y + \int P\,dx\,\delta p + \int Q\,dx\,\delta q + \int R\,dx\,\delta r \text{ etc.}$$

deinde vero habemus $\delta\Phi = \delta \int \mathfrak{Z}\,dz = \int \delta \mathfrak{Z}\,dx$ et

$$\delta\mathfrak{Z} = \mathfrak{L}\,\delta\Phi + \mathfrak{N}\,\delta y + \mathfrak{P}\,\delta p + \mathfrak{Q}\,\delta q + \mathfrak{R}\,\delta r \text{ etc.}$$

Cum

Cum autem ſit $\Phi = \int \mathfrak{Z} dx$, erit $\mathfrak{Z} = \frac{d\Phi}{dx}$, et $\delta \mathfrak{Z} = \frac{\delta d \Phi}{dx} = \frac{d \delta \Phi}{dx}$; ponamus tantiſper $\delta \Phi = u$, et $\mathfrak{N} \delta y + \mathfrak{P} \delta p + \mathfrak{Q} \delta q + \mathfrak{R} \delta r$ etc. $= \omega$, vt obtineatur haec aequatio $\frac{du}{dx} = \mathfrak{L} u + \omega$, cuius integrale ſumto e pro numero, cuius logarithmus $= 1$, eſt

$$e^{-\int \mathfrak{L} dx} u = \int e^{- \mathfrak{L} dx} \omega dx \text{, ideoque}$$

$$\delta \Phi = e^{\int \mathfrak{L} dx} \int e^{-\int \mathfrak{L} dx} dx (\mathfrak{N} \delta y + \mathfrak{P} \delta p + \mathfrak{Q} \delta q + \mathfrak{R} \delta r \text{ etc.})$$

vnde deducitur

$$\int L dx \delta \Phi = \int e^{\int \mathfrak{L} dx} L dx \int e^{-\int \mathfrak{L} dx} dx (\mathfrak{N} \delta y + \mathfrak{P} \delta p + \mathfrak{Q} \delta q + \mathfrak{R} \delta r + \text{etc.})$$

Ponatur iam $\int e^{\int \mathfrak{L} dx} L dx = V$, quod integrale ita capiatur, vt euaneſcat, poſito $x = a$, ſitque $e^{-\int \mathfrak{L} dx} V = U$, erit

$$\int L dx \delta \Phi = - \int U dx (\mathfrak{N} \delta y + \mathfrak{P} \delta p + \mathfrak{Q} \delta q + \mathfrak{R} \delta r + \text{etc.})$$

cui parti ſi reliquae partes addantur, reductionesque ſuperiores fiant, prodibit variatio differentialis quaeſita $\delta \int Z dx =$

$$\int dx \delta y ((N - U\mathfrak{N}) - \frac{d(P - U\mathfrak{P})}{dx} + \frac{dd(Q - U\mathfrak{Q})}{dx^2} - \frac{d^3(R - U\mathfrak{R})}{dx^3} + \text{etc.})$$
$$+ \delta y ((P - U\mathfrak{P}) - \frac{d(Q - U\mathfrak{Q})}{dx} + \frac{dd(R - U\mathfrak{R})}{dx^2} - \text{etc.})$$
$$+ \frac{d \delta y}{dx} ((Q - U\mathfrak{Q}) - \frac{d(R - U\mathfrak{R})}{dx} + \text{etc.})$$
$$+ \frac{d d \delta y}{dx^2} ((R - U\mathfrak{R}) - \text{etc.})$$

ex qua, vt ſupra, ea relatio inter x et y elicitur, qua formulae integrali $\int Z dx$ pro termino $x = a$ valor maximus vel minimus conciliatur; haec enim relatio exprimetur iſta aequatione:

$$(N - U\mathfrak{N}) - \frac{d(P - U\mathfrak{P})}{dx} + \frac{dd(Q - U\mathfrak{Q})}{dx^2} - \frac{d^3(R - U\mathfrak{R})}{dx^3} + \text{etc.}) = 0.$$

Tum vero pro conſtantium per integrationem inuectarum determinatione ſingulae partes abſolutae tam pro

caſu $x = a$, quam pro caſu $x = 0$, nihilo aequales effici poterunt.

Corollarium.

Quia poſuimus $e^{-\int \mathfrak{L} dx} V = U$, erit $V = e^{\int \mathfrak{L} dx} U$, vnde differentiando fiet $dV = e^{\int \mathfrak{L} dx}(dU + U \mathfrak{L} dx)$. Cum autem ſit $dV = e^{\int \mathfrak{L} dx} L dx$, habebitur iſta aequatio differentialis:

$$dU + U \mathfrak{L} dx = L dx$$

ex qua quantitatem U ita definiri oportet, vt ea euaneſcat, poſito $x = a$.

Problema 6.

Si functio Z praeter quantitates x, y, p, q, r etc. etiam formulam integralem $\Phi = \int Z dx$ inuoluat, ita vt ſit

$$dZ = L d\Phi + M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \text{etc.}$$

definire relationem inter x et y, vt haec formula $\int Z dx$ maximum minimumve valorem induat, quatenus quidem a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = a$ extenditur.

Solutio.

Cum variatio differentialis ſit

$$\delta \int Z dx = \int L dx \delta \Phi + \int N dx \delta y + \int P dx \delta p + \int Q dx \delta q + \int R dx \delta r \text{ etc.}$$

habebitur etiam $\delta \Phi = \delta \int Z dx$, vnde fit differentiando:

$$d\delta \Phi = L dx \delta \Phi + N dx \delta y + P dx \delta p + Q dx \delta q + R dx \delta r \text{ etc.}$$

hincque inuenitur, vt ante,

$$\delta \Phi = e^{\int L dx} \int e^{-\int L dx} dx (N \delta y + P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \text{etc.})$$

ex

ex quo adipiſcimur, ob $\int e^{\int L dx} L dx = e^{\int L dx}$,

$$\int L dx \delta \Phi = e^{\int L dx} \int e^{-\int L dx} dx (N \delta y + P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \text{etc.}) - \int dx (N \delta y + P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \text{etc})$$

quod poſtremum membrum a reliquis partibus tollitur. Quare, ſi ponamus $e^{-\int L dx} = T$, erit tota variatio differentialis

$$\delta \int Z dx = \tfrac{1}{T} \int dx \delta y \left(TN - \frac{d.TP}{dx} + \frac{dd.TQ}{dx^2} - \frac{d^3.TR}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \delta y \left(TP - \frac{d.TQ}{dx} + \frac{ddTR}{dx^2} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{d\delta y}{dx} \left(TQ - \frac{d.TR}{dx} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{dd\delta y}{dx^2} (TR - \text{etc.}) \text{ etc.}$$

Quo igitur formula $\int Z dx$ euadat maxima vel minima, relatio indefinita inter x et y hac aequatione exprimetur:

$$TN - \frac{d.TP}{dx} + \frac{dd.TQ}{dx^2} - \frac{d^3TR}{dx^3} + \text{etc.} = 0$$

partes vero abſolutae ſingulae inſeruient conſtantibus per integrationem ingreſſis determinandis.

Scholion.

Hac igitur Analyſi nullas conſiderationes geometricas inuoluente non ſolum omnium problematum ad hanc maximorum et minimorum methodum pertinentium easdem adepti ſumus ſolutiones, quas iam in libro meo de maximis et minimis dedi, ſed etiam haec methodus peculiarem ſuppeditauit determinationem conſtantium, quae priori methodo indeterminatae relinquuntur; vnde innumera problemata ſingularia expedite reſolui poſſunt, ad quae prior methodus minus con-

grue accommodatur. Veluti ſi inter omnes lineas, a dato, puncto non ad aliud punctum, ſed ad lineam quandam datam, ſiue rectam, ſiue curuam, ducendas, ea requiratur, ſuper qua corpus ab illo puncto deſcendens tempore breuiſſimo ad hanc lineam perueniat, per conſiderationem illarum partium abſolutarum hoc problema facile reſoluitur, dum iis iſta conditio praeſcribitur, vt curua quaeſita ad datam ſit normalis. Antequam autem finiam, examini Analyſtarum egregium Theorema ſubiiciam, cuius veritas ex principiis hactenus poſitis haud difficulter perſpicitur, et quod in calculo integrali eximium vſum praeſtare videtur.

Theorema.

Propoſita formula differentiali Zdx, in qua Z ſit functio quaecunque quantitatum x, y, $p = \frac{dy}{dx}$; $q = \frac{dp}{dx}$; $r = \frac{dq}{dx}$ etc. eaque differentiata prodeat:

$$dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \text{etc.}$$

ita vt haec formula differentialis Zdx differentialia non ſolum prima, ſed etiam altiora cuiusque ordinis, complectatur; tum facile diiudicari poterit, vtrum iſta formula integrationem admittat, ſiue ſit differentiale completum, nec ne? Conſideretur enim iſta expreſſio, ſumto dx conſtante,

$$V = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.}$$

quae ſi reperiatur nihilo aequalis, formula Zdx erit integrabilis; verum ſi non fuerit $V = 0$, ea non erit integrabilis.

DE
INSIGNI PROMOTIONE
METHODI TANGENTIVM INVERSAE.

Auctore
L. EVLERO.

1.

Ad methodum tangentium inuerſam referri ſolent ea problemata, quibus eiusmodi lineae curuae quaeruntur, quae certa quadam praeſcripta proprietate ratione tangentium ſint praeditae; et cum per tangentes directio tractus curuarum determinetur, ac mutua relatione differentialium coordinatarum contineatur, iſta methodus latiſſime patet, atque omnia problemata, quibus praeſcripta proprietas differentialia inuoluit, in ſe complectitur. Hac methodo plurima paſſim exiſtunt problemata ſoluta, e quibus Analyſis infinitorum maxima cepit incrementa; verum problemata eo pertinentia ad diuerſa genera reuocanda videntur, prout proprietas praeſcripta, vel ad ſingula tantum curuae puncta, vel ad bina plura ve, immo infinita, reſpicit. Atque adhuc quidem alia problemata vix reperiuntur tractata, niſi in quibus proprietas praeſcripta, vel ad ſingula curuae puncta, vel ad bina, refertur, quae igitur primo vel ſecundo generi eſſent annumeranda.

2. Quae diſtinctio, cum minus ſit vſitata, quo clarius percipiatur, eam exemplis ad ſingula genera perti-

Tab. I. Fig. 1. pertinentibus illuſtrari conueniet. Ex primo ergo genere exemplo ſit problema olim tractatum, quo quaeritur curua AM, vt ducta ad axem AB ex quouis puncto M tangente MN, data ratio inter rectas AN et MN ſubſiſtat. Hic ſcilicet praeſcripta proprietas ad vnum punctum M ſpectat, et per coordinatas huius puncti $AP = x$, et $PM = y$, earumque differentialia exprimi poteſt; cum enim poſito curuae elemento $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$, ſit $MN = \frac{y\,ds}{dy}$ et $AN = x - \frac{y\,dx}{dy}$, rationem datam $m:n$ exiſtere oportet inter has lineas, vnde obtinetur aequatio:

$$m(x\,dy - y\,dx) = ny\,ds$$

quae cum alias lineas, niſi quae ſolum punctum M (in ſe quidem indefinitum) reſpiciunt, non contineat, problema ad primum genus refero.

3. Genus autem ſecundum eiusmodi problemata complectetur, ad quae ſoluenda coordinatae ad duo curuae puncta pertinentes ſimul conſiderari debent; cuiusmodi erat problema de traiectoriis reciprocis, illudque problema catoptricum, quod ante aliquot annos tractaui. Cum enim in his continuo bina curuae puncta inter ſe conſerantur, et coordinatae ad ea pertinentes in computum ingrediantur; per principium continuitatis effici debet, vt bina haec puncta ad eandem lineam curuam referantur, ſicque aequatio inter coordinatas vnicum punctum ſpectantes eliciatur. Quam ob rationem huiusmodi problemata merito multo difficiliora cenſentur iis, in quibus ſingula tantum puncta ſeorſim conſideranda proponuntur; quoniam hic praeter condi-

conditiones propoſitas etiam principii continuitatis ratio eſt habenda. Quod quemadmodum ad calculum accommodari conueniat, ex ſolutione problematis traiectoriarum reciprocarum, catoptrici illius aliorumque ſimilium intelligi poteſt, cui argumento propterea fuſius explicando hic ſuperſedeo.

4. Circa huiusmodi autem bina puncta, ad quae in talibus problematibus ſimul eſt reſpiciendum, hoc imprimis notari meretur, quod ita inter ſe debeant eſſe correlata, vt qua lege ab vno tranſitus fit ad alterum, eadem lege viciſſim ab iſto ad illud fiat reuerſio. Ita ſi quaepiam variabilis ad alterum relata ponatur $=z$, res commodiſſime ita concipi ſolet, vt eadem negatiue ſumta ad alterum referatur; ſic enim dum haec denuo negatiue capitur, quia tum iterum euadit poſitiua, ad prius punctum fit tranſitus. Atque ex hoc fonte, qui cum principio continuitatis arctiſſime eſt coniunctus, ſolutiones illorum problematum ſunt hauſtae, ſine quo vix via ad eas patuiſſet. Alio autem modo tractari debebunt problemata, in quibus ad terna puncta correlata ſimul eſt reſpiciendum, vel adeo ad quaterna pluraue, quorſum referri poſſunt ea, quae nuper de curuis, in quibus omnes arcus datae cuiuspiam amplitudinis debent eſſe inter ſe aequales, ſum meditatus.

5. Verum ſi conditio praeſcripta ita ad duo curvae puncta ſimul reſpiciat, vt non ſimili modo regreſſus ab altero ad alterum locum habeat, ſed eo modo, quo a primo ad ſecundum tranſitus, eodem modo a ſecundo ad tertium quodpiam, hincque ad quartum

et ita in infinitum tranſitus procedat; tum non duo ſed innumerabilia curuae puncta ſimul ad propoſitam conditionem referri ſunt aeſtimanda; quam ob rem methodus pro duobus punctis vſurpari ſolita hic nullo ſucceſſu adhiberi poterit. Cum igitur ne meminerim quidem vllum adhuc problema huius generis vel propoſitum eſſe, vel ſolutum, haud ingratum Analyſeos cultoribus fore arbitror, ſi nonnulla huiusmodi problemata hic in medium attulero, ſimulque methodum ea ſoluendi aperuero. Tantum autem abeſt, vt hac methodo omnia problemata, quae in hoc genere excogitari poſſunt, reſolui poſſe credam, vt potius eius inſufficientiam lubens agnoſcam: verum quia cultura noui plane generis haud parum temporis poſtulat, neminem hos primos conatus meos in hac inſueta Analyſeos parte excolenda reprehenſurum eſſe confido.

Problema 1.

Tab. I. Fig. 2. *Super axe* AV *eiusmodi conſtruere lineam curuam* EO, *vt ducta ad quoduis punctum* I *normali* IQ *applicata ex puncto* Q *educta* QK *aequalis ſit ipſi illi normali* QI.

6. Hic quidem duo curuae puncta I et K inter ſe conferuntur, dum punctum K per applicatam QK in termino Q ſubnormalis PQ, quae puncto I reſpondet, erectam definitur; ac problema exigit, vt ſit $QK = QI$; verum eadem conditio poſtulat, vt ſi ad K ducatur normalis KR, ipſi quoque applicata RL ſit aequalis. Tum vero etiam ſi ad L normalis ducatur

tur LS, et in S conſtituta applicata SM ad M denuo normalis agatur MT, ſicque porro ex T applicata TN, et ad N normalis NV, ſit continuo

$$QK = QI;\ RL = RK;\ SM = SL;\ TN = TM;\ VO = VN \text{ etc.}$$

Vnde vt problemati ſatisfiat, ſumto curuae puncto quocunque I, cum eo combinari debent alia puncta innumerabilia K, L, M, N, O etc. quae ergo ſimul cum eo in calculum introduci oportet; in quo ipſo nouitas et difficultas huius problematis conſiſtit.

7. Si abſciſſa puncto primo I reſpondens ponatur $AP = x$, et applicata $PI = y$, quia eſt ſubnormalis $PQ = \frac{y\,dy}{dx}$, et ipſa normalis $QI = \frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$, per principium continuitatis talis aequatio inter x et y deſideratur, vt ſi in ea loco x ſcribatur $AQ = x + \frac{y\,dy}{dx}$, valor applicatae euadat $QK = \frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$. Verum quemadmodum haec conditio ſit adimplenda, difficillime perſpicitur. Aequatio quidem infinita ſolutionem problematis complectens exhiberi poteſt; ſi enim breuitatis gratia ponamus $\frac{y\,dy}{dx} = t$, quoniam pro x ſcribi debet $x + t$, vt valor ſequentis applicatae prodeat, qui eſt $y\frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx} = \sqrt{(yy + tt)}$, habebimus $\sqrt{(yy + tt)}$ $= y + \frac{t\,dy}{1\,dx} + \frac{tt\,ddy}{1.2\,dx^2} + \frac{t^3\,d^3y}{1.2.3\,dx^3} + \frac{t^4\,d^4y}{1.2.3.4\,dx^4} + \text{etc.}$ ſumto differentiali dx conſtante; ſed haec ipſa aequatio differentialis infiniteſimi ordinis ita eſt comparata, vt nullo modo pateat, quomodo ei per aequationem quampiam finitam ſit ſatisfaciendum.

 8. Haud

8. Haud parum autem ſubſidii ad hoc problema ſoluendum afferet proprietas cum conditione praeſcripta coniuncta, qua declaratur, omnes has ſubnormales PQ, QR, RS, ST etc. inter ſe eſſe aequales; quod quidem ita facillime geometrice oſtenditur: Ductis tam applicata pi, quam normali qi proximis, ſi ex Q in qi demittatur perpendiculum $Q\mu$, erit triangulum $Qq\mu$ ſimile triangulo IQP, ideoque $Qq : q\mu = QI : PQ$. Tum vero ob normalitatem deſignat $q\mu$ incrementum normalis QI, vnde cum etiam ſequens applicata proxima qk aequalis ſit normali qi, erit eius incrementum $k\nu = q\mu$, ducta ſcilicet axi parallela $K\nu$, ita vt ſit $K\nu = Qq$. Quare cum pro normali KR ſit $QK : QR = K\nu : \nu k$, erit quoque $QK : QR = Qq : q\mu = QI : PQ$. At per hypotheſin eſt $QK = QI$; vnde ſequitur fore $QR = PQ$, atque ob eandem rationem perſpicuum eſt, omnes illas ſubnormales PQ, QR, RS, ST etc. inter ſe aequales eſſe debere. Neque vero hinc viciſſim concludere licet, ſi omnes iſtae ſubnormales fuerint aequales, etiam ſingulas applicatas normalibus antecedentibus aequales eſſe futuras.

Tab. I. Fig. 3. Fig. 2.

9. Ratiocinium hoc, quo aequalitatem ſubnormalium demonſtraui, quantumuis ſit rigidum, tamen vni exceptioni eſt obnoxium, quae locum habet, ſi elementa Qq et $q\mu$ in nihilum abeant, quoniam tum ratio $Qq : q\mu$ euadit indefinita, neque amplius ſubnormali ſequenti QR definiendae inſeruit. Vnicum igitur hunc caſum ſeorſim euolui conuenit, in quo cum ſit Qq ſeu differentiale lineae $AQ = 0$, ipſa AQ erit conſtans, et omnes curuae normales in eodem axis puncto

puncto Q concurrent. Habebitur ergo hoc caſu circulus, in qua cum applicata ex Q erecta QK ſit normali QI quippe radio aequalis, circulus hoc ſingulari modo problemati ſatisfacit. Cum enim omnes normales in centro conueniant, et applicata ex centro erecta ipſis ſit aequalis, problema vtique per circulum reſoluitur, etſi hic aequalitas ſubnormalium locum non habet. Verum haec ſolutio penitus eſt ſingularis et maxime diſcrepat ab ea, qua aliae curuae ſatisfacientes inueſtigari debent, in quibus omnino ad infinita curuae puncta ſimul eſt reſpiciendum, quae aequalibus ſubnormalibus a ſe inuicem ſunt diſſita.

10. Neque vero hinc concludere licet, quod infinitis punctis eadem conueniat ſubnormalis: vbique prorſus quantitatem ſubnormalis eſſe eiusdem magnitudinis, ideoque conſtantem; parabola enim, cui haec proprietas competit, noſtro problemati minime ſatisfacit, etiamſi omnes omnino ſubnormales habeat aequales. Atque hanc ob rem modo monueram, ne illa propoſitio, quae cum indole praeſcripta punctorum I, K, L, M etc. aequalitatem ſubnormalium coniunxerat, inuertatur. Res igitur ita concipi debet, vt, quemadmodum punctum I ad innumerabilia alia puncta K, L, M, etc. deducit, quibus cum illo communis ſubnormalis conueniat, ita ab alio quouis puncto incipiendo peculiaris ſeries infinitorum punctorum oriatur, quibus pariter communis ſubnormalis, ſed ab illa diuerſa, conueniat, ſicque in curua infinitae ſeries innumerabilium punctorum concipi debent, quarum vnaquaeque ſibi peculiarem ſubtangentis quantitatem habeat; ita vt nullum curuae punctum ſimul ad plures ſeries pertineat. Ex quo quaelibet illa-

rum infinitarum ſerierum a reliquis magnitudine ſubtangentis diſtinguetur, ac ſumta quapiam ſubtangentis quantitate $=t$, ea communis erit infinitis curuae punctis, quae cum ea quaſi connexa ſunt intelligenda.

11. Haec autem conſideratio nos ad ſolutionem problematis manuducit: cum enim ſubnormali t infinita curuae puncta I, K, L, M, N etc. ideoque etiam infinitae abſciſſae AP, AQ, AR, AS etc. conueniant, hae abſciſſae per functionem infinitiformem ſubnormalis t exprimendae ſunt. Sumto ergo quodam angulo Φ, per cuius ſinum et coſinum ſubnormalis t determinetur, idem valor t conueniet his infinitis angulis

$$\Phi;\ 2\pi+\Phi;\ 4\pi+\Phi;\ 6\pi+\Phi;\ 8\pi+\Phi;\ 10\pi+\Phi \text{ etc.}$$

denotante π ſemiperipheriam circuli, ſeu angulum 180°. Quare ſi T aliam quamuis functionem ſin. Φ et coſ. Φ deſignet, atque abſciſſa x, ita exprimatur, vt ſit $x=\alpha t\Phi+T$, pro eodem valore t habebuntur iſtae infinitae abſciſſae:

$$\alpha t\Phi+T;\ \alpha t(2\pi+\Phi)+T;\ \alpha t(4\pi+\Phi)+T;\ \alpha t(6\pi+\Phi)+T \text{ etc.}$$

quae arithmeticam progreſſionem conſtituunt differentia exiſtente $2\alpha\pi t$, quae cum eſſe debeat $=t$, erit $\alpha=\frac{1}{2\pi}$, atque expreſſio idonea pro abſciſſa $x=\frac{t\Phi}{2\pi}+T$, ſiquidem t et T ſint functiones binarum quantitatum ſin. Φ et coſ. Φ, vt eosdem valores retineant, etiamſi pro Φ ſcribatur ſucceſſiue $2\pi+\Phi$, $4\pi+\Phi$, $6\pi+\Phi$ etc.

12. Inuenta iam idonea expreſſione pro abſciſſa $x=\frac{t\Phi}{2\pi}+T$, ſit y applicata ei conueniens, et quia ſubnor-

ſubnormalis eſſe debet $= t$, habebimus $\frac{y\,dy}{dx} = t$, ideoque $yy = 2\int t\,dx$. Cum igitur ſit

$$dx = \frac{t\,d\Phi}{2\pi} + \frac{\Phi\,dt}{2\pi} + d\mathrm{T}$$

erit $t\,dx = \frac{tt\,d\Phi}{2\pi} + \frac{\Phi\,t\,dt}{2\pi} + t\,d\mathrm{T}$

ſiue $t\,dx = \frac{tt\,d\Phi + 2\Phi\,t\,dt}{4\pi} + \frac{tt\,d\Phi}{4\pi} + t\,d\mathrm{T}$, vnde ſit

$$\int t\,dx = \frac{tt\,\Phi}{4\pi} + \int\frac{tt\,d\Phi}{4\pi} + \int t\,d\mathrm{T}\text{, ita vt ſit}$$

$$yy = \frac{1}{2\pi}tt\Phi + \frac{1}{2\pi}\int tt\,d\Phi + 2\int t\,d\mathrm{T}.$$

Hoc igitur modo ſi pro t et T ſumantur functiones quaecunque binarum quantitatum ſin Φ et coſ. Φ, nacti ſumus idoneos valores pro coordinatis curuae x et y, qui ſunt

$$x = \frac{t\Phi}{2\pi} + \mathrm{T} \text{ et}$$

$$yy = \frac{1}{2\pi}tt\Phi + \frac{1}{2\pi}\int tt\,d\Phi + 2\int t\,d\mathrm{T}.$$

13. Hoc quidem modo id ſumus adepti, vt eadem ſubnormalis t conueniat infinitis curuae punctis I, K, L, M etc. verum hac proprietate nondum tota problematis natura exhauritur; ſiquidem aequalitas ſubnormalium non neceſſario aequalitatem cuiusque applicatae et normalis praecedentis includit. Vt igitur et hanc proprietatem complectamur, quia eſt $\mathrm{PQ} = t$, et

$$\mathrm{PI}^2 = yy = \frac{1}{2\pi}tt\Phi + \frac{1}{2\pi}\int tt\,d\Phi + 2\int t\,d\mathrm{T}$$

erit quadratum normalis QI, ideoque et applicatae ſequentis QK,

$$\mathrm{QK}^2 = tt + \frac{1}{2\pi}tt\Phi + \frac{1}{2\pi}\int tt\,d\Phi + 2\int t\,d\mathrm{T}$$

qui idem valor reſultare debet, ſi in expreſſione ipſius PI^2 loco Φ ſcribatur $2\pi + \Phi$. At hoc reuera euenit, dum-

dummodo formulae integrales $\frac{1}{2\pi}\int tt\,d\Phi + 2\int t\,dT$ nullam mutationem ſubeant, ſi loco Φ ſcribatur $2\pi+\Phi$. Quare neceſſe eſt, vt formula $\frac{1}{2\pi}\int tt\,d\Phi + 2\int t\,dT$ ſit functio quantitatum ſin. Φ et coſ. Φ, et quidem vniformis, ne eidem abſciſſae plures applicatae reſpondeant.

14. Cum autem T et t ſint huiusmodi functiones ipſarum ſin. Φ et coſ. Φ, erit et Tt huiusmodi; vnde cum ſit

$$\frac{1}{2\pi}\int tt\,d\Phi + 2\int t\,dT = 2Tt + \frac{1}{2\pi}\int tt\,\Phi - 2\int T\,dt$$

denotet V quoque functionem ſin. Φ et coſ. Φ, ac ponatur

$$\frac{1}{2\pi}\int tt\,d\Phi - 2\int T\,dt = 2V$$

fietque $T = \frac{tt\,d\Phi}{4\pi\,dt} + \frac{dV}{dt}$.

Quare ſi t et V ſint functiones quaecunque vniformes formularum ſin. Φ et coſ. Φ, problemati propoſito ſatisfiet perfecte per ſequentes coordinatarum expreſſiones:

$$x = \frac{t\Phi}{2\pi} + \frac{tt\,d\Phi}{4\pi\,dt} - \frac{dV}{dt}$$

$$yy = \frac{tt\,\Phi}{2\pi} + \frac{t^3\,d\Phi}{2\pi\,dt} + \frac{2t\,dV}{dt} + 2V$$

quae ſolutionem generaliſſimam continent. Hinc autem patet, nullas lineas algebraicas exhiberi poſſe, quae problemati ſatisfaciant, circulo ſcilicet excepto, quem modo prorſus ſingulari problema ſoluere vidimus.

15. Vt exemplum talis curuae in medium afferamus, ponamus

$t = a(1 - n\cos\Phi)$, erit $dt = na\,d\Phi\,\sin\Phi$, et $\frac{tt}{dt} = \frac{a(1-n\cos\Phi)^2}{n\,d\Phi\,\sin\Phi}$, vnde

vnde $\frac{ttd\Phi}{4\pi dt} = \frac{a(1-n\,\text{coſ}.\Phi)^2}{4n\pi\,\text{ſin}.\Phi}$. Statuatur iam $V = \frac{aa}{4\pi}(\alpha + \beta\,\text{ſin}.\Phi + \gamma\,\text{ſin}.\Phi\,\text{coſ}.\Phi)$, erit $dV = \frac{aad\Phi}{4\pi}(\beta\,\text{coſ}.\Phi + 2\gamma\,\text{coſ}.\Phi^2 - \gamma)$, atque

$$\frac{ttd\Phi}{4\pi dt} - \frac{dV}{at} = \frac{a}{4n\pi\,\text{ſin}.\Phi}(1 - 2n\,\text{coſ}.\Phi + nn\,\text{coſ}.\Phi^2 + \gamma - \beta\,\text{coſ}.\Phi - 2\gamma\,\text{coſ}.\Phi^2).$$

Quo nunc ſin. Φ hinc ex denominatore abeat, quia alioquin caſu $\Phi = 0$ et $\Phi = \pi$ expreſſio fieret infinita, ponamus $\beta = -2n$, et $1 + \gamma = +2\gamma - nn$, ſeu $\gamma = +nn+1$, obtinebimusque

$$\frac{ttd\Phi}{4\pi dt} - \frac{dV}{dt} = \frac{(nn+2)a\,\text{ſin}.\Phi}{4n\pi} \text{ et } x = \frac{a\Phi(1-n\,\text{coſ}.\Phi)}{2\pi} + \frac{(nn+2)a\,\text{ſin}.\Phi}{4n\pi}.$$

16. Porro vero erit $\frac{tt\Phi}{2\pi} = \frac{aa\Phi(1-n\,\text{coſ}.\Phi)^2}{2\pi}$, et $\frac{t^2 d\Phi}{2\pi dt} - \frac{2tdV}{dt} = \frac{(nn+2)aa\,\text{ſin}.\Phi(1-n\,\text{coſ}.\Phi)}{2n\pi}$, vnde fit

$$yy = \frac{aa\Phi(1-n\,\text{coſ}.\Phi)^2}{2\pi} + \frac{(nn+2)a^2\,\text{ſin}.\Phi(1-n\,\text{coſ}.\Phi)}{2n\pi} + \frac{aa}{2\pi}(\alpha - 2n\,\text{ſin}.\Phi + (nn+1)\,\text{ſin}.\Phi\,\text{coſ}.\Phi),$$

quae expreſſio reducitur ad hanc:

$$yy = \frac{aa\Phi(1-n\,\text{coſ}.\Phi)^2}{2\pi} + \frac{aa\alpha}{2\pi} + \frac{aa\,\text{ſin}.\Phi}{2n\pi}(2 - nn - n\,\text{coſ}.\Phi).$$

Pro exemplo magis ſpeciali ponamus $n = 1$, et pro coordinatis habebimus, facto $\alpha = 0$,

$$x = \frac{a\Phi(1-\text{coſ}.\Phi)}{2\pi} + \frac{3a\,\text{ſin}.\Phi}{2\pi} + \frac{a}{2\pi}(\Phi(1-\text{coſ}.\Phi) + \tfrac{3}{2}\,\text{ſin}.\Phi)$$

$$yy = \frac{aa\Phi(1-\text{coſ}.\Phi)^2}{2\pi} + \frac{aa}{2\pi}\text{ſin}.\Phi(1-\text{coſ}.\Phi) = \frac{aa}{2\pi}(1-\text{coſ}.\Phi)(\Phi(1-\text{coſ}.\Phi) + \text{ſin}.\Phi)$$

fietque ſubnormalis $\frac{ydy}{dx} = t = a(1-\text{coſ}.\Phi)$

vnde figura curuae iam quodammodo colligi, ac per cognitas ſubnormales conſtrui poterit.

17. Curua autem adhuc ſimplicior obtinetur, ſi ponamus $t = \frac{2a\,\text{ſin.}\,\Phi}{1+\text{coſ.}\,\Phi}$, ſeu $t = 2a\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\Phi$, tum enim fit $dt = \frac{a\,d\Phi}{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}\Phi^2}$ et $\frac{tt\,d\Phi}{dt} = 4a\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\Phi^2$, ideoque $\frac{tt\,d\Phi}{4\pi\,dt} = \frac{a}{\pi}\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\Phi^2$; vnde erit

$$x = \frac{a}{\pi}\Phi\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\Phi + \frac{a}{\pi}\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\Phi^2 - \frac{dV\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}\Phi^2}{a\,d\Phi}$$

$$yy = \frac{2aa}{\pi}\Phi\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\Phi^2 + \frac{4aa}{\pi}\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\Phi\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\Phi^2 - \frac{4\,dV}{d\Phi}\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\Phi\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}\Phi + 2V$$

ſtatuatur $V = 2ab\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\Phi$, vt ſit $dV = \frac{ab\,d\Phi}{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}\Phi}$ hincque

$$x = \frac{a}{\pi}\Phi\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\Phi + \frac{a}{\pi}\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\Phi^2 - b$$

$$yy = \frac{2aa}{\pi}\Phi\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\Phi^2 + \frac{4aa}{\pi}\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\Phi\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\Phi^2$$

vbi patet ſine detrimento amplitudinis poni poſſe $b = 0$, ita vt ſit

$$x = \frac{a}{\pi}(\Phi\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\Phi + \text{ſin.}\,\frac{1}{2}\Phi^2)$$

$$yy = \frac{2aa}{\pi}\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\Phi(\Phi\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\Phi + 2\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\Phi^2)$$

vnde erit $yy - 2ax\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\Phi = \frac{2aa}{\pi}\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\Phi\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\Phi^2$. Quare cum ſit $\text{tang.}\,\frac{1}{2}\Phi = \frac{t}{2a} = \frac{y\,dy}{2a\,dx}$ et $\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\Phi = \frac{y\,dy}{\sqrt{(4aa\,dx^2 + yy\,dy^2)}}$, hinc aequatio differentialis inter ipſas coordinatas x et y elicietur, quae eſt

$$\frac{\pi}{a}(y\,dx - x\,dy) = \frac{yy\,dy^2}{4aa\,dx^2 + yy\,dy^2}.$$

18. Hoc autem problemate ſoluto per easdem formulas quoque ſequens problema latius patens ſolui poterit:

Proble-

Problema 2.

Super axe AV *eiusmodi conſtruere lineam curuam* EO, *vt ducta ad quoduis punctum* I *normali* IQ, *applicatae ex puncto* Q *eductae* QK *quadratum ſuperet quadratum ipſius normalis* QI *dato ſpatio* cc, *ſeu vt ſit* $QK^2 = QI^2 + cc$. Tab. I. Fig. 2.

Cum etiam hoc caſu omnes ſubnormales ſucceſſiuae PQ, QR, RS etc. ſint inter ſe aequales, vti ex praecedente demonſtratione facile intelligitur; quandoquidem ſubnormalis $\frac{ydy}{dx} = t$ eadem prodit, etiamſi quadratum applicatae yy, quantitate conſtante ſiue augeatur ſiue minuatur: in ſuperiori ſolutione omnia manebunt inuariata vsque ad finem §. 12. Quare ſumtis pro t et T functionibus vniformibus formularum ſin. Φ et coſ. Φ, pro determinatione coordinatarum $AP = x$, $PI = y$ habebimus:

$$x = \frac{t\Phi}{2\pi} + T$$

$$yy = \frac{1}{2\pi} tt\Phi + \frac{1}{2\pi}\int tt\,d\Phi + 2Tt - 2\int T\,dt.$$

19. Cum iam pro primo problemate formulas integrales $\frac{1}{2\pi}\int tt\,d\Phi - 2\int T\,dt$ aequauerimus functioni vniformi ipſarum ſin. Φ et coſ. Φ, hic rem generalius expediri oportet. Quoniam vero t et T ſunt functiones vniformes ipſarum ſin. Φ et coſ. Φ, huiusmodi integralia praeter tales functiones inſuper ipſum angulum Φ complecti poſſunt, ita vt haec poſitio latiſſime pateat:

$$\frac{1}{2\pi}\int tt\,d\Phi - 2\int T\,dt = \frac{C\Phi + V}{2\pi}$$

vnde fit $T = \frac{tt\,d\Phi - C\,d\Phi - dV}{4\pi\,dt}$.

denotante V functionem quamcunque vniformem ipſarum ſin. Φ et coſ. Φ. Hoc modo pro omnibus curuis, in quibus ſubnormales ſucceſſiuae PQ, QR, RS etc. ſunt inter ſe aequales, prodibunt ſequentes coordinatarum determinationes:

$$x = \frac{t\Phi}{2\pi} + \frac{tt\,d\Phi - C\,d\Phi - dV}{4\pi\,dt}$$

$$yy = \frac{tt\Phi}{2\pi} + \frac{t^3\,d\Phi - Ct\,d\Phi - t\,dV}{2\pi\,dt} + \frac{C\Phi + V}{2\pi}$$

vnde differentia inter quadrata cuiusque normalis et applicatae ſequentis exiſtit conſtans.

20. Poſita igitur abſciſſa $AP = x$, cum ſit

$$PI^2 = \frac{tt\Phi + C\Phi + V}{2\pi} + \frac{t^3\,d\Phi - Ct\,d\Phi - t\,dV}{2\pi\,dt},$$ erit, ob $PQ = t$,

$$QI^2 = \frac{2\pi tt + tt\Phi + C\Phi + V}{2\pi} + \frac{t^3\,d\Phi - Ct\,d\Phi - t\,dV}{2\pi\,dt}.$$

Poſito autem $2\pi + \Phi$ loco Φ valor, ipſius PI^2 abit in QK^2, vnde fit

$$QK^2 = \frac{2\pi tt + 2\pi C + tt\Phi + C\Phi + V}{2\pi} + \frac{t^3\,d\Phi - Ct\,d\Phi - t\,dV}{2\pi\,dt}$$

ideoque $QK^2 - QI^2 = C$. Cum igitur debeat eſſe $QK^2 = QI^2 + cc$, capiendum eſt $C = cc$, vnde ſolutio ad problema propoſitum accommodata erit:

$$x = \frac{t\Phi}{2\pi} + \frac{(tt - cc)\,d\Phi - dV}{4\pi\,dt}$$

$$yy = \frac{(tt + cc)\Phi + V}{2\pi} + \frac{t(tt - cc)\,d\Phi - t\,dV}{2\pi\,dt}$$

vbi pro t et V functiones quaecunque vniformes quantitatum ſin. Φ et coſ. Φ aſſumi poſſunt.

21. Si ex his aequationibus ipſe angulus Φ eliminetur, obtinebitur haec aequatio:

$$tyy - (tt + cc)x = \frac{tV}{2\pi} + \frac{(tt - cc)^2\,d\Phi - (tt - cc)\,dV}{4\pi\,dt}$$

ex qua ſi quantitates ſin. Φ et coſ. Φ hincque ipſe angulus Φ definiatur, eorumque valores in altera priorum aequa-

aequationum ſubſtituantur, reperietur aequatio inter coordinatas x et y, quae autem ob angulum Φ erit tranſcendens. Vnicus vero datur caſus, quo curua prodit algebraica, qui locum habet, ſi poſt eliminationem anguli Φ ſimul quantitates a ſin. Φ et coſ. Φ pendentes ex calculo abeant, quod vſu venit, ſi fuerit $t = c$ et $V = 0$, ſeu $V =$ Conſtanti; tum enim poſtrema aequatio ſtatim praebet inter x et y hanc aequationem:

$$cyy - 2ccx = C, \quad \text{ſeu } yy = 2cx + C$$

ſtatim autem perſpicitur, parabolam huic problemati ſatisfacere, cum eius ſubnormalis ſit conſtans. At reliquae curuae omnes problemati ſatisfacientes ſunt tranſcendentes.

22. Vt etiam curuae tranſcendentis exemplum addamus, et quidem tale, quod caſum parabolae in ſe complectatur, ponamus

$$t = c - a\,\text{coſ.}\,\Phi \text{ et } V = -2ac\,\text{ſin.}\,\Phi + aa\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi,$$

vnde fit

$$dt = ad\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi \text{ et } dV = -2acd\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi + 2aad\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi^2 - aad\Phi$$

quibus valoribus ſubſtitutis adipiſcemur:

$$x = \frac{(c - a\,\text{coſ.}\,\Phi)\,\Phi}{2\pi} + \frac{a\,\text{ſin.}\,\Phi}{4\pi}$$

$$yy = \frac{(2cc - 2ac\,\text{coſ.}\,\Phi + aa\,\text{coſ.}\,\Phi^2)\,\Phi}{2\pi} - \frac{ac\,\text{ſin.}\,\Phi}{2\pi}$$

vnde ſi capiatur $a = 0$, fit

$$x = \frac{c\Phi}{2\pi} \text{ et } yy = \frac{2cc\Phi}{2\pi}, \text{ ideoque } yy = 2cx.$$

In genere autem erit

$$yy - 2cx = \frac{aa\Phi}{2\pi}\,\text{coſ.}\,\Phi^2 - \frac{ac\,\text{ſin.}\,\Phi}{\pi} \text{ et}$$

$$yy + 2cx = \frac{(2c - a\,\text{coſ.}\,\Phi)^2\,\Phi}{2\pi}$$

vbi notandum eſt, quo minor valor ipſi *a* tribuatur, eo propius curuam ad figuram parabolae eſſe acceſſuram.

23. Duo haec problemata in hoc vno comprehendi potuiſſent, vt curuae quaererentur, in quibus ſubnormales ſucceſſiuae PQ, QR, RS, ST etc. eſſent inter ſe aequales. Simul enim atque haec proprietas in quapiam curua locum habet, quadratum cuiusque applicatae a quadrato normalis praecedentis quantitate conſtante differt, quae ergo ſiue ſit euaneſcens, vt in problemate primo, ſiue data, vti in ſecundo, determinationem minus eſſentialem inuoluit; problema enim fieret impoſſibile, ſi iſta differentia, neque euaueſcens, neque conſtans, eſſe deberet. Verum inter has ſubnormales ſucceſſiuas PQ, QR, RS etc. aliae leges progreſſionis conſtitui poſſunt, vnde problemata alia non parum curioſa naſcentur. Hinc autem binas progreſſionis leges ſum contemplaturus, alteram arithmeticam, alteram geometricam, quoniam hinc methodus alia huiusmodi problemata ſoluendi facile colligi poterit.

Problema 3.

Tab. I. Fig. 2. 24. *Si ad terminum cuiusque ſubnormalis applicata conſtituatur, vt ex quouis curuae puncto* I *ſeries infinita huiusmodi ſubnormalium ſucceſſiuarum* PQ, QR, RS *etc. oriatur, inuenire eas lineas curuas, in quibus iſtae ſubnormales ſucceſſiuae progreſſionem arithmeticam conſtituant.*

Pro variabili principali aſſumatur angulus Φ reſpondens curuae puncto I, qui ſi creſcendo abeat in

$2\pi+\Phi$, $4\pi+\Phi$, $6\pi+\Phi$ etc. reſpondeat punctis curuae ſequentibus K, L, M etc. Horum autem ſingulorum angulorum, tam ſinus, quam coſinus, eſſe eosdem, euidens eſt. Quare ſi litterae P, Q, R, S etc. denotent functiones quascunque quantitatum ſin. Φ et coſ. Φ, eae communes erunt omnibus curuae punctis I, K, L, M etc. ac pro omnibus eosdem valores retinebunt. Quod ſi ergo ſubnormalis prima PQ ſtatuatur $=P\Phi+Q$, erit ſecunda $QR=2\pi P+P\Phi+Q$, tertia $RS=4\pi P+P\Phi+Q$, quarta $ST=6\pi P+P\Phi+Q$ etc. ſicque iſtae ſubnormales ſucceſſiuae progreſſionem arithmeticam conſtituent, cuius differentia eſt $=2\pi P$, vti problema poſtulat. Vnde ſi in cunctis his ſubnormalium progreſſionibus eadem eſſe debeat differentia, functionem P conſtantem eſſe oportet.

25. Quoniam autem ipſae hae ſubnormales differentias praebent abſciſſarum ſucceſſiuarum AP, AQ, AR, AS etc. ſtatuatur abſciſſa prima

$$AP=x=L\Phi^2+M\Phi+N$$

exiſtentibus L, M, N functionibus ipſarum ſin. Φ et coſ Φ, eritque abſciſſa ſecunda

$$AQ=L\Phi^2+M\Phi+N+4\pi L\Phi+4\pi\pi L+2\pi M$$

vnde fit differentia

$$PQ=4\pi L\Phi+4\pi\pi L+2\pi M$$

quae cum aequalis eſſe debeat primae ſubnormali PQ $=P\Phi+Q$, erit

$$P=4\pi L \text{ et } Q=4\pi\pi L+2\pi M$$

hocque

hocque modo ſimul ſequentes ſubnormales fiunt differentiae abſciſſarum ſequentium. Hinc igitur ſumta pro prima abſciſſa expreſſione

$AP = x = L\Phi^2 + M\Phi + N$, ſubnormalis erit

$PQ = 4\pi L\Phi + 4\pi\pi L + 2\pi M = t$

et ſequentes ſecundum differentiam $8\pi\pi L$ progrediuntur.

26. Ponamus nunc applicatam curuae $PI = y$, et quia ex ſubnormali $PQ = t$ habetur $\frac{y\,dy}{dx} = t$, erit $yy = 2\int t\,dx$, ideoque

$$yy = 4\pi\int(2L\Phi + 2\pi L + M)(\Phi\Phi dL + 2\Phi L d\Phi + \Phi dM + M d\Phi + dN)$$

quae formula euoluta praebet:

$$yy = 4\pi\int\left\{\begin{array}{l} 2L\Phi^3 dL + 4LL\Phi^2 d\Phi + 2LM\Phi d\Phi + 2\pi LM d\Phi \\ \quad + 2L\Phi^2 dM + 2L\Phi dN + 2\pi L dN \\ \quad + 2\pi L\Phi^2 dL + 4\pi LL\Phi d\Phi + MM d\Phi \\ \quad + M\Phi^2 dL \quad + 2\pi L d\Phi M + M dN \\ \qquad\qquad + 2LM\Phi d\Phi \\ \qquad\qquad + M\Phi dM \end{array}\right\}$$

quae ſiue integrari poteſt, ſiue ſecus, ſemper valorem idoneum pro applicata y praebet. Veluti ſi ponatur $M = 0$, et $N = 0$, at L ſtatuatur conſtans, vt ſit $x = L\Phi^2$, erit

$yy = 4\pi\int(4LL\Phi^2 d\Phi + 4\pi LL\Phi d\Phi)$, ſeu

$yy = \frac{16}{3}\pi LL\Phi^3 + 8\pi\pi LL\Phi^2 +$ Conſt.

Cum ergo ſit $\Phi = \sqrt{\frac{x}{L}}$, erit $yy = \frac{16}{3}\pi x\sqrt{Lx} + 8\pi\pi Lx +$ Conſt. Sit $8\pi\pi L = a$; fiet $yy = \frac{4}{3}x\sqrt{2ax} + ax + ab$, pro curua algebraica ordinis quarti.

Proble-

Problema 4.

27. *Si ad terminum cuiusque ſubnormalis applicata conſtituatur, vt a quouis curuae puncto* t *incipiendo ſeries infinita ſubnormalium ſucceſſiuarum* PQ, QR, RS *etc. proueniat, inuenire eos caſus, quibus iſtae ſubnormales conſtituant progreſſionem geometricam, cuius exponens ſit datus* $= n$.

Poſita ergo prima ſubnormali $PQ = t$, requiritur, vt ſit ſecunda $QR = nt$, tertia $RS = n^2 t$, quarta $ST = n^3 t$, et ita porro, ſumatur itenim angulus Φ pro variabili puncto I reſpondente, ita vt punctis ſequentibus K, L, M etc. reſpondeant anguli $2\pi + \Phi$, $4\pi + \Phi$, $6\pi + \Phi$ etc. quorum omnium idem eſt ſinus $= \sin \Phi$, idemque coſinus $= \cos . \Phi$; atque functiones quaecunque vniformes ipſarum $\sin . \Phi$ et $\cos . \Phi$ illis curuae punctis infinitis I, K, L, M etc. aeque conuenient, cuiusmodi functiones litteris maiusculis P, Q, R etc. indicemus. Problemati ergo ſatisfiet, ſi ponamus $t = n^{\frac{\Phi}{2\pi}} P$, tum enim poſito $\Phi + 2\pi$ loco Φ, ſubnormalis ſecunda erit $= n^{\frac{\Phi + 2\pi}{2\pi}} P = nt$, ſimilique modo ſequentes praeſcriptam progreſſionem geometricam conſtituent.

28. Pro abſciſſa igitur $AP = x$ aſſumi debet huiusmodi expreſſio $x = \frac{1}{n-1} \cdot n^{\frac{\Phi}{2\pi}} P + Q$, vt poſito $\Phi + 2\pi$ pro Φ, abſciſſa AP abeat in $AP + PQ$; vnde ſi vocemus applicatam $PI = y$, ob $\frac{y\,dy}{dx} = t$, habebimus $yy = 2\int t\,dx$, ideoque:

$$yy = \frac{1}{n-1} n^{\frac{\Phi}{\pi}} PP + 2\int n^{\frac{\Phi}{2\pi}} P\,dQ.$$

 Quare

Quare pro curuis problemati ſatisfacientibus aſſecuti ſumus has formulas generales:

$$x = \frac{1}{n-1} n^{\frac{\Phi}{2\pi}} P + Q$$

$$yy = \frac{1}{n-1} n^{\frac{\Phi}{\pi}} PP + 2\int n^{\frac{\Phi}{2\pi}} P\,dQ$$

vnde ſi ſit $Q = 0$, et pro $2\int n^{\frac{\Phi}{2\pi}} P\,dQ$ ſcribatur $\pm aa$, obtinetur ſtatim curua algebraica hac aequatione contenta:

$$yy \pm aa = (n-1)xx$$

quae praebet hyperbolam, ac, ſi fuerit $a = 0$, lineam rectam $y = x\sqrt{(n-1)}$.

29. Euoluamus etiam exemplum curuae tranſcendentis ſitque $P = a$ et $Q = b\,\text{ſin.}\Phi$, vt ſit

$$x = \frac{a}{n-1} n^{\frac{\Phi}{2\pi}} + b\,\text{ſin.}\Phi, \text{ et } yy = \frac{aa}{n-1} n^{\frac{\Phi}{\pi}} + 2ab\int n^{\frac{\Phi}{2\pi}} d\Phi\,\text{coſ.}\Phi$$

Cum autem ſit

$$\int n^{\frac{\Phi}{2\pi}} d\Phi\,\text{coſ.}\Phi = n^{\frac{\Phi}{2\pi}}\,\text{ſin.}\Phi - \frac{ln}{2\pi}\int n^{\frac{\Phi}{2\pi}} d\Phi\,\text{ſin.}\Phi \text{ et}$$

$$\int n^{\frac{\Phi}{2\pi}} d\Phi\,\text{ſin.}\Phi = -n^{\frac{\Phi}{2\pi}}\,\text{coſ.}\Phi + \frac{ln}{2\pi}\int n^{\frac{\Phi}{2\pi}} d\Phi\,\text{coſ.}\Phi, \text{ erit}$$

$$\int n^{\frac{\Phi}{2\pi}} d\Phi\,\text{coſ}\,\Phi = n^{\frac{\Phi}{2\pi}}\,\text{ſin.}\Phi + \frac{ln}{2\pi} n^{\frac{\Phi}{2\pi}}\,\text{coſ.}\Phi - \left(\frac{ln}{2\pi}\right)^2 \int n^{\frac{\Phi}{2\pi}} d\Phi\,\text{coſ.}\Phi$$

Quoniam igitur haec integratio ad ſe ipſam reducitur, ſi breuitatis gratia ponamus $\frac{ln}{2\pi} = \lambda$, adipiſcimur

$$\int n^{\frac{\Phi}{2\pi}} d\Phi\,\text{coſ.}\Phi = \frac{n^{\frac{\Phi}{2\pi}}(\text{ſin.}\Phi + \lambda\,\text{coſ.}\Phi)}{1 + \lambda\lambda}$$

hincque

hincque curua quaeſita his formulis determinabitur:

$$x = \frac{a}{n-1} n^{\frac{\Phi}{2\pi}} + b \,\text{ſin.}\, \Phi$$

$$yy = \frac{aa}{n-1} n^{\frac{\Phi}{\pi}} + \frac{2ab}{1+\lambda\lambda} n^{\frac{\Phi}{2\pi}} (\text{ſin.}\,\Phi + \lambda \,\text{coſ.}\, \Phi) \pm cc$$

vnde, eliminanda quantitate exponentiali, fit

$$yy \mp cc = \frac{(n-1)(x - b\,\text{ſin.}\,\Phi)}{1+\lambda\lambda}((1+\lambda\lambda)x + (1-\lambda\lambda)b\,\text{ſin.}\,\Phi + 2\lambda b \,\text{coſ.}\, \Phi).$$

30. Solutione autem horum quatuor problematum methodum aperuiſſe videor, cuius ope alia quoque huius generis problemata reſolui queant, in quibus ſcilicet ſimul ad infinita lineae curuae inueſtigandae puncta eſt reſpiciendum. Methodus vero iſta in hoc conſiſtit, quod loco primariae variabilis accipi debeat angulus Φ, qui, dum continuo quaternis rectis augetur, ſucceſſiue conueniat ſingulis illis punctis; quoniam enim hi anguli omnes Φ, $2\pi + \Phi$, $4\pi + \Phi$, $6\pi + \Phi$, etc. eundem habent ſinum $= \text{ſin.}\,\Phi$, eundemque coſinum $= \text{coſ.}\,\Phi$, functiones quaecunque vniformes harum duarum quantitatum omnibus illis punctis correlatis aeque conuenient. Per compoſitionem autem idoneam talium functionum, vna cum ipſo angulo Φ, huiusmodi problematum ſolutiones ſunt ſuſcipiendae, eo modo, quo in his quatuor problematibus ſum vſus.

DILVCIDATIONES DE TAVTOCHRONIS IN MEDIO RESISTENTE.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Difficillima eſt quaeſtio de inueniendis curuis tautochronis in medio reſiſtente, quae ſcilicet hanc habeant proprietatem, vt corpus ſuper iis deſcendens ſemper eodem tempore ad punctum infimum perueniat, ex quocunque curuae puncto deſcenſum inceperit. Curua autem hac proprietate praedita vocari ſolet *tautochrona deſcenſuum*; dum ea curua, quae ad aſcenſus aequidiurnos eſt accommodata, *tautochrona aſcenſuum* appellatur. Neque enim hae duae curuae in medio reſiſtente, vti fit in vacuo, inter ſe conueniunt; verum vtraque ſeorſim inueſtigari debet, vbi quidem commode vſu venit, vt, ſi altera fuerit reperta, eadem methodo altera expedite aſſignari poſſit; ex quo ſufficiet, hanc inquiſitionem, vel pro ſolo deſcenſu, vel aſcenſu, ſuſcepiſſe.

2. Pro vacuo quidem *Hugenius* immortalem laudem eſt aſſecutus, dum demonſtrauit, in motu corporum ſuper cycloide, tam omnes deſcenſus, quam aſcenſus, aequalibus abſolui temporibus. Deinde *Newtonus* oſtendit, eandem tautochroniſmi proprietatem cycloidi etiam nunc conue-

conuenire in medio, quod reſiſtat in ratione ſimplici celeritatum, ita vt etiam hoc caſu tautochrona aſcenſuum non diſcrepet a tautochrona deſcenſuum, perinde vti fit in vacuo. Hanc inſignem cycloidis proprietatem *Newtonus* geometrice demonſtrauit, quo ipſe ſummas difficultates, quae in inueſtigatione Analytica occurrunt, feliciter ſuperauit. Neque vero ambo hi ſummi Viri quaeſtionem a priori aggreſſi negotium confecerunt, ſed, dum ſibi propoſuerant, motum corporum ſuper cycloide ſcrutari, quaſi praeter expectationem tautochronismi proprietatem deprehenderunt.

3. In aliis medii reſiſtentis hypotheſibus diu fruſtra tautochronae ſunt inueſtigatae, donec tandem mihi contigit, pro mediis, quae in duplicata ratione celeritatum reſiſtunt, tautochronas definire, in quo quidem negotio vſus ſum methodo directa, quae me ad cognitionem harum curuarum deduxit. Verum haec methodus ita eſt comparata, quoniam expreſſionem finitam pro celeritate corporis in quouis curuae loco requirit, vt ad alias reſiſtentiae hypotheſes, quibus talem expreſſionem exhibere non licet, accommodari non poſſit. Neque etiam ei locus relinquitur in medio, cuius reſiſtentia ipſam celeritatum rationem ſequitur, etſi aliunde conſtet tautochronismi proprietatem in cycloidem competere. Interim tamen, ſi reſiſtentia ſit quam minima, per methodum approximandi in omnibus hypotheſibus tautochronas aſſignaui, quod argumentum fuſius pertractaui in Mechanicae meae Tomo ſecundo. Inde tamen nullum ſubſidium ſuppeditabatur ad tautochronas determinandas, ſi reſiſtentia fuerit maior;

ior; ita vt hoc problema pro aliis hypotheſibus praeter eas, quae vel ipſis celeritatibus, vel earum quadratis ſint proportionales, adhuc pro inſoluto ſit habendum.

4. Quoniam autem hae duae hypotheſes diuerſiſſimas methodos requirunt, eaque methodus, qua tautochronam in medio, quod reſiſtit in duplicata ratione celeritatum, elicui, nullum vſum praeſtat in medio, quod in ipſa celeritatum ratione reſiſtit; haud parum is praeſtitiſſe erit cenſendus, qui eiusmodi methodum tradiderit, quae ad ambas has hypotheſes pari cum ſucceſſu adhiberi queat. Talem autem methodum Clar. *Fontainio* acceptam referre debemus, quae vti a ſumma ingenii ſagacitate eſt profecta, ita etiam omnino digna videtur, quae diligentius perpendatur, eiusque vſus vberius explicetur; praeſertim cum eius ope etiam in medio, cuius reſiſtentia partim rationem ſimplicem, partim rationem duplicatam, celeritatum ſequitur, tautochrona inueniri poſſit, quod mea methodo praeſtari nequit.

Tab. I. Fig. 4. 5. In curua igitur tautochrona inueſtiganda Vir Celeberrimus conſiderat duos arcus AF et AF′ infinite parum a ſe inuicem diſcrepantes, in eamque curuae affectionem inquirit, vt tempora, quibus hi arcus abſoluuntur, fiant inter ſe aequalia. Ponamus ergo arcum $AF = a$, et $AF' = a + da$, vt ſit $FF' = da$; et quoniam duos motus per AF et AF′ eodem tempore abſoluendos inter ſe comparari oportet, ſit t portio quaecunque indefinita huius temporis, cui in motu per AF reſpondeat arcus $AM = s$, in altero autem motu per

AF′

AF' arcus AM' $= s'$; ita vt in motu per AF arcus AM, et in motu per AF' arcus AM', eodem tempore t percurratur. Ex quo ſequitur, ſi tempus t euaneſcat, vtrumque arcum AM $= s$ et AM' $= s'$ in nihilum abire, ideoque eorum differentiam MM' $= s' - s$ euaneſcere debere; ſin autem pro t aſſumatur tempus totius motus, neceſſe eſt, vt tum arcus AM $= s$ abeat in AF $= a$, et arcus AM' $= s'$ in AF' $= a + da$; eorumque ergo differentia MM' fiat $= da$. Creſcente ergo arcu AM creſcet particula MM' $= s' - s$, ita, vt ſumto $s = 0$, fiat $s' - s = 0$, et ſumto $s = a$, fiat $s' - s = da$.

6. Quodſi autem arcus indefinitus AM $= s$ valorem quemcunque minorem quam AF obtineat; differentia MM' $= s' - s$ minor erit quam FF' $= da$, atque a da ita pendebit, vt quo maius extiterit elementum FF', in eadem ratione elementum MM' creſcat. Statuatur ergo MM' $= s' - s = Q\,da$; et quantitas Q pendebit certo quodam modo, tam ab arcu AM $= s$, quam ab arcu toto AF $= a$, ita vt ſi fiat $s = 0$, ſimul ipſa euaneſcat, at poſito $s = a$ vt euadat $Q = 1$. Quare cum Q ſit functio quantitatum s et a, poſita vtraque variabili, ſtatuatur $dQ = M\,ds + N\,da$. Vnde patet, ſi arcui AM $= s$ incrementum tribuatur ds, manente puncto F fixo, tum functionem Q abire in $Q + M\,ds$. Capiatur ergo M$m = ds$, ſimulque M'$m' = ds'$; et cum ſit $\frac{MM'}{da} = Q$, pro ſtatu proximo, quo s abit in $s + ds$, habebitur $\frac{mm'}{da} = Q + M\,ds$; ideoque $M\,ds = \frac{mm' - MM'}{da} = \frac{ds' - ds}{da}$. Hinc igitur indoles

doles functionis Q nobis praebet $ds'-ds=Mdsda$, cum eſſet $s'-s=Qda$, exiſtente $dQ=Mds+Nda$.

7. Ponamus iam in motu per arcum AF celeritatem corporis in M eſſe $=v$, et in $m=v+dv$, ita vt curuae elementum Mm conficiatur tempuſculo $dt=\frac{ds}{v}$; eodem autem tempuſculo neceſſe eſt, vt in motu per arcum AF′ conficiatur elementum $M'm'=ds'$: ſi ergo in hoc motu ſtatuatur celeritas corporis in $M'=v'$, et in $m'=v'+dv'$, erit etiam $dt=\frac{ds'}{v'}$, vnde ſequitur, fore $\frac{ds'}{v'}=\frac{ds}{v}$; hincque $v'=\frac{v\,ds'}{ds}$; et $v'-v=\frac{v(ds'-ds)}{ds}=Mvda$, ob $ds'-ds=Mdsda$. Quam ob rem habebimus $v'=v(1+Mda)$, ſicque ſi functio Q eſſet cognita, ex celeritate in puncto M pro motu per AF innoteſceret celeritas in puncto homologo M′ pro motu per AF′, ſumtis arcubus AM et AM′ in vtroque motu iſochronis. Verum ex ratione reſiſtentiae et viribus ſollicitantibus per principia motus elicitur aequatio differentialis, qua acceleratio elementaris in vtroque motu per AF et AF′ definitur. Poſito ergo $dM=Lds$, dum arcus s incrementum ds capit, celeritasque v abit in $v+dv$, erit $dv'=dv(1+Mda)+Lvdsda$.

8. His pro conditione motus ad tautochroniſmum obtinendum in genere praemiſſis, progrediamur ad ipſam motus determinationem, ac tantum quidem conſideremus caſum grauitatis naturalis, qua corpus perpetuo deorſum vrgetur, quia vires ſollicitantes abſolutae inueſtigationem tautochronarum parum afficiunt; reſiſtentia vero ſit functioni cuicunque celeritatis v, quae denotetur per V, proportionalis, deſignetque V′ ſimilem

lem functionem ipſius v'. Hunc in finem capiatur axis verticalis AE, ſuper quo ſit abſciſſa arcui $AM = s$ reſpondens $AP = x$; ac natura curuae certa quadam relatione inter s et x continebitur, quae vbique immunis eſſe debet a quantitate arcus $AF = a$, quandoquidem vtcunque arcus a varietur, omnes ſiue aſcenſus ſiue deſcenſus toti eodem tempore ſuper eadem curua abſolui debent. Si igitur ponamus $dx = p\,ds$, neceſſe eſt, vt quantitas p arcum a non inuoluat, ſed ſit functio ipſius s tantum, et quantitatum vere conſtantium.

9. Nunc autem, poſita littera g pro grauitate deorſum ſollicitante, leges motus pro motu per arcum AF praebent hanc aequationem:

$$2\,v\,dv = -g\,dx \pm V\,ds = -g\,p\,ds \pm V\,ds$$

vbi ſignum ſuperius ad deſcenſum, inferius vero ad aſcenſum refertur. Neglecta ergo hac ambiguitate, quippe quae commode ipſi quantitati V inuoluitur, conſideremus hanc aequationem:

$$2\,v\,dv = -g\,p\,ds + V\,ds,$$

ex qua pro motu per arcum AF′ habebimus hanc:

$$2\,v'\,dv' = -g\,p'\,ds' + V'\,ds',$$

quae ex illa naſcitur, ſi pro v ſcribamus v', et arcui s incrementum tribuamus $s' - s = Q\,da$. Quodſi ergo p eiusmodi ſit functio ipſius s, vt fiat $dp = q\,ds$, erit $p' = p + q\,Q\,da$. Tum vero iam obtinuimus $ds' = ds(1 + M\,da)$ $v' = v(1 + M\,da)$ et $dv' = dv(1 + M\,da) + L\,v\,ds\,da$.

10. Subſtituamus igitur hos valores in poſteriori aequatione, ac prodibit

$$2vdv(1+Mda)^2+2Lvvdsda(1+Mda)=-gpds(1+Mda)$$
$$-gqQdsda(1+mda)+V'ds(1+Mda)$$

quae per $(1+Mda)^2$ diuiſa dat

$$2vdv=-\frac{2Lvvdsda-gpds-gqQdsda+V'ds}{1+Mda}.$$

Cum igitur ex priori ſit $2vdv=-gpds+Vds$, erit aequatione facta,

$$-2Lvvdsda-gqQdsda+V'ds=-gpMdsda$$
$$+V'ds+Vdsda$$

quae per $dsda$ diuiſa praebet

$$2Lvv+gqQ-gpM+MV=\frac{1}{da}(V'-V).$$

Totum ergo hoc negotium huc redit, vt iſta aequatio conficiatur, quod quo commodius fieri poſſit, cum ſit V functio ipſius v, ponamus $dV=Udv$, et cum V' oriatur ex V, ſi pro v ponatur $v'=v+Mvda$, erit $V'=V+MUvda$, noſtra aequatio adimplenda erit

$$2Lvv+gqQ-gpM+MV-MUv=0,$$

cui quomodo ſatisfieri poſſit, in ſequentibus exemplis videamus.

Problema 1.

11. In hypotheſi grauitatis vniformis g, ſi nulla fuerit reſiſtentia, corpusue in vacuo moueatur, inuenire curuam tautochronam.

Solutio.

Quia reſiſtentia eſt nulla, erit $V=0$, et $U=0$, ideoque habebitur haec aequatio:

$$2Lvv+gqQ-gpm=0$$

vbi

vbi eſt $dp = qds$; tum vero $dQ = M ds$, et $dM = L ds$, ſiquidem a pro conſtante accipiatur; vbi notandum eſt, quantitates Q M et L inuoluere poſſe a, at p et q ab a liberas eſſe debere. Cum igitur v tantum inſit in primo termino, fiat $L = 0$, eritque $M = f$ et $Q = fs + g$; quia vero poſito $s = 0$ fieri oportet $Q = 0$, et caſu $s = a$, $Q = 1$, euidens eſt, poni debere $g = 0$; et $f = \frac{1}{a}$; ita vt ſit $M = \frac{1}{a}$ et $Q = \frac{s}{a}$, quibus valoribus ſubſtitutis aequatio noſtra abit in $\frac{gqs}{a} - \frac{gp}{a} = 0$, ſeu $p = qs$. At eſt $q = \frac{dp}{ds}$, eritque $pds = sdp$, hincque $p = \frac{s}{c}$, exiſtente c conſtante, ab a non pendente; ex quo pro curua quaeſita reſultat haec aequatio: $dx = pds = \frac{sds}{c}$, ſeu $ss = 2cx$, quae eſt pro cycloide.

Problema 2.

12. In hypotheſi grauitatis vniformis g, ſi reſiſtentia fuerit conſtans, ſeu momentis temporum proportionalis, inuenire curuam tautochronam.

Solutio.

Sit igitur reſiſtentia $V = k$, quae quantitas conſtans vtique non implicat a, eritque $U = 0$, et aequatio adimplenda eſt

$$2Lvv + gqQ - gpM + kM = 0$$

exiſtente $dp = qds$; $dQ = M ds$; et $dM = L ds$. Fiat ergo iterum $L = 0$, eritque vt ante $M = \frac{1}{a}$, et $Q = \frac{s}{a}$; vnde adipiſcimur hanc aequationem:

$$\frac{gqs}{a} - \frac{gp}{a} + \frac{k}{a} = 0, \text{ ſeu } gqs - gp + k = 0,$$

X 2 quae

quae per ds multiplicata ob $qds = dp$ praebet

$$gsdp - gpds + kds = 0,$$ et integrando $\frac{gp}{s} = \frac{k}{s} + \frac{g}{c}$

ſiue $p = \frac{s}{c} + \frac{k}{g} = \frac{dx}{ds}$, vnde denuo integrando obtinebitur $ss + \frac{2kcs}{g} = 2cx$, quae aequatio iterum eſt pro cycloide, in qua punctum A ibi eſt capiendum, vbi tangens cum verticali AE angulum facit, cuius coſinus eſt $= \frac{k}{g}$; niſi ergo reſiſtentia k minor ſit grauitate g, quaeſtio abſurdum implicat, ac ſi eſſet $k = g$, punctum A in cuſpidem cycloidis incideret, arcusque motui deſtinatus euaneſceret.

Problema 3.

13. In hypotheſi grauitatis vniformis g, ſi reſiſtentia ipſis celeritatibus fuerit proportionalis, inuenire curuam tautochronam.

Solutio.

Sit igitur reſiſtentia $V = mv$, erit $U = m$, et aequatio habebitur

$$2Lvv + gqQ - gpM + mvM - mvM = 0$$

quae ergo ad eam, quam pro vacuo inueuimus, reducitur; ita vt eſſe debeat: $L = 0$, $M = \frac{1}{a}$ et $Q = \frac{s}{a}$, ſicque, vt ibi, prodit $p = qs$, porroque $p = \frac{s}{c}$ et $ss = 2cx$. Hoc ergo caſu perinde atque in vacuo cyclois tautochroniſmi proprietatem conſeruat.

Problema 4.

14. In hypotheſi grauitatis vniformis g, ſi reſiſtentia fuerit quadratis celeritatum proportionalis, inuenire curuam tautachronam.

Solutio.

Solutio.

Statuatur reſiſtentia $V = nv^2$, vt ſit $U = 2nv$, habebiturque haec aequatio:

$$2Lvv + gqQ - gpM + nMv^2 - 2nMv^2 = 0$$

ſeu $2Lvv - nMv^2 + g(qQ - pM) = 0$.

Iam primo vt termini continentes vv tollantur, fiat $2L = nM$, et cum ſit $dQ = Mds$ et $dM = Lds$, conſiderata hic quantitate a vt conſtante, conficietur $2Lds = 2dM = nMds$, et integrando $M = \alpha e^{\frac{ns}{2}}$, porroque $Q = \frac{2\alpha}{n}(e^{\frac{ns}{2}} - 1)$, vt fiat $Q = 0$, ſi $s = 0$, at quia ſumto $s = a$, fieri debet $Q = 1$, erit $\alpha = \frac{n}{2(e^{\frac{na}{2}} - 1)}$.

His autem valoribus inuentis conſequimur

$qQ - pM = 0$, quae per α diuiſa dat

$\frac{2q}{n}(e^{\frac{ns}{2}} - 1) = e^{\frac{ns}{2}}p$, et per ds multiplicando, ob $qds = dp$,

$$2dp(e^{\frac{ns}{2}} - 1) = ne^{\frac{ns}{2}}pds \text{ ſeu } \frac{dp}{p} = \frac{ne^{\frac{ns}{2}}ds}{2(e^{\frac{ns}{2}} - 1)}$$

vnde fit $p = \frac{1}{c}(e^{\frac{ns}{2}} - 1) = \frac{dx}{ds}$.

Quare aequatio pro tautochrona erit

$$cdx = ds(e^{\frac{ns}{2}} - 1) \text{ et } \frac{2}{n}(e^{\frac{ns}{2}} - 1) - s = cx$$

quae eſt eadem, quam ex diuerſiſſimis principiis olim inueni.

Problema 5.

15. In hypotheſi grauitatis vniformi g, ſi reſiſtentia fuerit partim conſtans, partim ipſis celeritatibus, partim vero quadratis celeritatum proportionalis, inuenire curuam tautochronam.

Solutio.

Statuatur ergo reſiſtentia $V = k + mv + nvv$; et cum ſit $U = m + 2nv$, noſtra aequatio erit

$$\left.\begin{matrix} 2Lvv + g(qQ - pM) + kM + mMv + nMvv \\ - mMv - 2nMvv \end{matrix}\right\} = 0$$

ſiue $2Lvv - nMvv + g(qQ - pM) + kM = 0$.
Fiat ergo iterum $2L = nM$, et ob $dQ = Mds$, $dM = Lds$, erit, vt ante,

$$M = \alpha e^{\frac{ns}{2}} \text{ et } Q = \frac{2\alpha}{n}(e^{\frac{ns}{2}} - 1) \text{ exiſtente } \alpha = \frac{n}{2(e^{\frac{na}{2}} - 1)},$$

quibus valoribus ſubſtitutis, et aequatione per α diuiſa, habebimus,

$$\frac{2gq}{n}(e^{\frac{ns}{2}} - 1) gpe^{\frac{ns}{2}} + ke^{\frac{ns}{2}} = 0$$

quae per ds multiplicata, ob $qds = dp$, dat

$$\frac{2gdp}{n}(e^{\frac{ns}{2}} - 1) - gpe^{\frac{ns}{2}}ds + ke^{\frac{ns}{2}} = 0 \text{ ſeu}$$

$$\frac{gdp}{gp - k} = \frac{ne^{\frac{ns}{2}}ds}{2(e^{\frac{ns}{2}} - 1)}, \text{ cuius integrale eſt}$$

$gp - k = \frac{g}{c}(e^{\frac{ns}{2}} - 1)$, hincque $gcdx = ckds + g(e^{\frac{ns}{2}} - 1)ds$

vnde

vnde tautochrona quaeſita hac continebitur aequatione:

$$gcx = cks + \frac{2g}{n}(e^{\frac{ns}{2}} - 1) - gs$$

ſeu $x = \frac{(ck-g)}{gc} + \frac{2}{nc}(e^{\frac{ns}{2}} - 1)$.

16. En ergo methodum a Cel. *Fontanio* excogitatam, cui eo maior debetur laus, quod pari ſucceſſu tam pro reſiſtentia celeritatibus, quam earum quadratis proportionali, tautochronas exhibeat, dum mea methodus ad reſiſtentiam celeritatibus ipſis proportionalem nullo modo accommodari patitur. Cum igitur caſus poſtremi problematis neque mea methodo, neque vlla alia etiamnunc cognita, expediri poſſit, plurimum profecto Vir Acutiſſimus praeſtitiſſe eſt cenſendus, quod tam eximiam methodum in medium attulerit, quae ad alias non minus arduas inueſtigationes viam parare videtur. Interim tamen non ſine dolore fateri cogimur, hanc ingenioſam methodum non vltra hos quinque caſus, vel ſaltem vltimum, qui reliquos omnes in ſe complectitur, extendi poſſe; ſi enim reſiſtentia alii celeritatum dignitati proportionalis aſſumatur, non amplius celeritatem ex aequatione eliminare, neque idcirco ex ea aequationem pro tautochrona elicere licet. Nihilo vero minus id ipſum, quod haec methodus nobis largitur, grato animo agnoſcere debemus.

17. Curua igitur tautochrona, quam pro reſiſtentia $V = k + mv + nvv$ ſumus adepti, vtique meretur, quae accuratius examinetur, motus ſuper ea, ex quo tautochroniſmus naſcitur, diligentius perpendatur.

tur. Quod quidem ad ipſam curuam attinet, eius natura hac exprimitur aequatione finita:

$$c(gx-ks)-\frac{2g}{n}(e^{\frac{ns}{2}}-1)-gs$$

quam ex hac aequatione differentiali eruimus:

$$c(gdx-kds)=g(e^{\frac{ns}{2}}-1)ds.$$

Hinc igitur, ſi quantitatem exponentialem eliminemus, obtinebimus hanc aequationem differentialem:

$$gdx-kds=\frac{n}{2}ds(gx-ks)+\frac{ng}{2c}sds$$

circa quas aequationes imprimis notandum eſt, quantitatem m in determinationem tautochronae non ingredi, ita vt reſiſtentia ipſis celeritatibus proportionalis naturam tautochronae non immutet.

18. Cognita iam curua videamus, quomodo motus corporis ſuper ea ſit comparatus; ac ſi celeritatem in M ponamus $=v$, erit ex conditione motus

$$2vdv=-gdx+(k+mv+nvv)ds$$

cum autem ſit $gdx-kds=\frac{g}{c}(e^{\frac{ns}{2}}-1)ds$, eliminando dx, habebimus

$$2vdv+\frac{g}{c}(e^{\frac{ns}{2}}-1)ds-mvds-nvvds=0$$

vnde ad quoduis curuae punctum celeritas corporis determinatur. Phaenomena autem huius motus, quatenus arcus $AF=a$ et $AF'=a+da$ inter ſe comparantur, ita ſe habebunt, vt ſit, ſumtis arcubus AM et AM′ aequidiurnis, in hoc gemino motu

$$MM'=\frac{e^{\frac{ns}{2}}-1}{e^{\frac{na}{2}}-1}.FF'; \quad M'm'=Mm+\frac{ne^{\frac{ns}{2}}.MmFF'}{2(e^{\frac{na}{2}}-1)}$$

Cele-

Celeritas vero in puncto M′ pro motu per AF′ erit

$$v' = v + \frac{ne^{\frac{ns}{2}} v . FF'}{2(e^{\frac{na}{2}} - 1)}.$$

At $\frac{ds}{v}$ dat elementum temporis t, quo arcus AM abſoluitur, quod integratum et per totum arcum AM extenſum erit conſtans.

19 Quamquam autem hinc certi ſumus, omnes ſiue deſcenſus, ſiue aſcenſus, ſuper hac curua inter ſe eſſe aequidiurnos, tamen ipſum tempus difficulter aſſignatur, multoque minus in promtu eſt, ex aequatione inter s et v rationem tautochronismi demonſtrare, quod tamen facile praeſtari poſſet, ſi pars illa reſiſtentiae, quae ipſis celeritatibus eſt proportionalis, abeſſet, ſeu ſi eſſet $m = 0$; atque in hoc ipſo cauſa latet, quod iſta reſiſtentiae hypotheſis meam methodum reſpuat. Operae ergo pretium erit, inueſtigare, quemadmodum expreſſio temporis pro motu corporis ſuper hac curua in genere futura ſit comparata, et quomodo ea ad tautochronismum perducatur. Hunc in finem integratio huius aequationis:

$$2vdv - mvds - nvvds + \lambda(e^{\frac{ns}{2}} - 1)ds = 0$$

inueſtigari debet, in qua pro $\frac{g}{c}$ poſui λ, ita vt λ iam ſit conſtans arbitraria.

20. Primo quidem intuitu haec aequatio tractatu admodum difficilis videtur; verum haec ſubſtitutio $v = (e^{\frac{ns}{2}} - 1)u$, qua fit $dv = (e^{\frac{ns}{2}} - 1)du + \frac{n}{2}e^{\frac{ns}{2}}uds$, felici cum ſucceſſu adhibebitur: fiet enim

$$2udu(e^{\frac{ns}{2}} - 1) - muds + nuuds + \lambda ds = 0$$

 quae

gens eſt $\frac{\sqrt{(4\alpha - mm)}}{m}$; pro aſcenſibus autem hac reductione non erat opus.

23. Hic notatu dignum deprehendimus, quod in aequatione pro curua tautochrona littera m, in expreſſione autem temporis littera n, non reperiatur, neque etiam littera k; ita vt, manente conſtante α eadem, tempus tantum a parte reſiſtentiae, quae ipſi celeritati eſt proportionalis, afficiatur. Quodſi haec pars penitus abſit, ſeu $m = 0$ ob A tang. $\infty = \frac{\pi}{2}$, fit tam deſcenſus quam aſcenſus tempus $= \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$, at exiſtente quantitate m quam minima, tempus deſcenſus colligitur $= \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{m}{\alpha}$; tempus vero aſcenſus $= \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{m}{\alpha}$. Creſcente autem porro quantitate m, donec fiat $m = 2\sqrt{\alpha}$, tempus deſcenſus in infinitum excreſcit, quia corpus nunquam vsque ad punctum infimum ſuper curua peruenire poteſt, aſcenſus vero tempus hoc caſu fit $= \frac{4}{m} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$. Si fieret $m > 2\sqrt{\alpha}$, tum multo magis deſcenſus nunquam finirentur, aſcenſus autem tempus a logarithmis pendebit, eritque $= \frac{2}{\sqrt{(mm - 4\alpha)}}\, l \frac{m + \sqrt{(mm - 4\alpha)}}{m - \sqrt{(mm - 4\alpha)}}$.

24. Pro deſcenſu autem celeritas in ſingulis curvae punctis per hanc aequationem integralem determinabitur:

$$l \frac{\frac{\alpha}{n}\left(1 - e^{\frac{-ns}{2}}\right)^2}{\frac{\alpha}{n}\left(1 - e^{\frac{-ns}{2}}\right)^2 - m e^{\frac{-ns}{2}} v \left(1 - e^{\frac{-ns}{2}}\right) + n e^{\frac{-ns}{2}} vv} = \frac{2m}{\sqrt{(4\alpha - mm)}}$$

$$\left(\pi - \text{A tang.} \frac{e^{\frac{-ns}{2}} v \sqrt{(4\alpha - mm)}}{m e^{\frac{-ns}{2}} v - \frac{2\alpha}{n}\left(1 - e^{\frac{-ns}{2}}\right)}\right)$$

Pro

Pro aſcenſu vero haec habebitur celeritatis determinatio

$$l\frac{\frac{\alpha}{n}(e^{\frac{na}{2}}-1)^2}{\frac{\alpha}{n}(e^{\frac{ns}{2}}-1)^2+me^{\frac{ns}{2}}v(e^{\frac{ns}{2}}-1)+ne^{ns}vv}=\frac{2m}{\surd(4\alpha-mm)}$$

$$\text{A tang.}\frac{e^{\frac{ns}{2}}v\surd(4\alpha-mm)}{me^{\frac{ns}{2}}v+\frac{2\alpha}{n}(e^{\frac{ns}{2}}-1)}$$

quae formulae, ſi in reſiſtentia $V=k+mv+nvv$ terminus mv euaneſcat, multo fiunt ſimpliciores; nam ob $m=0$, erit pro deſcenſu:

$$\alpha(1-e^{\frac{-na}{2}})^2=\alpha(1-e^{\frac{-ns}{2}})^2+nne^{-ns}vv$$

et pro aſcenſu:

$$\alpha(e^{\frac{na}{2}}-1)^2=\alpha(e^{\frac{ns}{2}}-1)^2+nne^{ns}vv$$

ſin autem ſit $n=0$, erit pro deſcenſu:

$$l\frac{\frac{1}{4}\alpha aa}{\frac{1}{4}\alpha ss-\frac{1}{2}mvs+vv}=\frac{2m}{(\surd 4\alpha-mm)}\left(\pi-\text{A tang.}\frac{v\surd(4\alpha-mm)}{mv-\alpha s}\right)$$

et pro aſcenſu:

$$l\frac{\frac{1}{4}\alpha aa}{\frac{1}{4}\alpha ss+\frac{1}{2}mvs+vv}=\frac{2m}{\surd(4\alpha-mm)}\text{A tang.}\frac{v\surd(4\alpha-mm)}{mv+\alpha s}$$

25. Tum vero ſi tempus per arcum quemcunque $AM=s$ ponatur $=t$, erit pro deſcenſu ſuper tautochrona deſcenſuum:

$$t=\frac{4}{\surd(4\alpha-mm)}\left(\text{A tang.}\frac{e^{\frac{-ns}{2}}v\surd(4\alpha-mm)}{me^{\frac{-ns}{2}}v-\frac{2\alpha}{n}(1-e^{\frac{-ns}{2}})}\right.$$

$$\left.-\text{A tang.}\frac{\surd(4\alpha-mm)}{m}\right)$$

 et

et pro aſcenſu ſuper tautochrona aſcenſuum

$$t = \frac{4}{\sqrt{(4\alpha - mm)}} \left(\text{A tang.} \frac{\sqrt{(4\alpha - mm)}}{m} - \text{A tang.} \frac{e^{\frac{ns}{2}} v \sqrt{(4\alpha - mm)}}{m e^{\frac{ns}{2}} v + \frac{2\alpha}{n}(e^{\frac{ns}{2}} - 1)} \right)$$

Vnde ſi ſit $m = 0$, erit pro deſcenſu:

$$t = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \left(\frac{\pi}{2} - \text{A tang.} \frac{n e^{\frac{-ns}{2}} v}{(1 - e^{\frac{-ns}{2}})\sqrt{\alpha}} \right)$$

et pro aſcenſu:

$$t = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \left(\frac{\pi}{2} - \text{A tang.} \frac{n e^{\frac{ns}{2}} v}{(e^{\frac{ns}{2}} - 1)\sqrt{\alpha}} \right)$$

vbi quidem valores ipſius v ex ſuperioribus aequationibus per arcum s determinari debent.

26. Ex his igitur perſpicuum eſt, quomodo curvae, per methodum Celeb. *Fontanii* inuentae, tautochronismum producant, id quod ex ipſa inueſtigationis ratione minus intelligitur. At vero in hoc ipſo praeſtantia huius methodi conſiſtit, quod non indigeat indefinita temporis expreſſione, ita vt etiamſi, eius ope curuae tautochronae ſint inuentae, tamen inde nihil certi, neque de motu corporis ſuper his curuis, neque de ipſa temporis quantitate, innoteſcat. Has igitur res demum poſt inuentas curuas tautochronas per calculum peculiarem inueſtigare licuit; ac niſi modus ſe obtuliſſet hanc aequationem differentialem reſoluendi:

$$2vdv - mvds - nvvds + \lambda(e^{\frac{ns}{2}} - 1)ds = 0$$

hanc

hanc illuſtrationem ne quidem abſoluere in poteſtate fuiſſet, quod eo magis mirandum videtur, quod etiam ſine huius aequationis reſolutione conuicti fuerimus, curuas inuentas reuera tautochroniſmi proprietate eſſe praeditas, etiamſi ipſa motus determinatio latuiſſet; quam ob cauſam haec methodus tautochronas inueſtigandi ſummis laudibus digna eſt cenſenda.

27. Si autem attentius examinemus, in quanam re vis huius admirabilis methodi conſiſtat, eam in hoc poſitam reperiemus, quod non ex ipſa aequatione fundamentali

$$2vdv + gpds - Vds = 0$$

qua motus natura in genere exprimitur, tautochroniſmi conditio petatur, ſed ex ea per indolem tautochroniſmi alia aequatio, in qua non amplius inſit differentiale dv, eliciatur, cui ſit ſatisfaciendum. Introducta ſcilicet functione indefinita ipſarum s et a, quae erat Q, et quam ita comparatam eſſe oportet, vt poſito $s = 0$, fiat $Q = 0$, poſito autem $s = a$, fiat $Q = 1$, poſuimus $dQ = Mds$, et $dM = Lds$, tum vero $dp = qds$, et $dV = Udv$; quibus poſitis ſatisfieri oportebat huic aequationi:

$$2Lvv + g(qQ - pM) + M(V - Uv) = 0$$

ita vt etiamſi quantitates Q, M et L inuoluant quantitatem a, tamen quantitates p et q ab ea immunes reſultent.

28. Cum autem haec aequatio adhuc celeritatem v contineat, quae quemadmodum ab s et a pendeat, ex aequatione principali $2vdv + gpds - Vds = 0$

diffi-

definiri deberet, in quo ipſo autem ſumma difficultas verſatur: diſpiciendum eſt, vtrum illa aequatio non ſine huius ſubſidio reſolui poſſit. Quod ſi in genere praeſtari poſſet, haberetur methodus latiſſime patens, omnes tautochronas in quocunque medio reſiſtenti inueniendi; verum talis reſolutis iis tantum caſibus ſuccedit, quibus functionem Q cum ſuis deriuatis ita per s et a determinare licet, vt quantitas v prorſus ex calculo exterminetur; tum enim cuiuscunque ea fuerit naturae, quae quidem aequatione principali determinatur, quoniam non amplius in calculo ineſt, aequatio reſidua definiet quantitates p et q, vnde ob $dx=pds$, et $dp=qds$, natura curuae quaeſitae determinatur, ſi modo quantitas a ex ea penitus abierit, vti vſu venit in exemplis ſupra allatis.

29. Facile autem perſpicitur, hoc commodum locum habere non poſſe, niſi reſiſtentia eiusmodi celeritatis functionem ſequatur, vt ſit $V=k+mv+nvv$; tum enim ob $U=m+2nv$, ſit $V-Uu=k-nvv$, et aequatio noſtra induit hanc formam:

$$2Lvv+g(qQ-pM)+kM-nMvv=0$$

in qua cum nonniſi eadem poteſtas ipſius v inſit, ea ex calculo tollitur ſola poſitione $2L=nM$, remanetque tum aequatio ab v liberata $g(qQ-pM)+kM=0$, quae determinat naturam curuae, quomodocunque etiam celeritas v per aequationem principalem determinetur, ita vt eius reſolutione his caſibus non indigeamus ad curuas tautochronas inueniendas. Niſi autem quantitas

V-Uv

$V - Uv$ ad hanc formam $k - nvv$ rediiſſet, altera iſta aequatio nullam vtilitatem attuliſſet.

30. Si enim exempli gratia reſiſtentia cubis celeritatum eſſet proportionalis, vt haberemus $V = nv^3$, ob $U = 3nvv$ foret $V - Uv = -2nv^3$, hincque noſtra aequatio abiret in

$$2Lvv + g(qQ - pM) - 2nMv^3 = 0$$

in qua iam functio Q nullo modo per s et a ita definiri poteſt, et termini $2Lvv$ et $2nmv^3$ ex aequatione expellantur. Quamobrem huic aequationi ſatisfieri nequit, niſi ſimul aequatio principalis: $2vdv + gpds - Vds = 0$ in computum trahatur, quae cum expediri nequaquam poſſit, hinc etiam nullum lucrum conſequimur. Etſi enim ex combinatione harum aequationum conficitur iſta:

$$4Mvdv - 2Lvvds + 3gMpds - gqQds = 0$$

cuius integrale eſt

$$vv = \frac{1}{2}gM\int\frac{(qQ - 3pM)ds}{MM}$$

quod integrale ita eſt capiendum, vt, poſito $s = a$, fiat $v = 0$; tamen ſi hinc valores pro vv et v^3 in aequatione

$$2Lvv + g(qQ - pM) - 2nMv^3 = 0$$

ſubſtituatur, quantitates a et s ita erunt inter ſe permixtae, vt nulla via pateat, functionem Q ita definiendi, vt quantitas a prorſus ex calculo exſtirpetur, litteraeque p et q per ſolam variabilem s determinari

 poſſint.

poſſint. Per differentiationem quidem etiam celeritas v elimsnari poteſt; nam poſito $dL = K ds$ et $dq = r ds$ reperitur:

$$3nLv^2 + 4Kvv + 3ng(qQ+pM)v + g(rQ-3pL) = 0$$

quae cum hac: $2Lvv + g(qQ-pm) - 2nmv^2 = 0$ perducet ad aequationem ab v liberam. Verum haec ita fiet complicata, vt negotium reſolutionis fruſtra ſuſcipiatur.

DEMON-

DEMONSTRATIO THEOREMATIS BERNOVLLIANI QVOD EX EVOLVTIONE CVRVAE CVIVSCVNQVE RECTANGVLAE IN INFINITVM CONTINVATA TANDEM CYCLOIDES NASCANTVR.

Auctore

L. EVLERO.

I.

Inter alias inſignes proprietates, quibus curua Cyclois cum in Mechanica, tum in Geometria, eminet, ratio euolutionis haud poſtremum locum tenere cenſenda eſt, qua conſtat, euolutam cycloidis iterum eſſe cycloidem. Quando ergo ſeries curuarum conſideratur, quarum quaelibet praecedentis eſt euoluta, ſi vna earum fuerit cyclois, omnes ſequentes quoque cycloides ſint neceſſe eſt; de antecedentibus autem idem iudicium non valet, cum ex eadem curua per euolutionem infinitae curuae diuerſae generari queant, quae omnes communi euoluta vtentes ſibi parallelae exiſtimari ſolent.

II.

Huiusmodi autem curuarum ſeriem Celeb. *Ioh. Bernoulli* inuerſo ordine olim eſt contemplatus, ita vt quaelibet ſequentis ſit euoluta, atque ex euolutione antecedentis naſcatur. De tali iam curuarum ſerie affirmauerat, ſi primum locum occupet curua quaecunque

rectangula ſequentes ita continuo propius ad naturam cycloidis accedere, vt infinitesimae omnino in cycloides ſint abiturae. Hanc ergo egregiam proprietatem ante accuratius explicari conueniet, quam de eius demonſtratione ſimus ſolliciti.

III.

Cum igitur iſta curuarum ſeries a curua quacunque, modo ſit rectangula, inchoari poſſit, a definitione curuae rectangulae ordiendum videtur. Non autem curuae rectangulae peculiarem curuarum ſpeciem conſtituere ſunt putandae, ſed ex qualibet curua abſcindi poteſt portio, cui haec denominatio competit, quando tangentes, in eius terminis ductae, ſibi ſunt perpendiculares, ſiue etiam quando normales in terminis ductae ſibi ad angulum rectum occurrunt. Hic ſcilicet non qualitas curuae, ſed quantitas portionis aſſumtae, ſpectatur; ac tanta cuiusque curuae portio, cuius normales extremae inter ſe ſunt perpendiculares, curua rectangula vocatur; vnde commodius huiusmodi curuae portio arcus rectangulus vocabitur.

IV.

Planiora haec reddentur ex notione amplitudinis, quae cuilibet curuae portioni conuenire dicitur. Eſt autem amplitudo cuiuslibet arcus curuae angulus, quo normales ad eius extremitates ductae inuicem inclinantur. Ita ſi AMPB fuerit curua quaecunque, erit portionis eius AM amplitudo aequalis angulo ANM, quem rectae AN et MN ad eius terminos A et M normales conſtituunt; et ducta ad eius quoduis aliud punctum P normali

Tab. II. Fig. 1.

normali PQ, praebebit angulus AQP amplitudinem arcus AMP. Hinc arcus AMPB erit rectangulus, ſi eius normales extremae AC et BC ad ſe inuicem fuerit perpendiculares.

V.

Conſideratur igitur a Celeb. *Bernoullio* arcus cuiuscunque curuae rectangulus AMB, qui filo circumplicato ex altero termino A ita euoluatur, vt oriatur curua ANB′, quae pariter erit rectangula. Hinc porro per euolutionem in termino B′ incipiendo, noua deſcribatur curua B′M′A′; atque ex hac a puncto A′ facto euolutionis initio denuo noua curua A′N′B″; ex hacque vlterius a termino B″ incipiendo curua B″M″A″. Talis euolutio alternatim a punctis A et B incipiendo in infinitum continuata concipiatur, atque hoc modo ſeries curuarum infinita naſcetur, quae omnes inter parallelas BE et CF erunt contentae. Tab. II. Fig. 2.

VI.

De hac iam curuarum ſerie *Bernoullius* affirmauit, a quacunque curua AMB initium fuerit tractum, curvas inde natas continuo propius ad cycloidis formam perduci, atque cum in infinitum proceſſerimus, omnes huius ſeriei curuas re ipſa euadere cycloides. Hoc igitur eſt *Theorema Bernoullianum* ab omni ambiguitate liberatum, cui prima fronte ideo obnoxium videatur, quod ex quauis curua per euolutionem infinitae curuae oriri poſſunt; haec autem ambiguitas per determinatum cuiusque curuae initium penitus eſt ſublata.

VII.

Si ad ordinem harum curuarum attendamus, manifeſtum eſt, tertiam, quintam, ſeptimam, nonam etc. parem ſitum reſpectu parallelarum BE et CF tenere atque primum AMB, dum ſuperiorem BE tangunt, inferiori vero CF perpendiculariter inſiſtunt. Contra vero ſecunda, quarta, ſexta, octaua, etc. ſitu inuerſo rectam inferiorem CF tangunt, ad ſuperiorem vero BE ſunt perpendiculares. Alternatim ergo hae curuae ſitum tenent erectum et inuerſum.

VIII.

Hinc iam non leue argumentum pro veritate Theorematis aſſequimur. Si enim in hac curuarum ſerie eam, cuius ordo a prima numero n indicatur, ponamus P, ſequentem Q, hancque ſequentem R, indicem n vero infinitum aſſumamus; quoniam curuae P et R ambae a principio infinite diſtant, paremque ſitum inter parallelas ſeruant, ad primam quoque tandem relationem tenere, ideoque inter ſe aequales eſſe debent. Ex quo vtramque cycloidem eſſe debere manifeſto ſequitur, vnde et reliquae interiectae erunt cycloides ſitu inuerſo poſitae.

IX.

Obiici autem non ſine ingenti veri ſpecie poteſt, quod ſi curuae infiniteſimae fuerint cycloides, tum omnes praecedentium pariter cycloides eſſe deberent, neque igitur primum locum curua quaecunque occupare poſſet. Verum ad hanc obiectionem facile reſpondetur, curuas infiniteſimas ita conſiderari oportere, quaſi infinite

infinite parum a cycloide diſcrepent, indeque praecedentes continuo magis recedere, donec tandem in infinitum regrediendo ad curuas maxime a cycloidis natura diſſidentes perueniatur.

X.

Aliam dubitandi rationem praebere videntur curvae, quae ſuis euolutis ordinis cuiuscunque ſunt aequales. Si enim A M B fuerit curua ſuae euolutae tertiae aequalis, eique ergo aequalis ſit curua A′N′B″, ſeu quarta in noſtra ſerie, ob eandem rationem ipſi quoque aequales erunt ſeptima, decima, tertia decima et ita porro; vnde cum prima non ſit cyclois, etiam in infiniteſimis cyclois non occurret. Verum ſi res accuratius perpendatur, mox patebit, talem euolutae, verbi gratia tertiae, conuenientiam cum praeſcriptis hic euolutionibus conſiſtere non poſſe.

XI.

Cum autem haec argumenta, etſi in ſe plurimum roboris habent, tamen non ſatis firma videantur, vt demonſtrationis loco admitti queant, quoniam non ex ipſa rei natura ſunt petita; conueniet hanc continuam euolutionem accuratius expendi, et, in cuius generis curuas tandem deſinere debeat, inueſtigari. Hinc enim non ſolum clarius theorematis veritatem perſpiciemus, ſed etiam methodus, qua vtar, ad alia praeclara deducere poſſe videtur.

XII.

Primam autem obſeruo, ex natura euolutionis ſecundae curuae A N B′ radium oſculi in A eſſe nullum, in

in B′ vero finitum $=BB'=BMA$; tum vero tertiae curuae $B'M'A'$ radium oſculi in A' eſſe $=AA'$, in B′ vero $=0$. Porro curuae quartae $A'N'B''$ radium oſculi in A' eſſe $=0$, in B'' vero $=B'B''$; curuae autem quintae $B''M''A''$ radium oſculi in A'' eſſe $=A'A''$, in B'' vero $=0$; haecque conditio in omnibus curuis ſequentibus ita cernitur, vt tam in punctis A et B radius oſculi alternatim euaneſcat, et per quantitatem finitam exprimatur, negatiuis enim hic omnis locus praecluditur.

XIII.

Sumatur porro in curua data AMB punctum quodcunque M, et ducta ibi normali ML huius inclinatio ad rectam AC dabit amplitudinem arcus AM, quae ſit $=v$; tum ducta ad M tangens MN erit ſecundae curuae ANB' radius oſculi in puncto N, ita vt arcus AN eadem futura ſit amplitudo $=v$. Simili modo tangens ex N educta NM' erit radius oſculi tertiae curuae in M', hincque tangens $M'N'$ radius oſculi quartae curuae in N', indeque porro ducta tangens $N'M''$ radius oſculi quintae curuae in M'', et ita deinceps; omnium autem arcuum AM, AN, $A'M'$, $A'N'$, $A''M''$ etc. eadem erit amplitudo $=v$, vti ex natura euolutionis conſtat.

XIV.

Ponamus iam pro prima curua data AMB arcum $AM=s$, cuius amplitudo cum ſit $=v$, concipiamus dari aequationem inter s et v, quae ita comparata ſit neceſſe eſt, vt poſito $v=0$, euaneſcat s; poſita

poſita ergo amplitudine $v =$ angulo recto, cuius nota ſit ϱ, ſeu $v = \varrho$, praebebit s longitudinem totius arcus AMB, quae ſit $= a$. Dari ergo ponimus aequationem inter s et v, talem, vt, poſito $v = o$, ſit $s = o$, et poſito $v = \varrho$, ſit $s = a$.

XV.

Hinc definitur curua ſecunda ANB′ ex illius euolutione nata; cum enim arcus AN amplitudo ſit quoque $= v$, et radius oſculi NM $=$ AM $= s$, ſi ponatur arcus AN $= t$, erit $\frac{dt}{s} = dv$, ideoque $t = \int s\,dv$, quod integrale ita capiatur, vt euaneſcat, poſito $v = o$. Tum vero, poſito $v = \varrho$, exprimet $\int v\,ds$ totum arcum ANB′, qui ſi vocetur $= b$, poſito $v = o$, erit $t = o$, poſito autem $v = \varrho$, erit $t = b$.

XVI.

Pro tertia porro curua A′M′B′ ſit arcus A′M′ $= s'$, cuius amplitudo cum ſit $= v$, radius oſculi vero M′N $=$ ANB′ $-$ AN $= b - t$, erit $\frac{ds'}{b-t} = dv$, hincque $s' = bv - \int t\,dv$, ſeu $s' = bv - \int dv \int s\,dv$. Oportet autem, vt hic iterum fiat $s = o$, ſi $v = o$; prodeat vero $s' = a'$, poſito $v = \varrho$, ita vt a' denotet totam curuam A′M′B′.

XVII.

Quodſi ſimili modo pro curua quarta A′N′B″ ponamus arcum A′N′ $= t'$, cuius amplitudo eſt $= v$, et A′N′B″ $= b'$, erit etiam $\frac{dt'}{s'} = dv$. Pro curua autem quinta A″M″B″, ponendo arcum A″M″ $= s''$, et totum arcum A″M″B″ $= a''$, erit $\frac{ds''}{b'-t'} = dv$. Pro curua ſexta reſpondeat amplitudini v arcus $= t''$, amplitudini vero ϱ arcus $= b''$, eritque $\frac{dt''}{s''} = dv$. Pro ſeptima curua reſpondeat amplitudini v arcus $= s'''$,

at amplitudini ϱ arcus $=a'''$, erit $\frac{ds'''}{b''-t''}=dv$, ſicque progredi licet in infinitum.

XVIII.

Regrediamur autem a qualibet curua ad praecedentes; et aſſumta curua ſecunda, ſeu aequatione inter t et v, erit $s=\frac{dt}{dv}$. Sumta autem tertia curua, ſeu aequatione inter s' et v, erit $b-t=\frac{ds'}{dv}$, ſeu $t=b-\frac{ds'}{dv}$ et ſumto dv conſtante $s=-\frac{dds'}{dv^2}$. Sumto vero pro quarta curua aequatione inter t' et v, erit $s'=\frac{dt'}{dv}$; $t=b-\frac{ddt'}{dv^2}$; et $s=-\frac{d^3t'}{dv^3}$. At ſumta pro quinta curua aequatione inter s'' et v, erit $b'-t'=\frac{ds''}{dv}$, ſeu $t'=b'-\frac{ds''}{dv}$, et $s'=-\frac{dds''}{dv^2}$; $t=b+\frac{d^3s''}{dv^3}$; $s=\frac{d^4s''}{dv^4}$.

XIX.

Cum iam, poſito $v=0$, fiat $s=0$, $t=0$, $s'=0$, $t'=0$ $s''=0$ etc. poſito autem $v=\varrho$, fit $s=a$, $t=b$, $s'=a'$, $t'=b'$, $s''=a''$ etc. ſequentes proprietates functionum s, t, s', t', s'', t'', etc. erunt perſpicuae; erit

I. ſi $v=0$ } $s=0$
ſi $v=\varrho$ } $s=a$

II. ſi $v=0$ } $t=0$; $\frac{d}{dv}=0$
ſi $v=\varrho$ } $t=b$; $\frac{dt}{dv}=a$

III. ſi $v=0$ } $s'=0$; $\frac{ds'}{dv}=b$; $\frac{dds'}{dv^2}=0$
ſi $v=\varrho$ } $s'=a'$; $\frac{ds'}{dv}=0$; $\frac{dds'}{dv^2}=-a$

IV. ſi $v=0$ } $t'=0$; $\frac{dt'}{dv}=0$; $\frac{ddt'}{dv^2}=b$; $\frac{d^3t'}{dv^3}=0$
ſi $v=\varrho$ } $t'=b'$; $\frac{dt'}{dv}=a'$; $\frac{ddt'}{dv^2}=0$; $\frac{d^3t'}{dv^3}=-a$

V. ſi $v=0$ } $s''=0$; $\frac{ds''}{dv}=b$; $\frac{dds''}{dv^2}=0$; $\frac{d^3s''}{dv^3}=-b$; $\frac{d^4s'''}{dv^4}=0$
ſi $v=\varrho$ } $s''=a''$; $\frac{ds''}{dv}=0$; $\frac{dds''}{dv^2}=-a'$; $\frac{d^3s''}{dv^3}=0$; $\frac{d^4s''}{dv^4}=a$

XX.

XX.

Hinc ergo patet, cuiusmodi proprietates ſit habitura curua infiniteſima in iſto curuarum ordine, cuius quidem exponens ſit impar. Si enim amplitudini v reſpondeat arcus $=z$, aequatio inter v et z erit ita comparata, vt ſit:

$$\left.\begin{matrix}\text{ſi } v=0\\ \text{ſi } v=\varrho\end{matrix}\right\};\quad z=\left\{\begin{matrix}0\\+f\end{matrix}\right.;\quad \frac{dz}{dv}=\left\{\begin{matrix}+g\\0\end{matrix}\right.;\quad \frac{ddz}{dv^2}=\left\{\begin{matrix}0\\-f'\end{matrix}\right.;\quad \frac{d^3z}{dv^3}=\left\{\begin{matrix}-g'\\0\end{matrix}\right.;\quad \frac{d^4z}{dv^4}=\left\{\begin{matrix}0\\+f''\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\text{ſi } v=0\\ \text{ſi } v=\varrho\end{matrix}\right\};\quad \frac{d^5z}{dv^5}=\left\{\begin{matrix}+g''\\0\end{matrix}\right.;\quad \frac{d^6z}{dv^6}=\left\{\begin{matrix}0\\-f'''\end{matrix}\right.;\quad \frac{d^7z}{dv^7}=\left\{\begin{matrix}-g'''\\0\end{matrix}\right.\ \text{etc.}$$

vbi litterae f, f', f'' etc. g, g', g'' etc. denotant quantitates finitas et poſitiuas.

XXI.

Quia hae proprietates ſunt numero infinitae, eae ſufficiunt ad curuam determinandam. Si enim amplitudini $v+x$ reſpondeat arcus y, dum arcus amplitudini v reſpondens eſt z, erit

$$y=z+\frac{x\,dz}{1\,dv}+\frac{x^2\,ddz}{1\cdot2\,dv^2}+\frac{x^3\,d^3z}{1\cdot2\cdot3\,dv^3}+\frac{x^4\,d^4z}{1\cdot2\cdot3\cdot4\,dv^4}+\text{etc.}$$

Ponatur iam $v=0$, ita vt y ſit arcus amplitudini x reſpondens, erit

$$y=\frac{gx}{1}-\frac{g'x^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{g''x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}-\frac{g'''x^7}{1\cdot2\cdots\cdots7}+\text{etc.}$$

ac pro x et y, reſtitutis prioribus valoribus v et z, erit

$$z=\frac{gv}{1}-\frac{g'v^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{g''v^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}-\frac{g'''v^7}{1\cdot2\cdots\cdots7}+\text{etc.}$$

XXII.

Tribuantur his conſtantibus g, g', g'' etc. valores ſequentes:

$$g = A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta + E\varepsilon + \text{etc.}$$
$$g' = A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 + D\delta^3 + E\varepsilon^3 + \text{etc.}$$
$$g'' = A\alpha^5 + B\beta^5 + C\gamma^5 + D\delta^5 + E\varepsilon^5 + \text{etc.}$$
$$g''' = A\alpha^7 + B\beta^7 + C\gamma^7 + D\delta^7 + E\varepsilon^7 + \text{etc.}$$
etc.

nihil enim impedit, quo minus talis poſitio ſemper locum habere queat; his autem valoribus ſubſtitutis, obtinebitur

$$z = A \sin \alpha v + B \sin \beta v + C \sin \gamma v + D \sin \delta v + E \sin \varepsilon v + \text{etc.}$$

hacque forma iam ſatisfit ei conditioni, vt, poſito $v = 0$, fiat

$$z = 0;\ \frac{dz}{dv} = +g;\ \frac{ddz}{dv^2} = 0;\ \frac{d^3z}{dv^3} = -g';\ \frac{d^4z}{dv^4} = 0;\ \frac{d^5z}{dv^5} = +g'' \text{ etc.}$$

XXIII.

Supereſt igitur, vt, poſito $v = \varrho$, ſatisfiat his conditionibus

$$z = f;\ \frac{dz}{dv} = 0;\ \frac{ddz}{dv^2} = -f';\ \frac{d^3z}{dv^3} = 0;\ \frac{d^4z}{dv^4} = +f'' \text{ etc.}$$

hinc vero erit:

$$f = A \sin.\alpha\varrho + B \sin.\beta\varrho + C \sin.\gamma\varrho + D \sin.\delta\varrho + \text{etc.}$$
$$0 = A\alpha \cos.\alpha\varrho + B\beta \cos.\beta\varrho + C\gamma \cos.\gamma\varrho + D\delta \cos.\delta\varrho + \text{etc.}$$
$$f' = A\alpha^2 \sin.\alpha\varrho + B\beta^2 \sin.\beta\varrho + C\gamma^2 \sin.\gamma\varrho + D\delta^2 \sin.\delta\varrho + \text{etc.}$$
$$0 = A\alpha^3 \cos.\alpha\varrho + B\beta^3 \cos.\beta\varrho + C\gamma^3 \cos.\gamma\varrho + D\delta^3 \cos.\delta\varrho + \text{etc.}$$
$$f'' = A\alpha^4 \sin.\alpha\varrho + B\beta^4 \sin.\beta\varrho + C\gamma^4 \sin.\gamma\varrho + D\delta^4 \sin.\delta\varrho + \text{etc.}$$
etc.

XXIV.

XXIV.

Oportet ergo pro α, β, γ, δ, etc. eiusmodi numeros aſſumi, vt fiat

$\cos.\alpha\varrho = 0$; $\cos.\beta\varrho = 0$; $\cos.\gamma\varrho = 0$; $\cos.\delta\varrho = 0$ etc. vnde perſpicitur, nonniſi numeros impares loco litterarum α, β, γ, δ etc. ſubſtitui poſſe. Erit itaque

$$g = A + 3B + 5C + 7D + 9E + \text{etc.}$$
$$g' = A + 3^3B + 5^3C + 7^3D + 9^3E + \text{etc.}$$
$$g'' = A + 3^5B + 5^5C + 7^5D + 9^5E + \text{etc.}$$
$$g''' = A + 3^7B + 5^7C + 7^7D + 9^7E + \text{etc.}$$

etc.

et pro curua infinitiſſima habebitur haec aequatio inter z et v:

$$z = A\sin.v + B\sin.3v + C\sin.5v + D\sin.7v + E\sin.9v + \text{etc.}$$

XXV.

Porro vero ob $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = 5$, $\delta = 7$ etc. erit $\sin.\alpha\varrho = 1$; $\sin\beta\varrho = -1$; $\sin.\gamma\varrho = +1$; $\sin.\delta\varrho = -1$; $\sin.\varepsilon\varrho = +1$ etc.

vnde pro f, f', f'', f''', etc. ſequentes valores prodibunt:

$$f = A - B + C - D + E - \text{etc.}$$
$$f' = A - 3^2B + 5^2C - 7^2D + 9^2E - \text{etc.}$$
$$f'' = A - 3^4B + 5^4C - 7^4D + 9^4E - \text{etc.}$$
$$f''' = A - 3^6B + 5^6C - 7^6D + 9^6E - \text{etc.}$$

etc.

XXVI.

Verum natura rei poſtulat, vt omnium litterarum f, f', f'', f''' etc. item g, g', g'', g''' etc. va-

lores ſint poſitiui et finiti; quorum numerus cum ſit infinitus, erunt infiniteſimarum valores:

$$g^{(\infty)} = A + 3^{\infty}B + 5^{\infty}C + 7^{\infty}D + 9^{\infty}E + \text{etc.}$$
$$f^{(\infty)} = A - 3^{\infty}B + 5^{\infty}C - 7^{\infty}D + 9^{\infty}E - \text{etc.}$$

qui finiti ambo eſſe nequeunt, niſi omnes litterae B, C, D, E etc. euaneſcant; alioquin enim ambo valores certo fiant infiniti.

XXVII.

Hinc igitur conficitur, in ordine curuarum noſtrarum curuam infiniteſimam tali aequatione inter arcum z et amplitudinem v exprimi, vt ſit $z = A\,\text{ſin.}\,v$, quae manifeſto eſt pro cycloide. Cum ergo haec eadem aequatio reſultet, quaecunque curua in locum primae AMB aſſumatur, dummodo eius amplitudo ſit 90°, manifeſtum eſt, infiniteſimas curuarum, quae per continuam euolutionem naſcuntur, ſemper in cycloides abire; ſicque habemus perfectam demonſtrationem theorematis *Bernoulliani*.

Tab. II. Fig. 3.

XXVIII.

Simili modo ſi amplitudo curuae datae AMB maior minor ve fuerit angulo recto, atque euolutio pari modo alternatim inſtituatur, definiri poterit natura curvarum, ad quas poſt euolutiones infinitas peruenietur. Sit enim ANB′ curua ex euolutione prima in A incepta nata; indeque oriatur, euolutionem in B′ inchoando, curua B′MA′, ex hac porro, euolutionem in A′ incipiendo, curua A′N′B″; et ex hac curua B″M″A″, hincque vltra curua A″N″B‴ et ita porro; quaeriturque

turque natura curuarum infiniteſimarum hoc modo deſcriptarum.

XXIX.

Primo autem patet, omnes has curuas eiusdem fore amplitudinis, et tam puncta A, A′, A″, etc. quam puncta B, B′, B″, etc. in directum ſita. Tum etiam manifeſtum eſt, has rectas CF et BE fore diuergentes, ſi amplitudo curuarum angulum rectum ſuperet, exceſſus ſcilicet amplitudinis ſupra angulum rectum metietur inclinationem. Sin autem amplitudo fuerit minor recto, illae rectae conuergent, et coibunt ſub angulo, defectui ab angulo recto aequali. Illo ergo caſu curuae tandem in infinitum expandentur, hoc vero in ſpatium euaneſcens coarctabuntur.

XXX.

Sit amplitudo primae curuae $AMB = \Phi$, quae ſimul omnibus ſequentibus conueniet; ac figura 3 repraeſentat caſum, quo hic angulus Φ ſuperat angulum rectum ϱ, ita vt $\Phi - \varrho$ exhibeat inclinationem rectarum EB et FC. Sumta iam amplitudine quacunque $= v$, ſint arcus in ſerie curuarum huic amplitudini reſpondentes:

$$AM = s;\ AN = t;\ A'M' = s';\ A'N' = t';\ A''M'' = s'';\ A''N'' = t'';\ A'''M''' = s'''\ \text{etc.}$$

qui poſito $v = \Phi$ fiant:

$$s = a;\ t = b;\ s' = a';\ t' = b';\ s'' = a'';\ t'' = b'';\ s''' = a'''\ \text{etc.}$$

qui valores praeſenti caſu $\Phi > \varrho$ continuo creſcunt: ſin autem eſſet $\Phi < \varrho$, continuo decreſcunt, tandemque euaneſcunt.

XXXI.

XXXI.

Cum iam ſint radii oſculi

$NM = s$; $M'N = b - t$; $N'M' = s'$; $M''N' = b' - t'$; $N''M'' = s''$ etc.

erit ex natura euolutionis

$\frac{dt}{s} = dv$; $\frac{ds'}{b-t} = dv$; $\frac{dt'}{s'} = dv$; $\frac{ds''}{b'-t'} = dv$; $\frac{dt''}{s''} = dv$ etc.

ſiue

$s = \frac{dt}{dv}$; $b - t = \frac{ds'}{dv}$; $s' = \frac{dt'}{dv}$; $b' - t' = \frac{ds''}{dv}$; $s'' = \frac{dt''}{dv}$ etc.

Quodſi ergo conſideretur curua ſeptima, cuius arcus amplitudini v conueniens eſt $= s'''$, et amplitudini toti $\Phi = a'''$, erit

$b'' - t'' = \frac{ds'''}{dv}$; $s'' = -\frac{dds'''}{dv^2}$; $b' - t' = -\frac{d^3s'''}{dv^3}$; $s' = \frac{d^4s'''}{dv^4}$; $b - t = \frac{d^5s'''}{dv^5}$.

XXXII.

Cum autem, poſito $v = 0$, omnes quantitates s, t, s', t' etc. euaneſcant, apparet, in curua ſeptima caſu $v = 0$ fore

$s''' = 0$; $\frac{dt'''}{dv} = b''$; $\frac{dds'''}{dv^2} = 0$; $\frac{d^3s'''}{dv^3} = -b'$; $\frac{d^4s'''}{dv^4} = 0$; $\frac{d^5s'''}{dv^5} = b$ etc.

Caſu autem $v = \Phi$, cum ſit $s = a$; $t = b$; $s' = a'$; $t' = b'$; $s'' = a''$; $t'' = b''$; $s''' = a'''$ etc. erit quoque pro curua ſeptima, poſito $v = \Phi$,

$s''' = a'''$; $\frac{ds'''}{dv} = 0$; $\frac{dds'''}{dv^2} = -a''$; $\frac{d^3s'''}{dv^3} = 0$; $\frac{d^4s'''}{dv^4} = a'$; $\frac{d^5s'''}{dv^5} = 0$.

XXXIII.

Pro curua ergo infiniteſima, quae quidem in ordine locum imparem ſortietur, ſi arcus amplitudini v conue-

conueniens ſit $= z$, natura eius ita erit comparata, vt poſito $v = 0$, ſit

$$z = 0;\ \frac{dz}{dv} = +g;\ \frac{ddz}{dv^2} = 0;\ \frac{d^3z}{dv^3} = -g';\ \frac{d^4z}{dv^4} = 0;\ \frac{d^5z}{dv^5} = +g'';\ \text{etc.}$$

ſin autem ponatur $v = \Phi$, erit

$$z = f;\ \frac{dz}{dv} = 0;\ \frac{ddz}{dv^2} = -f';\ \frac{d^3z}{dv^3} = 0;\ \frac{d^4z}{dv^4} = +f'';\ \frac{d^5z}{dv^5} = 0\ \text{etc.}$$

quantitates autem f et g erunt, vel infinitae, vel infinite paruae, prout fuerit, vel $\Phi > \varrho$, vel $\Phi < \varrho$, earumque deriuatae f', g', f'', g'' etc. continuo, vel decreſcent, vel creſcent, ita vt infiniteſimae fiant finitae.

XXXIIII.

Si iam ratiocinium pari modo, quo ſupra §. XXI. inſtituamus, intelligemus, naturam curuae tali aequatione inter z et v exprimi, vt ſit:

$$z = A\,\text{ſin.}\,\alpha v + B\,\text{ſin.}\,\beta v + C\,\text{ſin.}\,\gamma v + D\,\text{ſin.}\,\delta v + E\,\text{ſin.}\,\varepsilon v\ \text{etc.}$$

ex qua differentiando fiet:

$$\frac{dz}{dv} = A\alpha\,\text{coſ.}\,\alpha v + B\beta\,\text{coſ.}\,\beta v + C\gamma\,\text{coſ.}\,\gamma v + D\delta\,\text{coſ.}\,\delta v + E\varepsilon\,\text{coſ.}\,\varepsilon v + \text{etc.}$$

$$\frac{ddz}{dv^2} = -A\alpha^2\,\text{ſin.}\,\alpha v - B\beta^2\,\text{ſin.}\,\beta v - C\gamma^2\,\text{ſin.}\,\gamma v - D\delta^2\,\text{ſin.}\,\delta v - \text{etc.}$$

$$\frac{d^3z}{dv^3} = -A\alpha^3\,\text{coſ.}\,\alpha v - B\beta^3\,\text{coſ.}\,\beta v - C\gamma^3\,\text{coſ.}\,\gamma v - D\delta^3\,\text{coſ.}\,\delta v - \text{etc.}$$

$$\frac{d^4z}{dv^4} = +A\alpha^4\,\text{ſin.}\,\alpha v + B\beta^4\,\text{ſin.}\,\beta v + C\gamma^4\,\text{ſin.}\,\gamma v + D\delta^4\,\text{ſin.}\,\delta v + \text{etc.}$$

$$\frac{d^5z}{dv^5} = +A\alpha^5\,\text{coſ.}\,\alpha v + B\beta^5\,\text{coſ.}\,\beta v + C\gamma^5\,\text{coſ.}\,\gamma v + D\delta^5\,\text{coſ.}\,\delta v + \text{etc.}$$

etc.

XXXI.

Cum iam ſint radii oſculi

$NM = s$; $M'N = b - t$; $N'M' = s'$; $M''N' = b' - t'$; $N''M'' = s''$ etc.

erit ex natura euolutionis

$$\frac{dt}{s} = dv;\ \frac{ds'}{b-t} = dv;\ \frac{dt'}{s'} = dv;\ \frac{ds''}{b'-t'} = dv;\ \frac{dt''}{s''} = dv \text{ etc.}$$

ſiue

$$s = \frac{dt}{dv};\ b-t = \frac{ds'}{dv};\ s' = \frac{dt'}{dv};\ b'-t' = \frac{ds''}{dv};\ s'' = \frac{dt''}{dv} \text{ etc.}$$

Quodſi ergo conſideretur curua ſeptima, cuius arcus amplitudini v conueniens eſt $= s'''$, et amplitudini toti $\Phi = a'''$, erit

$$b''-t'' = \frac{ds'''}{dv};\ s'' = -\frac{dds'''}{dv^2};\ b'-t' = -\frac{d^3 s'''}{dv^3};\ s' = \frac{d^4 s'''}{dv^4};\ b-t = \frac{d^5 s'''}{dv^5}.$$

XXXII.

Cum autem, poſito $v = 0$, omnes quantitates s, t, s', t' etc. euaneſcant, apparet, in curua ſeptima caſu $v = 0$ fore

$$s''' = 0;\ \frac{dt'''}{dv} = b'';\ \frac{dds'''}{dv^2} = 0;\ \frac{d^3 s'''}{dv^3} = -b';\ \frac{d^4 s'''}{dv^4} = 0;\ \frac{d^5 s'''}{dv^5} = b \text{ etc.}$$

Caſu autem $v = \Phi$, cum ſit $s = a$; $t = b$; $s' = a'$; $t' = b'$; $s'' = a''$; $t'' = b''$; $s''' = a''$ etc. erit quoque pro curua ſeptima, poſito $v = \Phi$,

$$s''' = a''';\ \frac{ds'''}{dv} = 0;\ \frac{dds'''}{dv^2} = -a'';\ \frac{d^3 s'''}{dv^3} = 0;\ \frac{d^4 s'''}{dv^4} = a';\ \frac{d^5 s'''}{dv^5} = 0.$$

XXXIII.

Pro curua ergo infiniteſima, quae quidem in ordine locum imparem ſortietur, ſi arcus amplitudini v conne-

conueniens ſit $=z$, natura eius ita erit comparata, vt poſito $v=0$, ſit

$$z=0;\ \frac{dz}{dv}=+g;\ \frac{ddz}{dv^2}=0;\ \frac{d^3z}{dv^3}=-g';\ \frac{d^4z}{dv^4}=0;\ \frac{d^5z}{dv^5}=+g'';\ \text{etc.}$$

ſin autem ponatur $v=\Phi$, erit

$$z=f;\ \frac{dz}{dv}=0;\ \frac{ddz}{dv^2}=-f';\ \frac{d^3z}{dv^3}=0;\ \frac{d^4z}{dv^4}=+f'';\ \frac{d^5z}{dv^5}=0\ \text{etc.}$$

quantitates autem f et g erunt, vel infinitae, vel infinite paruae, prout fuerit, vel $\Phi > \varrho$, vel $\Phi < \varrho$, earumque deriuatae f', g', f'', g'' etc. continuo, vel decreſcent, vel creſcent, ita vt infiniteſimae fiant finitae.

XXXIIII.

Si iam ratiocinium pari modo, quo ſupra §. XXI. inſtituamus, intelligemus, naturam curuae tali aequatione inter z et v exprimi, vt ſit:

$$z=A\,\text{ſin.}\,\alpha v+B\,\text{ſin.}\,\beta v+C\,\text{ſin.}\,\gamma v+D\,\text{ſin.}\,\delta v+E\,\text{ſin.}\,\varepsilon v\ \text{etc.}$$

ex qua differentiando fiet:

$$\frac{dz}{dv}=A\alpha\,\text{coſ.}\,\alpha v+B\beta\,\text{coſ.}\,\beta v+C\gamma\,\text{coſ.}\,\gamma v+D\delta\,\text{coſ.}\,\delta v+E\varepsilon\,\text{coſ.}\,\varepsilon v+\text{etc.}$$

$$\frac{ddz}{dv^2}=-A\alpha^2\,\text{ſin.}\,\alpha v-B\beta^2\,\text{ſin.}\,\beta v-C\gamma^2\,\text{ſin.}\,\gamma v-D\delta^2\,\text{ſin.}\,\delta v-\text{etc.}$$

$$\frac{d^3z}{dv^3}=-A\alpha^3\,\text{coſ.}\,\alpha v-B\beta^3\,\text{coſ.}\,\beta v-C\gamma^3\,\text{coſ.}\,\gamma v-D\delta^3\,\text{coſ.}\,\delta v-\text{etc.}$$

$$\frac{d^4z}{dv^4}=+A\alpha^4\,\text{ſin.}\,\alpha v+B\beta^4\,\text{ſin.}\,\beta v+C\gamma^4\,\text{ſin.}\,\gamma v+D\delta^4\,\text{ſin.}\,\delta v+\text{etc.}$$

$$\frac{d^5z}{dv^5}=+A\alpha^5\,\text{coſ.}\,\alpha v+B\beta^5\,\text{coſ.}\,\beta v+C\gamma^5\,\text{coſ.}\,\gamma v+D\delta^5\,\text{coſ.}\,\delta v+\text{etc.}$$

etc.

XXXV.

Poſito iam $v = o$, in nihilum abeunt valores z, $\frac{ddz}{dv^2}$, $\frac{d^4 z}{dv^4}$ etc. vti oportet. Tum vero obtinebitur:

$$g = A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta + E\varepsilon + \text{etc.}$$
$$g' = A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 + D\delta^3 + E\varepsilon^3 + \text{etc.}$$
$$g'' = A\alpha^5 + B\beta^5 + C\gamma^5 + D\delta^5 + E\varepsilon^5 + \text{etc.}$$
$$g''' = A\alpha^7 + B\beta^7 + C\gamma^7 + D\delta^7 + E\varepsilon^7 + \text{etc.}$$

etc.

valores autem infiniteſimos oportet fieri finitos, ſeu neceſſe eſt, ſit:

$$A\alpha^\infty + B\beta^\infty + C\gamma^\infty + D\delta^\infty + E\varepsilon^\infty + \text{etc.} = \text{quant. finitae.}$$

XXXVI.

Cum autem, poſito $v = \Phi$, valores $\frac{dz}{dv}$, $\frac{d^3 z}{dv^3}$, $\frac{d^5 z}{dv^5}$, etc. euaneſcere debeant, iſti coſinus euaneſcant neceſſe eſt:

$$\text{coſ.}\,\alpha\Phi = o,\ \text{coſ.}\,\beta\Phi = o,\ \text{coſ.}\,\gamma\Phi = o,\ \text{coſ.}\,\gamma\Phi = o \text{ etc.}$$

alii autem non dantur anguli, quorum coſinus euaneſcant, praeter ϱ, 3ϱ, 5ϱ, 7ϱ, 9ϱ etc. vnde capi oportet

$$\alpha = \frac{\varrho}{\Phi};\ \beta = \frac{3\varrho}{\Phi};\ \gamma = \frac{5\varrho}{\Phi};\ \delta = \frac{7\varrho}{\Phi};\ \varepsilon = \frac{9\varrho}{\Phi} \text{ etc.}$$

tum vero eorundem angulorum ſinus erunt:

$$\text{ſin}\,\alpha\Phi = +1;\ \text{ſin.}\,\beta\Phi = -1;\ \text{ſin.}\,\gamma\Phi = +1;\ \text{ſin.}\,\delta\Phi = -1;\ \text{ſin.}\,\varepsilon\Phi = +1 \text{ etc.}$$

XXXVII.

XXXVII.

Poſito ergo $v = \Phi$, obtinebuntur ſequentes aequationes:

$$
\begin{aligned}
f \;&= A - B + C - D + E - \text{etc.}\\
f' \;&= A\alpha^2 - B\beta^2 + C\gamma^2 - D\delta^2 + E\varepsilon^2 - \text{etc.}\\
f'' \;&= A\alpha^4 - B\beta^4 + C\gamma^4 - D\delta^4 + E\varepsilon^4 - \text{etc.}\\
f''' &= A\alpha^6 - B\beta^6 + C\gamma^6 - D\delta^6 + E\varepsilon^6 - \text{etc.}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

quorum valorum infiniteſimi iterum finiti euadere debent, ſeu eſſe oportet:

$A\alpha^{\infty} - B\beta^{\infty} + C\gamma^{\infty} - D\delta^{\infty} + E\varepsilon^{\infty} -$ etc. $=$ quant. finitae.

XXXVIII.

Subſtituamus ergo pro α, β, γ, δ etc. valores, qui ipſis conuenire poſſint, ac ponendo ad abbreuiandum $\frac{\varrho}{\Phi} = n$, vt ſit

$$\alpha = n;\ \beta = 3n;\ \gamma = 5n;\ \delta = 7n, \text{ etc.}$$

atque neceſſe eſt, vt ſit:

$$\left.\begin{aligned}&\text{tam } An^{\infty} + 3^{\infty}Bn^{\infty} + 5^{\infty}Cn^{\infty} + 7^{\infty}Dn^{\infty} + \text{etc.}\\ &\text{quam } An^{\infty} - 3^{\infty}Bn^{\infty} + 5^{\infty}Cn^{\infty} - 7^{\infty}Dn^{\infty} + \text{etc.}\end{aligned}\right\}\text{ quant. finita}$$

ſiue requiritur, vt ſit

$n^{\infty}(A \pm 3^{\infty}B + 5^{\infty}C \pm 7^{\infty}D + \text{etc.})$ quantitas finita et quidem poſitiua.

XXXIX.

Quodſi iam An^{∞} ſit quantitas finita, perſpicuum eſt, reliquas litteras B, C, D etc. omnes eſſe debere euaneſcentes. Ponamus ergo $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ etc. atque $An^{\infty} = a$, vt ſit $A = \frac{a}{n^{\infty}} = \frac{a\Phi^{\infty}}{\varrho^{\infty}}$, atque pro cur-

va infiniteſima, quae per continuam euolutionem curvae datae AMB, cuius amplitudo eſt Φ, naſcitur, habebimus hanc aequationem: $z = \frac{a\Phi^{\infty}}{\varrho^{\infty}}$ ſin. $\frac{\varrho}{\Phi}v$, vel $z = \frac{a}{n^{\infty}}$ ſin. nv, poſito $n = \frac{\varrho}{\Phi}$. Conſtat autem, hanc aequationem eſſe pro epicycloide, vel hypocycloide, quas curuas notum eſt ſimiles eſſe ſuis euolutis. Si enim radius circuli immobilis ſit $= b$, et mobilis $= k$, erit $n = \frac{\varrho}{\Phi} = \frac{b}{b+2k}$, ideoque $\frac{k}{b} = \frac{\Phi-\varrho}{2\varrho}$.

XL.

Hinc iam facile perſpicitur id, quod iam notauimus, ſi ſit $\Phi > \varrho$, ſeu $n < 1$, curuas infiniteſimas in infinitum expandi; fit enim $n^{\infty} = 0$, ideoque $\frac{a}{n^{\infty}} = \infty$, vnde arcus, cuicunque amplitudini reſpondens, erit infinitus. Altero autem caſu, quo $\Phi < \varrho$, ſeu $n > 1$, ob $n^{\infty} = \infty$, erit $\frac{a}{n^{\infty}} = 0$, ſicque curua infiniteſima in ſpatium infinite paruum contrahitur. Semper ergo quaecunque curua pro AMB accipiatur poſt infinitas euolutiones, vel ad epicycloides, ſi $\Phi > \varrho$, vel ad hypocycloides, ſi $\Phi < \varrho$ peruenietur; cyclois vero communis prodit, ſi $\Phi = \varrho$, qui eſt caſus, quem ſupra euoluimus, quo $n = 1$, ideoque n^{∞} neque in infinitum augetur, neque diminuitur.

XLI.

Tab. II. Fig. 4. Sit AMB curua ſimilis ei, quae per euolutionem infiniteſimam naſcitur, in qua ſumto arcu quocunque

cunque $AM = z$, cuius amplitudo ſeu angulus ANM ſit $= v$. et natura huius curuae hac aequatione $z = c$ ſin. nv continebitur, vnde patet, curuam iſtam eſſe rectificabilem. Praeterea vero euidens eſt, eam ſimul eſſe algebraicam, quoties n eſt numerus rationalis, ſolo caſu $n = 1$ excepto, quo cyclois vulgaris enaſcitur.

XLII.

Si enim ponantur coordinatae orthogonales $AP = x$, $PM = y$, ob angulum $ANM = v$ et elementum curvae $= dz$, erit $\frac{dx}{dz} =$ ſin. v et $\frac{dy}{dz} =$ coſ. v. At eſt $dz = ncdv$ coſ. nv, vnde fit

$$dx = ncdv \text{ ſin. } v \text{ coſ. } nv = \tfrac{1}{2}ncdv(\text{ſin.}(1+n)v + \text{ſin.}(1-n)v)$$

$$dy = ncdv \text{ coſ. } v \text{ coſ. } nv = \tfrac{1}{2}ncdv(\text{coſ.}(1+n)v + \text{coſ.}(1-n)v)$$

quae formulae ſunt integrales, excepto caſu $n = 1$, quippe quo, ob coſ. $(1-n)v = 1$, applicata y determinaretur per ipſum angulum v, ſicque a circuli quadratura penderet. Integratio vero praebet:

$$x = \tfrac{1}{2}nc\left(\frac{1 - \text{coſ.}(1+n)v}{1+n} + \frac{1 - \text{coſ.}(1-n)v}{1-n}\right)$$

$$y = \tfrac{1}{2}nc\left(\frac{\text{ſin.}(1+n)v}{1+n} + \frac{\text{ſin.}(1-n)v}{1-n}\right).$$

XLIII.

Hae coordinatae etiam ita poſſunt exprimi, vt ſit

$$x = \frac{nc}{1-nn}(1 - \text{coſ. } v \text{ coſ. } nv - n \text{ ſin. } v \text{ ſin. } nv)$$

$$y = \frac{nc}{1-nn}(\text{ſin. } v \text{ coſ. } nv - n \text{ coſ. } v \text{ ſin. } nv).$$

Ac ſi ſumatur $AC = \frac{nc}{1-nn}$, ponaturque $CP = t$, erit

$$t = \frac{nc}{1-nn}(\text{coſ. } v \text{ coſ. } nv + n \text{ ſin. } v \text{ ſin. } nv)$$

 vnde

vnde ſit

$$CM = \sqrt{(tt+yy)} = \frac{nc}{1-nn}\sqrt{(\text{coſ.}\,nv^2 + nn\,\text{ſin.}\,uv^2)}.$$

Pro altero ergo termino curuae B, vbi ſit amplitudo $v=\Phi$, et $nv=\varrho$, erit $CB = \frac{nnc}{1-nn}$, ita vt ſit $AC : BC = 1 : n$. Eſt vero C centrum circuli immobilis, CB eius radius, et $AC - BC = \frac{nc}{1+n}$ diameter circuli mobilis pro deſcriptione epicycloidis, vel hypocycloidis.

XLIV.

Cum ſit $AN = x + \frac{y\,dy}{dx} = x + \frac{y\,\text{coſ.}\,v}{\text{ſin.}\,v}$, erit

$$AN = \frac{nc}{1-nn}\left(1 - \frac{n\,\text{ſin.}\,nv}{\text{ſin.}\,v}\right) \text{ et } CN = \frac{nnc}{1-nn}\cdot\frac{\text{ſin.}\,nv}{\text{ſin.}\,v}$$

ideoque, ob $CB = \frac{nnc}{1-nn}$, erit

$$CN : CB = \text{ſin.}\,nv : \text{ſin.}\,v.$$

Quare ſi centro C radio CB deſcribatur circulus rectam MN ſecans in L, ducaturque $CL = CB$, ob angulum $ANM = v$ et $CN : CL = \text{ſin.}\,CLN : \text{ſin.}\,v$, erit angulus $CLN = nv$, et angulus $ACL = (1-n)v$.

XLV.

Porro eſt $MN = \frac{y\,dz}{dx} = \frac{y}{\text{ſin.}\,v} = \frac{nc}{1-nn}\left(\text{coſ.}\,nv - \frac{n\,\text{coſ.}\,v\,\text{ſin.}\,nv}{\text{ſin.}\,v}\right)$ tum vero ex triangulo CNL reperitur

$$LN = \frac{nnc}{1-nn}\cdot\frac{\text{ſin.}\,(1-n)\,v}{\text{ſin.}\,v} = \frac{nnc}{1-nn}\left(\text{coſ.}\,nv - \frac{\text{coſ.}\,v\,\text{ſin.}\,nv}{\text{ſin.}\,v}\right)$$

vnde concluditur $LM = \frac{n(1-n)c}{1-nn}\,\text{coſ.}\,nv = \frac{nc}{1+n}\,\text{coſ.}\,nv$. At radius oſculi curuae in M eſt $= \frac{dz}{dv} = nc\,\text{coſ.}\,nv$, qui cum cadat in rectam ML, erit radius oſculi ad ML vt $1+n$ ad 1, hoc eſt in ratione conſtanti, quae ſunt proprietates epicycloidum et hypocycloidum.

DEMON-

DEMONSTRATIO SERIEI

$$\frac{4.\ 6.\ 10.\ 14.\ 18.\ 22.\ \ldots\ldots\ (4n-10)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ \ldots\ldots\ (n-1)}$$

EXHIBITAE IN RECENSIONE VI. TOMI VII. COMMENTARIORVM A. S. P.

Auctore

S. KOTELNIKOW.

Quum a quibusdam amicis intellexiſſem, deſiderari libellum, artem agrimenſoriam continentem, ad ſcribendum me accinxi, atque demonſtrato theoremate, *in omni figura rectilinea vt conſtrui poſſit debere datorum numerum eſſe* $2n-3$, denotante n numerum laterum, ad hanc aequationem perueni $2n-3 = x+y+z$, vbi, x numerum datorum laterum, y angulorum poligoni, z diagonalium, denotat. In enumeratione itemque euolutione praecipuorum conſtructionis caſuum in hac aequatione contentorum, continet enim multos, reſpexi potiſſimum ad tres ſequentes, quibus:

I. $x=n$, $y=n-3$, $z=0$

II. $x=n-2$, $y=n-1$, $z=0$

III. $x=n$, $y=0$, $z=n-3$.

et euolutis duobus prioribus, deduxi etiam formulas, exhibentes numerum conſtructionum pro quouis poligono, ſequentes

pro

Pro I caſu

$$\frac{4.5.6.7.8.9 - - - - - n}{1.2.3.4.5.6 - - - - - - (n-3)} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$$

Pro II. caſu

$$\frac{3.4.5.6.7.8 - - - - - - - n}{1.2.3.4.5.6 - - - - - - (n-2)} = \frac{n(n-1)}{1.\ 2}.$$

Sed poſtquam perueni ad tertium caſum euoluendum, multum deſudaui; nunquam tamen, nec ex delineatione figurarum, nec ex aliis ratiociniis, ad legem, qua figurae pro quibusuis caſibus formantur, peruenire potui: nec vnquam plures his quatuor 1, 2, 5, 14, certis et 42 incerto numero, detegere potui. Omiſſis itaque delineationibus figurarum, ad ratiocinia me conuerti et legem numerorum detectorum ſcrutans ad illam ſeriem delapſus ſum. De cuius veritate tamen dubitaui, et iure quidem, nam ex quatuor tantum numeris certis 1, 2, 5, 14 et quinto 42 incerto, vti dixi, eruta eſt: et quamquam ſcirem in ſimilibus demonſtrationibus inductioni aliquantillum indulgendum eſſe, in medium tamen proferre non auſus ſum, etiamſi mihi viderer, legitima ratiocinia in eruenda iſta ſerie adhibuiſſe.

At cum nuper VII. Commentariorum tomum adeptus eſſem, volens me confirmare de veritate ſeriei inuentae, inſpexi diſſertationem Cel. *Segneri*, vt aliquid ibi ad meam vtilitatem detegerem; cumque nihil tale inueniſſem, ad ſummarium diſſertationum conuerſus, vt iudicium de ea latum inſpicerem, vidi inopinanter maximo mihi gaudio, eandem ſeriem, a ſummo quodam

dam geometra communicatam, cuius auctoritas maximum pondus demonſtrationi meae addidit, meque de veritate illius ſeriei prorſus conuictum reddidit. Puto etiam illum iisdem ratiociniis ad hanc seriem perueniſſe, quibus ego deductus ſum. Sunt autem haec:

Quum in qualibet figura numerus triangulorum eam componentium ſit $n-2$, facile patet, ex datis lateribus n et diagonalibus $n-3$, poſſe atque debere tot triangula conſtrui, quot neceſſe eſt ad conſtruendam figuram omnibus modis poſſibilibus, atque illa triangula ita conſtrui poſſe, vt ſemper $n-2$ combinata praebeant verum conſtructionis modum, illam, non aliam, figuram exhibentem. Pone iam numerum triangulorum, qui combinati $n-2$ exhibent omnes conſtructionis modos eandem figuram praebentes, N: erit numerus modorum conſtructionis pro quauis figura $\frac{N}{n-2}$. Hinc

Pro triangulo $\frac{N}{1}$
Pro —— IV. $\frac{N}{2}$
—— V. $\frac{N}{3}$
—— VI. $\frac{N}{4}$
—— VII. $\frac{N}{5}$.

Numeri vero inuenti conſtructionis modorum, ita ſe habent:

Pro triangulo	III.	1
—— ——	IV.	2
—— ——	V.	5
—— ——	VI.	14
—— ——	VII.	42.

De numero 42 quanquam ſim incertus, tamen eum aſſumo propterea, quod a lege reliquorum non abhorreat.

His ergo poſitis, habeo ſequentes aequationes:

$$\frac{N}{1} = 1;\ \frac{N}{2} = 2;\ \frac{N}{3} = 5;\ \frac{N}{4} = 14;\ \frac{N}{5} = 42.$$

Ex quibus ſequitur, numeros modorum conſtructionis 1, 2, 5, 14, 42, poſſe exprimi hoc modo:

$$\frac{1}{1},\ \frac{2\cdot 2}{2},\ \frac{3\cdot 5}{3},\ \frac{4\cdot 14}{4},\ \frac{5\cdot 42}{5}$$

ſiue

$$\frac{1}{1},\ \frac{4}{2},\ \frac{15}{3},\ \frac{56}{4},\ \frac{210}{5}.$$

Numeri ſuperiores denotant numerum triangulorum, quorum certi quidam $n-2$ dant figuram quaeſitam.

Cum in prioribus caſibus duobus numeri modorum conſtruendi figuras, ex datis lateribus n et $n-3$ angulis, item ex datis $n-2$ lateribus et $n-1$ angulis, per factores exhibeantur, concludo etiam hic per factores debere exprimi, quem in finem retineo numeros

$$\frac{1}{1},\ \frac{2\cdot 2}{2},\ \frac{3\cdot 5}{3},\ \frac{4\cdot 14}{4},\ \frac{5\cdot 42}{5}.$$

Ex numero primo $\frac{1}{1}$ nihil concludere poſſum, ſumo ſecundum $\frac{2\cdot 2}{2}$, eumque transformo, vt aliquod indicium capiam de progreſſione factorum denominatoris, qui iam aliquam legem tenent, creſcunt ſcilicet vnitate, quam legem perpetuo retinebo in omnibus numeris. Transformo vero numerum $\frac{2\cdot 2}{2}$ in $\frac{2\cdot 2\cdot 3}{2\cdot 3}$. Hic nouus $\frac{2\cdot 2\cdot 3}{2\cdot 3}$ poteſt demum transformari in $\frac{3\cdot 4}{2\cdot 3}$ et $\frac{2\cdot 6}{2\cdot 3}$.

Eodem

Eodem modo tertium muto in $\frac{4.5.6}{2.3.4}$ et in $\frac{2.6.10}{2.3.4}$; aliter enim retentis iisdem denominatorum factoribus transformari non poſſunt, vt in numeratore conſtans aliqua lex pateat.

Notum vero, ſeries per factores expreſſas hac proprietate gaudere, vt abiecto vel addito aliquo, vel aliquibus factoribus, ſemper certos caſus exhibeant, qua proprietate poſteriores $\frac{2}{2}.\frac{6}{3}$ et $\frac{2}{2}.\frac{6}{3}.\frac{10}{4}$ gaudent. Enim vero abiecto factore $\frac{10}{4}$, exhibetur $\frac{2.6}{2.3}=2$, caſus pro quadrilatero, et abiecto demum factore $\frac{6}{3}$, habetur $\frac{2}{2}=\frac{1}{1}=1$, pro triangulo; priores vero $\frac{3}{2}.\frac{4}{3}$ et $\frac{4}{2}.\frac{5}{3}.\frac{6}{4}$ hanc proprietatem non habent, quare retineo poſteriores, et habeo pro III. $\frac{2}{2}$; pro IV. $\frac{2}{2}.\frac{6}{3}$; pro V. $\frac{2}{2}.\frac{6}{3}.\frac{10}{4}$.

Simili modo numerum $\frac{4.14}{4}$ transmuto in $\frac{2.3.4.5.14}{2.3.4.5}$ $=\frac{2.6.10.14}{2.3.4.5}$, duobus prioribus viam monſtrantibus, et hac ratione inuenio pro VI. $\frac{2.6.10.14}{2.3.4.5}$, qui omnes numeros, pro III. IV. et V ſcilicet, in ſe continet.

Poſtremo aſſumo quintum numerum $\frac{42.5}{5}=\frac{5.6.7}{5}$, et transmuto eum in $\frac{2.3.4.5.6.7.6}{2.3.4.5.6.}=\frac{2.6.10.14.18}{2.3.4.5.6}$, quare habeo ſequentes numeros modorum conſtruendi figuras:

Pro trigono $\frac{2}{2}$
Pro quadrilatero $\frac{2}{2}.\frac{6}{3}$
Pro pentagono $\frac{2}{2}.\frac{6}{3}.\frac{10}{4}$
Pro hexagono $\frac{2}{2}.\frac{6}{3}.\frac{10}{4}.\frac{14}{5}$
Pro heptagono $\frac{2}{2}.\frac{6}{3}.\frac{10}{4}.\frac{14}{5}.\frac{18}{6}$.

In quibus iam lex progreſſionis facile patet, terminusque generalis erit $\frac{4n-10}{n-1}$, nam denominatoris factores a numero laterum vnitate deficiunt; factores vero numeratoris a quadruplo numero laterum denario. Conſequenter numerus conſtructionum variarum ex datis lateribus et diagonalibus pro omni figura erit

$$\frac{2.6.10.14.18 \text{ - - - - - - } (4n-10)}{2.3.4.5.6 \text{ - - - - - - } (n-1)}.$$

PHYSICO-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

DE
MOTV CORPORIS
AD DVO CENTRA VIRIVM FIXA ATTRACTI.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Cum nunc quidem nullum amplius dubium ſuperſit, quin corpora coeleſtia perinde moueantur, ac ſi ſe mutuo attraherent in ratione reciproca duplicata diſtantiarum theoria Aſtronomiae ad ſummum faſtigium eueheretur, ſi motum quotcunque corporum ſe mutuo in iſta ratione attrahentium definire liceret. Hinc Aſtronomiae perfectio a Mechanica eſt expectanda, ex cuius principiis cum motus illi facile ad aequationes differentiales reuocentur, totum negotium ab Analyſi pendet, eaque eius parte, quae in reſolutione aequationum differentialium conſumitur. Quae ergo in Aſtronomia nondum ſatis ſunt explorata, eorum cognitio ex ſola Analyſi eſt haurienda, cuius adhuc inſignis promotio deſideratur, antequam vel vnici phaenomeni perfectam explicationem reddere valeamus.

2. Quod autem in hoc negotio adhuc praeſtare licuit, tam exiguam vniuerſae theoriae particulam complectitur, quae fere pro nihilo ſit reputanda; plus enim ab Auctoribus, qui hoc argumentum tractauerunt, non eſt effectum, quam vt motum tantum

duorum corporum, quae ſe mutuo in ratione reciproca diſtantiarum duplicata attrahunt, accurate definire docuerint. Statim ac tria corpora ſe hac lege attrahentia proponuntur, qui tamen caſus a ſcopo praefixo adhuc longiſſime abeſt, cum numerus corporum in mundo ſe mutuo attrahentium ſit maximus; omnia artificia, quae quidem adhuc in Analyſi ſunt inuenta, ei enodando minime ſufficiunt. Et qui hoc problema ſunt aggreſſi, plus non praeſtiterunt, quam vt caſu, quo vnius corporis vis prae duobus reliquis valde eſt exigua, eorum motus vero tantum proxime aſſignauerint.

3. Ex hoc fonte omnia ſunt hauſta, quae adhuc de motu Lunae, ac de perturbationibus, quibus motus planetarum afficiuntur, ſunt explorata, vbi commode vſu venit, vt vis, qua Luna ad Terram vrgetur, plurimum ſuperet vim ad Solem directam, in planetis autem vis ad Solem tendens multo maior ſit viribus, quibus in ſe inuicem agunt. Quae circumſtantia niſi accederet, omnis opera in motuum determinatione fruſtra impenderetur. Quod ad Lunam attinet, cuius motum adhuc per approximationes ſatis exacte definire licuit, ſi longius a Terra eſſet remota, non video, quomodo vix vllam eius motus notitiam adipiſci poſſemus, ſi ſcilicet tam longe a Terra eſſet remota, vt ſortem ſatellitis Terrae eſſet amiſſura, iam in ordinem planetarum primariorum tranſitura. Tum nimirum eius motus mediam quandam legem ſequeretur inter motum ſatelliti telluris et motum planetae primarii, cuius autem rationem vix vllo modo perſpicere liceret, quandoquidem approximationibus nullus amplius locus relinqueretur.

4.

4. Quod ſi Luna Terrae eſſet vicinior, quam re vera eſt, vis perturbans a Sole profecta minueretur, ideoque Luna in motu ſuo circa Terram exactius leges *Keplerianas* ſequeretur; aberrationes autem facilius certiusque definirentur. Quo longius autem Lunam a Terra remoueri fingamus, eo maiores aberrationes eius motum inquinabunt, quoad in eiusmodi regionem perueniat, vbi vis ad Solem tendens multum ſuperet vim Terrae, ibique quaſi Terram deſerens, incipiet rationem motus planetarum primariorum ſequi, verum tamen quasdam adhuc perturbationes a vi Terrae patietur, quas denuo, ſed alio modo, per approximationes inueſtigare licebit, perinde ac perturbationes in motibus planetarum primariorum repraeſentari ſolent.

5. Motus autem Lunae maxime foret indeterminabilis, ſi quater vel quinquies a Terra magis eſſet remota, quam re vera eſt, ac ſi creatori libuiſſet, Lunae motum in tali regione aſſignare, Aſtronomi certe miris modis in eius inueſtigatione, ac fortaſſe in caſſum, defatigarentur, qui cum nunc ſine auxilio Theoriae locum Lunae ad datum tempus ſine notabili errore definire haud potuerint, eo caſu ſemper in Lunae locis aſſignandis enormes errores eſſent commiſſuri, etiamſi fortaſſe innumerabiles obſeruationes collegiſſent. Quin etiam ne ſuſpicari quidem licet, qualem formam tum tabulis Aſtronomicis induci conueniret; neque patet, quomodo tabula mediorum motuum conſtrui queat, cum eos neque ad Terram, neque ad Solem, referre liceat, multo minus intelligitur, quibusnam argumentis pro anomaliis definiendis eſſet vtendum. Ita tanquam eximium Aſtro-

nomiae commodum ſpectare debemus, quod in ſyſtemate ſaltem noſtro ſolari non eiusmodi dentur corpora, de quibus dubium ſit, vtrum planetis primariis an ſecundariis annumerari debeant.

6. In craſſiſſima autem ignorantia circa motus coeleſtes verſaremur, ſi ipſa Terra ita inter reliqua corpora fuiſſet diſpoſita, vt neque legem planetarum primariorum neque ſecundariorum ſequeretur; quoniam tum motus Solis apparens, cui cognitio reliquorum motuum innititur, nobis omnino eſſet inexplicabilis, quamuis plurium ſaeculorum obſeruationes collegiſſemus. Vnica via ad Aſtronomiae notitiam perueniendi vtique per Analyſin pateret, cuius beneficio problema de motu trium pluriumue corporum ſe mutuo attrahentium reſolui deberet, neque hoc ſubſidio deſtituti quicquam in hac ſcientia praeſtare poſſemus. Verum etiamnum ſolutio huius problematis ſummam eſſet allatura vtilitatem, dum motus coeleſtes, quos iam proxime tantum agnoſcere datur, accurate aſſignare valeremus; ita vt tum demum Aſtronomiae ſtudium ad ſummum perfectionis gradum euehi ſit cenſendum.

7. Cum igitur euolutio caſus plurium corporum nequicquam ante ſit expectanda, quam caſus trium fuert expeditus, hic tanquam fundamentum plenioris cognitionis aſtronomicae ſpectari debet, qui propterea omnino dignus eſt iudicandus, ad cuius reſolutionem omnes Geometrae vires ſuas coniunctim impendan. Maximae quidem occurrunt difficultates, quas fruſtra adhuc ſuperare conati ſunt Geometrae, verum fructu

inde

inde ſperandi nimis ſunt pretioſi, quam vt ab vlteriori inueſtigatione deterreri quemquam conueniat. Ac ſi hoc ipſum problema tentantes omnes vias penetrandi occluſas offendimus, quod in aliis laboribus ſaepe vſui fuit adminiculum, dum tractatio aliarum quaeſtionum affinium tandem ad quaeſitum ſcopum perduxit, eodem et hic vtamur, atque vires in aliis quaeſtionibus ſimilibus, etiamſi per ſe nullum vſum habiturae videantur, exerceamus, certa ſpe freti, inde quicquam luminis ad tenebras illas diſſipandas eſſe affulſurum.

8. Hoc igitur inſtitutum ſequens, iſtud problema tractandum ſuſcepi, vt propoſitis duobus corporibus fixis motum tertii cuiusdam corporis, quod ad vtrumque attrahatur, inueſtigarem. Sint ſcilicet corpora fixa in A et B, quorum maſſae iisdem litteris A et B indicentur, tertium autem corpus, cuius motum in eodem plano cum punctis A et B abſolui aſſumo, iam elapſo aliquo tempore t verſetur in M, cuius motus aſſignari debeat. Quod problema, etſi in mundo caſus ſimilis non occurrat, ſimilibus tamen difficultatibus, atque id cui vniuerſa Aſtronomia innititur, implicatum deprehenditur, quae autem propterea, quod hic duo corpora A et B immota finguntur, facilius ſuperari poſſe videntur; caſus enim continet aliquos per ſe perſpicuos, quorum conſideratio ad euolutionem generalem perducere videatur. Tab. III. Fig. 1.

9. Primum enim obſeruo, ſi maſſa alterius corporis A vel B euaneſcat, motum corporis M leges *Keplerianas* eſſe ſecuturum, ita vt ſectionem conicam

 circa

circa alterutrum punctum B vel A eſſet deſcriptum. Quod idem proxime eueniet, ſi corpus M ita fuerit proiectum, vt alteri corpori maneat valde vicinum, ab altero autem tantopere ſemper diſtet, vt vis eo tendens prae altera ſit minima. Vnde patet motum eo magis a regulis *Keplerianis* abhorrere, quominus diſtantiae a punctis A et B futurae ſint inaequales; hocque caſu motus corporis M non adeo diſſimilis videtur ei, quem ſecuturus eſſet, ſi corpora A et B non forent fixa, vt inde nihil luminis ſperari poſſet. Tum vero etiam hic notari meretur caſus, quo ambo corpora A et B inter ſe ſint aequalia, corpusque M ita mouetur, vt eius orbita ad ambo aequaliter referatur; hoc enim caſu motus quoque in ſectione conica fieri deprehendetur.

10. His igitur obſeruatis ſtatuamus diſtantiam conſtantem $AB = a$, et variabiles $AM = v$, $BM = u$; tum vero demiſſo ab M in AB perpendiculo MP, ſit $AP = x$, et $PM = y$, hincque $BP = a - x$ et

$$v = \sqrt{(xx + yy)} \text{ atque } u = \sqrt{((a-x)^2 + yy)}.$$

Cum iam vis acceleratrix, qua corpus M ad A attrahitur, ſit $\frac{A}{vv}$, et qua ad B attrahitur vt $\frac{B}{uu}$, hinc naſcetur vis ſecundum directionem $PA = \frac{Ax}{v^3} - \frac{B(a-x)}{u^3}$ et ſecundum directionem $MP = \frac{Ay}{v^3} + \frac{By}{u^3}$; ex quibus ſumto elemento temporis dt conſtante principia mechanica has ſuppeditant formulas:

$$\text{I. } ddx = -2g\,dt^2\left(\frac{Ax}{v^3} - \frac{B(a-x)}{u^3}\right)$$

$$\text{II. } ddy = -2g\,dt^2\left(\frac{Ay}{v^3} + \frac{By}{u^3}\right)$$

quae

quae motus determinationem continent, vbi g eſt certa quaedam quantitas conſtans pro menſuris abſolutis introducta.

11. Cum neutra harum aequationum integrationem admittat, videndum eſt, num eas ita inter ſe combinare liceat, vt inde aequatio integrabilis exſurgat, hocque duplici modo praeſtari neceſſe eſt. Atque vna quidem huiusmodi combinatio in promtu eſt; priore enim per dx et altera per dy multiplicata ſumma prodit

$$dxddx + dyddy = 2g\,dt^2\left(\frac{A(xdx+ydy)}{v^3} + \frac{B(ydy-(a-x)dx)}{u^3}\right)$$

quae ob $vdv = xdx + ydy$ et $udu = ydy - (o-x)dx$ abit in hanc

$$dxddx + dyddy = -2g\,dt^2\left(\frac{A\,dv}{vv} + \frac{B\,du}{uu}\right)$$

cuius integralis, introducta noua conſtante, eſt

$$dx^2 + dy^2 = 4g\,dt^2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right)$$

vbi cum $\surd(dx^2 + dy^2)$ elementum curuae a corpore M tempuſculo dt deſcriptae exprimat, erit $\frac{\surd(dx^2+dy^2)}{dt}$ vera corporis M celeritas, quae ergo per diſtantias v et u commode determinatur.

12. Vna integratione expedita, vt aliam inſuper exploremus, elidamus ex formulis primo inuentis alteram maſſam, ſicque obtinebimus has aequationes:

$$(a-x)ddy + yddx = -2g\,dt^2.\frac{Aay}{v^3}$$

$$x\,ddy - y\,ddx = -2g\,dt^2.\frac{Bay}{u^3},$$

vnde quidem parum lucri conſecuturi videmur. Verum ſi perpendamus eſſe

$$d.\frac{x}{v} = \frac{(xx+yy)dx - x(xdx+ydy)}{v^3} = \frac{y(ydx-xdy)}{v^3} \text{ et}$$

$$d.\frac{a-x}{u} = -\frac{dx((a-x)^2+yy) - (a-x)(ydy-(a-x)dx)}{u^3} = -\frac{y(ydx+(a-x)dy)}{u^3}$$

 multi-

multiplicemus priorem per $xdy-ydx$ et poſteriorem per $(a-x)dy+ydx$, habebimusque

$$(xdy-ydx)((a-x)ddy+yddx)=2gAadt^2.d.\frac{x}{v}$$

$$((a-x)dy+ydx)(xddy-yddx)=2gBadt^2.d.\frac{a-x}{u}.$$

13. Cum iam ſit $(a-x)ddy+yddx=d.((a-x)dy+ydx)$ et $xddy-yddx=d.(xdy-ydx)$, commode euenit, vt ſumma harum aequationum ſit integrabilis, integrali prodeunte:

$$(xdy-ydx)((a-x)dy+ydx)=2gadt^2\left(\frac{Ax}{v}+\frac{B(a-x)}{u}+D\right)$$

ſicque problema iam perduximus ad reſolutionem aequationum differentialium primi gradus, quousque in ſolutione problematis de tribus corporibus mobilibus pertingere adhuc non licuit. Quodſi iam elementum temporis dt hinc elidamus, peruenimus ad hanc aequationem ſimpliciter differentialem:

$$a(dx^2+dy^2)\left(\frac{Ax}{v}+\frac{B(a-x)}{u}+D\right)=2(xdy-ydx)((a-x)dy+ydx)\left(\frac{A}{v}+\frac{B}{u}+\frac{C}{a}\right)$$

inter binas variabiles x et y, qua natura curuae quaeſitae determinatur; ita vt nunc quidem totum negotium ad reſolutionem aequationis differentialis primi gradus ſit perductum, quo in genere Analyſis iam eximiis adminiculis eſt inſtructa.

14. Duo autem hic obſtacula occurrunt, alterum quod differentialia dx et dy ad duas dimenſiones aſcendunt; alterum vero in quantitatibus irrationalibus v et u conſiſtit. Quo haec obſtacula facilius vincere queamus, pona-

ponamus angulos $BAM=\zeta$, $ABM=\eta$, eritque $x=v\cos.\zeta$; $y=v\sin.\zeta=u\sin\eta$; et $a-x=u\cos.\eta$, vnde colligitur

$$dx^2+dy^2=dv^2+vvd\zeta^2=du^2+uud\eta^2$$

$$xdy-ydx=vvd\zeta \text{ et } (a-x)dy+ydx=uud\eta$$

quibus valoribus aequatio noſtra ad hanc formam ſimpliciorem reducitur:

$$a(dv^2+vvd\zeta^2)A\cos.\zeta+B\cos.\eta+D)=2vvuud\zeta d\eta\left(\frac{A}{v}+\frac{B}{u}+\frac{C}{a}\right).$$

Porro autem ob $v=\frac{a\sin.\eta}{\sin.(\zeta+\eta)}$ et $u=\frac{a\sin.\zeta}{\sin.(\zeta+\eta)}$ erit $x=\frac{a\cos.\zeta\sin.\eta}{\sin.(\zeta+\eta)}$ et $y=\frac{a\sin.\zeta\sin.\eta}{\sin.(\zeta+\eta)}$, hincque $dx=-\frac{ad\zeta\sin.\eta\cos.\eta+ad\eta\sin.\zeta\cos.\zeta}{\sin.(\zeta+\eta)^2}$ et $dy=\frac{ad\zeta\sin.\eta^2+ad\eta\sin.\zeta^2}{\sin.(\zeta+\eta)^2}$, vnde fit dx^2+dy^2 $=\frac{aa(d\zeta^2\sin.\eta^2+d\eta^2\sin.\zeta^2-2d\zeta d\eta\sin.\zeta\sin.\eta\cos.(\zeta+\eta))}{\sin.(\zeta+\eta)^4}=dv^2+vvd\zeta^2$.

15. Si ope horum valorum aequationem noſtram ad ſolos binos angulos ζ et η reducamus, nanciſcemur:

$$(d\zeta^2\sin.\eta^2d\eta^2\sin.\zeta^2-2d\zeta d\eta\sin\zeta\sin.\eta\cos.(\zeta+\eta))(A\cos.\zeta\ B\cos.\eta+D)$$

$$=2d\zeta d\eta\sin.\zeta^2\sin.\eta^2\left(\frac{A\sin.(\zeta+\eta)}{\sin.\eta}+\frac{B\sin.(\zeta+\eta)}{\sin.\zeta}+C\right)$$

$$=2d\zeta d\eta\sin.\zeta\sin.\eta(A\sin.\zeta\sin.(\zeta+\eta)+B\sin.\eta\sin(\zeta+\eta)+C\sin.\zeta\sin.\eta)$$

quae reuocatur ad hanc formam multo ſimpliciorem:

$$(d\zeta^2\sin.\eta^2+d\eta^2\sin.\zeta^2)(A\cos.\zeta+B\cos.\eta+D)=2d\zeta d\eta\sin\zeta\sin.\eta(A\cos.\eta+B\cos.\zeta+C\sin.\zeta\sin.\eta+D\cos.(\zeta+\eta)).$$

Vel

Vel ob $\text{coſ.}(\zeta+\eta)=\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\eta-\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\eta$ ſtatuamus $C-D=E$, vt habeamus:

$$d\zeta^2\,\text{ſin.}\,\eta^2+d\eta^2\,\text{ſin.}\,\zeta^2=\frac{2\,d\zeta\,d\eta\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\eta(A\,\text{coſ.}\,\eta+B\,\text{coſ.}\,\zeta+D\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\eta+E\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\eta}{A\,\text{coſ.}\,\zeta+B\,\text{coſ.}\,\eta+D}$$

vnde ſi ponamus breuitatis gratia

$$A\,\text{coſ}\,\eta+B\,\text{coſ.}\,\zeta+D\,\text{coſ}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\eta+E\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\eta=P \text{ et}$$

$$A\,\text{coſ.}\,\zeta+B\,\text{coſ.}\,\eta+D=Q$$

deducimus radicem extrahendo:

$$\frac{d\zeta\,\text{ſin.}\,\eta}{d\eta\,\text{ſin.}\,\zeta}=\frac{P\pm\surd(PP-QQ)}{Q}.$$

16. Cum nulla via pateat huiusmodi aequationes reſoluendi, contemplemur caſus, quibus reſolutio eſt in poteſtate, qui ſunt, quando vel $A=0$, vel $B=0$; tametſi enim etiam his caſibus aequatio poſtrema parum tractabilis videtur, tamen ex formulis principalibus ſolutio facile deducitur. Si enim ponamus $B=0$, prior integratio praebet:

$$dx^2+dy^2=4g\,dt^2\left(\frac{A}{v}+\frac{C}{a}\right)$$

tum vero ex §. 12. ob $B=0$ impetramus

$$x\,ddy-y\,ddx=0 \text{ hincque } x\,dy-y\,dx=\text{Conſt.}\,dt$$

ponamus ergo $(x\,dy-y\,dx)^2=4g\,F\,a\,dt^2$, fietque

$$Fa(dx^2+dy^2)^2=2(x\,dy-y\,dx)^2\left(\frac{A}{v}+\frac{C}{a}\right)=v^4\,d\zeta^2\left(\frac{A}{v}+\frac{C}{a}\right)$$

et factis ſubſtitutionibus ſupra indicatis:

$$F(d\zeta^2\,\text{ſin.}\,\eta^2+d\eta^2\,\text{ſin.}\,\zeta^2-2\,d\zeta\,d\eta\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}(\zeta+\eta))$$
$$=d\zeta^2\,\text{ſin.}\,\eta^4\left(\frac{A\,\text{ſin.}(\zeta+\eta)}{\text{ſin.}\,\eta}+C\right)$$

ſeu

$$d\zeta^2\,\text{ſin.}\,\eta^2\left(1-\frac{A\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}(\zeta+\eta)-C\,\text{ſin.}\,\eta^2}{F}\right)+d\eta^2\,\text{ſin.}\,\zeta^2$$
$$=2\,d\zeta\,d\eta\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}(\zeta+\eta)$$

cuius

cuius quidem reſolutio vix facilior videtur, quam praecedentis; at extracta radice quadrata ſatis fit manifeſta.

17. Verum antequam ad hanc vltimam aequationem inter ζ et η pertigimus, iam aſſecuti eramus aequationem duabus tantum litteris v et ζ conſtantem, hanc:

$$Fa(dv^2 + vvd\zeta^2) = v^4 d\zeta^2 (\tfrac{A}{v} + \tfrac{C}{a})$$

ex qua ſtatim elicitur

$$Fadv^2 = vvd\zeta^2 (Av + \tfrac{Cvv}{a} - Fa) \text{ ſeu}$$

$$Fadv^2 = v^4 d\zeta^2 (\tfrac{C}{a} + \tfrac{A}{v} - \tfrac{Fa}{vv})$$

vnde fit

$$\tfrac{dv}{vv} \surd Fa = d\zeta \surd (\tfrac{C}{a} + \tfrac{A}{v} - \tfrac{Fa}{vv})$$

ex qua indoles ſectionum conicarum more ſolito elici ſolet. Poſito nempe $\frac{1}{v} = \frac{z}{a}$, fit

$$-dz = d\zeta \surd (\tfrac{C + Az}{F} - zz), \text{ vnde ſequitur}$$

$$\zeta + \alpha = \text{Arc. coſ.} \tfrac{2Fz - A}{\surd(AA + 4CF)}$$

hincque $2Fz = A + \text{coſ.}(\zeta + \alpha). \surd(AA + 4CF)$

ita vt ſit $v = \frac{2Fa}{A + \text{coſ.}(\zeta + \alpha).\surd(AA + 4CF)} = \frac{a\,\text{ſin.}\,\eta}{\text{ſin.}(\zeta + \eta)}$.

18. Hinc ergo aequatio integralis inter angulos ζ et η ita exprimitur, vt ſit

$$\frac{2F\,\text{ſin.}(\zeta + \eta)}{\text{ſin.}\,\eta} = A + \text{coſ.}(\zeta + \alpha). \surd(AA + 4CF)$$

ſeu, quo ex dato angulo ζ angulus η facilius inueniri poſſit, ob $\text{ſin.}(\zeta + \eta) = \text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ}\,\eta + \text{coſ.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\eta$, erit

$$2F\text{ſin.}\zeta\text{cot.}\eta + 2F\text{coſ.}\zeta = A + \text{coſ.}(\zeta + \alpha).\surd(AA + 4CF)$$

ſeu mutata forma conſtantium:

$$\text{cot.}\,\eta + \text{cot.}\,\zeta = \frac{A + M\,\text{coſ.}\zeta + N\,\text{ſin.}\zeta}{2F\,\text{ſin.}\,\zeta}.$$

 Atque

Atque hinc ſimul intelligimus, ſi ponamus $A = o$, fore

$$\cot.\zeta + \cot.\eta = \frac{B + M'\,\mathrm{coſ}.\eta + N'\,\mathrm{ſin}.\eta}{2F'\,\mathrm{ſin}.\eta}.$$

Quare iam conſtant formae, ad quas integrale aequationis differentialis §. 15. datae caſibus vel $A = o$ vel $B = o$ perducatur, quo ipſo via ad haec integralia perveniendi inueſtigari poterit.

Pro caſu $B = o$.

19. Hoc caſu aequatio noſtra principalis §. 15. inuenta abit in hanc formam:

$$d\zeta^2\,\mathrm{ſin}.\eta^2 + d\eta^2\,\mathrm{ſin}.\zeta^2 = \frac{2\,d\zeta\,d\eta\,\mathrm{ſin}.\zeta\,\mathrm{ſin}.\eta(A\,\mathrm{coſ}.\eta + D\,\mathrm{coſ}.\zeta\,\mathrm{coſ}.\eta + E\,\mathrm{ſin}.\zeta\,\mathrm{ſin}.\eta}{A\,\mathrm{coſ}.\zeta + D}$$

cuius ergo nouimus integralem huiusmodi formam eſſe habituram:

$$\cot.\eta + \cot.\zeta = \frac{A + M\,\mathrm{coſ}.\zeta + N\,\mathrm{ſin}.\zeta}{2F\,\mathrm{ſin}.\zeta}$$

ſeu breuius $\cot.\eta = \alpha + \frac{\beta + \gamma\,\mathrm{coſ}.\zeta}{\mathrm{ſin}.\zeta}$

quae igitur quomodo ex differentiali ſit eruenda, inveſtigari oportet. Quod etiamſi non difficulter per calculum ſtatim ab initio ad hunc caſum accommodatum perſpiciatur, tamen conſideratio corporis B calculum ita immutauit, vt haec concluſio non niſi per ambages inde colligi poſſe videatur. Primum autem intelligimus, loco anguli η non inutiliter eius cotangentem introductum iri; aequatione ergo per $\mathrm{ſin}.\eta^4$ diuiſa habemus

$$\frac{d\zeta^2}{\mathrm{ſin}.\eta^2} + \mathrm{ſin}.\zeta^2(d.\cot.\eta)^2 = -\frac{2\,d\zeta\,\mathrm{ſin}.\zeta\,d.\cot.\eta(A\cot.\eta + D\,\mathrm{coſ}.\zeta\cot.\eta + E\,\mathrm{ſin}.\zeta)}{A\,\mathrm{coſ}.\zeta + D}.$$

20. Ponamus $\cot.\eta = z$, ob $\mathrm{ſin}.\eta = \frac{1}{\sqrt{(1+zz)}}$ erit:

$$d\zeta^2(1+zz) + dz^2\,\mathrm{ſin}.\zeta^2 = -\frac{2\,d\zeta\,dz\,\mathrm{ſin}.\zeta(z(A + D\,\mathrm{coſ}.\zeta) + E\,\mathrm{ſin}.\zeta)}{A\,\mathrm{coſ}.\zeta + D}$$

vnde

vnde radicem extrahendo ſit

$$\frac{dz\,\text{ſin.}\,\zeta}{d\zeta} = -\frac{z(A+D\,\text{coſ.}\,\zeta) - E\,\text{ſin.}\,\zeta + \sqrt{\left\{(AA-DD)zz\,\text{ſin}\,\zeta^2 + 2E(A+D\,\text{coſ.}\,\zeta)z\,\text{ſin}\,\zeta + EE\,\text{ſin}\,\zeta^2 - (A\,\text{coſ.}\,\zeta + D)^2\right\}}}{A\,\text{coſ.}\,\zeta + D}$$

vbi notetur, quantitatem ſigno radicali inuolutam ita referri poſſe:

$$\left(z\,\text{ſin.}\,\zeta.\sqrt{(AA-DD)} + \frac{E(A+D\,\text{coſ.}\,\zeta)}{\sqrt{(AA-DD)}}\right)^2 - \frac{(AA-DD+EE)(A\,\text{coſ.}\,\zeta+D)^2}{AA-DD}$$

Quare poſito

$$z\,\text{ſin.}\,\zeta.\sqrt{(AA-DD)} + \frac{E(A+D\,\text{coſ.}\,\zeta)}{\sqrt{(AA-DD)}} = \frac{s(A\,\text{coſ.}\,\zeta+D)\sqrt{(AA-DD+EE)}}{\sqrt{(AA-DD)}}$$

vt ſit

$$z\,\text{ſin.}\,\zeta = -\frac{E(A+D\,\text{coſ.}\,\zeta) + s(A\,\text{coſ.}\,\zeta+D)\sqrt{(AA-DD+EE)}}{AA-DD}$$

erit quantitas ſigno radicali implicata

$$\frac{(A\,\text{coſ.}\,\zeta+D)\sqrt{(AA-DD+EE)}}{\sqrt{(AA-DD)}}\sqrt{(ss-1)}.$$

21. Ponatur breuitatis gratia haec quantitas formulae irrationali aequalis $= V$, et cum noſtra aequatio ſit

$$dz\,\text{ſin}\,\zeta.(A\,\text{coſ.}\,\zeta+D) + zd\zeta(A+D\,\text{coſ.}\,\zeta) + Ed\zeta\,\text{ſin}\,\zeta = Vd\zeta$$

diuidatur ea per $(A\,\text{coſ.}\,\zeta + D)^2$, et ita repraeſentari poterit

$$d.\frac{Az\,\text{ſin.}\,\zeta + E}{A(A\,\text{coſ.}\,\zeta+D)} = \frac{V\,d\zeta}{(A\,\text{coſ.}\,\zeta+D)^2}.$$

At per noſtram ſubſtitutionem eſt

$$Az\,\text{ſin.}\,\zeta + E = -\frac{DE(A\,\text{coſ.}\,\zeta+D) + As(A\,\text{coſ.}\,\zeta+D)\sqrt{(AA-DD+EE)}}{AA-DD}$$

quo valore ſubſtituto, ſimulque valore ipſius V reſtituto, erit

$$d.\frac{-DE+As)\sqrt{(AA-DD+EE)}}{A(AA-DD)} = \frac{d\zeta\sqrt{(AA-DD+EE)}}{(A\,\text{coſ.}\,\zeta+D)\sqrt{(AA-DD)}}\sqrt{(ss-1)}$$

ſeu

$$\frac{ds}{\sqrt{(AA-DD)}} = \frac{d\zeta\sqrt{(ss-1)}}{A\,\text{coſ.}\,\zeta+D} \text{ vel } \frac{ds}{\sqrt{(ss-1)}} = \frac{d\zeta(AA-DD)}{A\,\text{coſ.}\,\zeta+D}$$

quae

quae etiam ita repraeſentari poteſt:

$$\frac{-ds}{\surd(1-ss)} = \frac{d\zeta\surd(DD-AA)}{A\,cof.\,\zeta+D}$$

cuius integrale eſt

$$\text{Arc.}\,cof.\,s = \text{Arc.}\,cof\,\frac{A+D\,cof.\,\zeta}{A\,cof.\,\zeta+D}+\alpha.$$

22. Cum iam ſit Arc. coſ. $\frac{A+D\,cof.\,\zeta}{A\,cof.\,\zeta+D} = \text{Arc.}\,fin.\,\frac{fin.\,\zeta\surd(DD-AA)}{A\,cof.\,\zeta+D}$ fiet $s = \frac{(A+D\,cof.\,\zeta)\,cof.\,\alpha - fin.\,\alpha\,fin.\,\zeta.\surd(DD-AA)}{A\,cof.\,\zeta+D}$ ſiue hoc modo:

$$s = \frac{n(A+D\,cof.\,\zeta) - fin.\,\zeta\surd(1-nn)(DD-AA)}{A\,cof.\,\zeta+D}$$

vbi ſi fuerit $D<A$, numerum $n>1$ capi conuenit.

Hoc itaque valore ſubſtituto aequatio integralis quaeſita erit:

$$fin.\,\zeta\,cot.\,\eta = \frac{E(A+D\,cof.\,\zeta)}{DD-AA} - \frac{n(A+D\,cof.\,\zeta)+fin.\,\zeta\surd(1-nn)(DD-AA)}{DD-AA}\surd(AA-DD+EE)$$

et poſito $n = \frac{E-F}{\surd(AA-DD+EE)}$ erit

$$fin.\,\zeta\,cot.\,\eta = \frac{F(A+D\,cof.\,\zeta)}{DD-AA} + \frac{fin.\,\zeta.\surd(AA-DD+2EF-FF)}{\surd(DD-AA)}$$

vbi F eſt quantitas conſtans arbitraria per nouam integrationem introducta. Ea autem mutata erit

$$fin.\,\zeta\,cot.\,\eta = \frac{A+D\,cof.\,\zeta}{G} + fin.\,\zeta.\surd\left(\frac{2E}{G}+\frac{AA-DD}{GG}-1\right).$$

Pro caſu A=B et D=E=o.

23. Simili modo expeditur caſus $A=o$, et aequatio integralis non differt a praecedente, niſi quod litterae A et B, item anguli ζ et η, inter ſe permutentur. Verum hoc caſu, quo $A=B$, atque $D=E=o$, aequatio noſtra fit

$$d\zeta^2\,fin.\,\eta^2 + d\eta^2\,fin.\,\zeta^2 = 2\,d\zeta\,d\eta\,fin.\,\zeta\,fin.\,\eta$$

quae

quae manifeſto praebet $d\zeta \text{ſin.}\, \eta = d\eta \text{ſin.}\, \zeta$, hincque integrando

$l\text{tang.}\tfrac{1}{2}\zeta = \text{Conſt.} + l\text{tang.}\tfrac{1}{2}\eta$, vnde fit

$m\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}\zeta = n\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}\eta$, ſeu $m(1-\text{coſ.}\zeta)\text{ſin.}\eta = n(1-\text{coſ.}\eta)\text{ſin.}\zeta$

ita vt tangentes ſemiſſium angulorum BAM et ABM perpetuo eandem rationem ſeruent. Cum iam coordinatis x et y introductis ſit $\text{coſ.}\zeta = \frac{x}{v}$; $\text{ſin.}\zeta = \frac{y}{v}$; $\text{coſ.}\eta = \frac{a-x}{u}$ et $\text{ſin.}\eta = \frac{y}{u}$, erit

$\frac{m(v-x)y}{vu} = \frac{n(u-a+x)y}{vu}$ ſeu $m(v-x) = n(u-a+x)$

ita vt ſit $m(AM - AP) = n(BM - BP)$.

24. Cum igitur ſit $m(v-x) = n(u-a+x)$, notetur eſſe

$x = \frac{aa+vv-uu}{2a}$ et $a-x = \frac{aa+uu-vv}{2a}$, vnde fit

$m(uu-(a-v)^2) = n(vv-(a-u)^2)$ ſeu

$m(u+v-a)(u+a-v) = n(v+u-a)(v+a-u)$

quae diuiſa per $u+v-a)$ praebet

$m(a+u-v) = n(a+v-u)$ ſeu $(m+n)(u-v) = (n-m)a$

ita vt ſit $u-v = \frac{(n-m)a}{m+n}$, quae comparetur cum hac:

$nu - mv = na - (m+n)x$, vnde colligitur

$(n-m)u = \frac{(mm+nn)a}{m+n} - (m+n)x$, et

$(n-m)v = \frac{2mna}{m+n} - (m+n)x$

quae quadrata ſuppeditat

$$(n-m)^2yy + (n-m)^2xx = \frac{4mmnnaa}{(m+n)^2} - 4mnax + (m+n)^2xx$$

ſeu $(n-m)^2yy = \frac{4mmnnaa}{(m+n)^2} - 4mnax + 4mnxx$.

 25. Su-

25. Sumamus abſciſſas a puncto medio C, ſitque $CA = CB = b$, ideoque $a = 2b$; et ponatur $CP = z$; tum vero ſtatuatur $m + n = b$ et $n - m = c$, et habebimus, ob $x = b - z$,

$$cv = bz - cc \quad \text{et} \quad cu = bz + cc$$

hincque $yy = \frac{bb - cc}{cc}(zz - cc)$, vnde patet, curuam eſſe hyperbolam centro C deſcriptam, cuius ſemiaxis $= c$, et diſtantia focorum a centro $CA = CB = b$, foreque $\text{tang.}\, \frac{1}{2}\zeta : \text{tang.}\, \frac{1}{2}\eta = b + c : b - c$. Cum porro ſit $dy = \frac{zdz}{\sqrt{(zz - cc)}} \cdot \frac{\sqrt{(bb - cc)}}{c}$, erit $dx^2 + dy^2 = dy^2 + dz^2 = \frac{dz^2(bbzz - c^4)}{cc(zz - cc)}$; vnde quia ob $C = D + E = 0$ et $B = A$ habemus $dx^2 + dy^2 = 4Ag\,dt^2(\frac{c}{bz - cc} + \frac{c}{bz - cc}) = \frac{8Abcgz\,dt^2}{bbzz - c^4}$, erit celeritas in $M = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dt} = \frac{2\sqrt{2Abcgz}}{\sqrt{(bbzz - c^4)}}$? et poſito $z = c$, prodit celeritas in vertice hyperbolae $= \frac{2\sqrt{2Abg}}{\sqrt{(bb - cc)}}$. Etſi ergo hyperbola abeat in ellipſin ſumendo $c > b$, tamen euidens eſt, motum in ellipſi abſolui non poſſe, quia celeritas foret imaginaria, ita vt hoc caſu corpus M nonniſi in hyperbola moueri poſſit.

26. Quemadmodum autem iſte motus in hyperbola futurus ſit comparatus, ex temporis ratione colligetur. Scilicet cum

ſit $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dz}{c}\sqrt{\frac{bbzz - c^4}{zz - cc}}$ erit

$$2dt\sqrt{2Abcg} = \frac{dz(bbzz - c^4)}{c\sqrt{z}(zz - cc)} \text{ ideoque}$$

$$2ct\sqrt{2Abcg} = \int\frac{dz(bbzz - c^4)}{\sqrt{z}(zz - cc)}.$$

Per reductionem autem integralium conſtat eſſe:

$$\int\frac{zzdz}{\sqrt{z(zz - cc)}} = \frac{2}{3}\sqrt{z(zz - cc)} + \frac{1}{3}cc\int\frac{dz}{\sqrt{z(zz - cc)}}$$

vnde

vnde tempus t ita determinatur, vt ſit

$$2ct\sqrt{2Abcg} = \tfrac{2}{3}bb\sqrt{z(zz-cc)} + \tfrac{1}{3}cc(bb-3cc)\int\frac{dz}{\sqrt{z(zz-cc)}}.$$

Pendet ergo determinatio temporis ab integratione formulae $\int\frac{dz}{\sqrt{z(zz-cc)}}$, quam neque ad quadraturam circuli, neque hyperbolae, reduci poſſe conſtat.

27. Reducamus hanc determinationem quoque ad angulum $BAM = \zeta$, et cum ſit tang $\tfrac{1}{2}\zeta = \frac{v-x}{y} = \frac{v-b+z}{y}$, habebimus tang. $\tfrac{1}{2}\zeta = \sqrt{\frac{b+c}{b-c}\cdot\frac{z-c}{z+c}}$, hincque $z = \frac{c(b-c\,coſ.\zeta)}{c-b\,coſ.\zeta}$, vnde fit $v = \frac{bb-cc}{c-b\,coſ.\zeta}$. Quare porro nanciſcimur $\sqrt{(zz-cc)} = \frac{c\,ſin.\zeta.\sqrt{(bb-cc)}}{c-b\,coſ.\zeta}$ et $dz = -\frac{c(bb-cc)d\zeta\,ſin.\zeta}{(c-b\,coſ.\zeta)^2}$. Ergo $\frac{dz}{\sqrt{(zz-cc)}} = -d\zeta.\sqrt{(bb-cc)}$ et

$$\frac{dz}{\sqrt{z(zz-cc)}} = -\frac{d\zeta\sqrt{(bb-cc)(c-b\,coſ.\zeta)}}{\sqrt{c(b-c\,coſ.\zeta)}}$$

vnde colligimus

$$2ct\sqrt{2Abcg} = \frac{2bbc\,ſin.\zeta\sqrt{(bb-cc)c(b-c\,coſ.\zeta)}}{3(c-b\,coſ.\zeta)\sqrt{(c-b\,coſ.\zeta)}}$$

$$-\tfrac{1}{3}cc(bb-3cc)\int\frac{d\zeta\sqrt{(bb-cc)(c-b\,coſ.\zeta)}}{\sqrt{c(b-c\,coſ.\zeta)}}$$ ſiue

$$\frac{2t\sqrt{2Abg}}{\sqrt{(bb-cc)}} = \frac{2bb\,ſin.\zeta\sqrt{(b-c\,coſ.\zeta)}}{3(c-b\,coſ.\zeta)^{\frac{3}{2}}} - \tfrac{1}{3}(bb-3cc)\int\frac{d\zeta\sqrt{(c-b\,coſ.\zeta)}}{\sqrt{(b-c\,coſ.\zeta)}}.$$

28. Caſus hic notatu dignus occurrit, quo $bb = 3cc$, quoniam eo tempus algebraice aſſignari poteſt. Tum autem erit celeritas in vertice hyperbolae $= 2\sqrt{\frac{Ag\sqrt{3}}{c}} = 2\sqrt{\frac{3Ag}{b}}$. Quae celeritas ſi dicatur $= k$, erit

$$kt = \frac{2cc\,ſin.\zeta}{c-b\,coſ.\zeta}\sqrt{\frac{b-c\,coſ.\zeta}{c-b\,coſ.\zeta}} = \frac{2c\,ſin.\zeta}{1-coſ.\zeta.\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\sqrt{3}-coſ.\zeta}{1-coſ.\zeta.\sqrt{3}}},$$

vel breuius ita: $\frac{t}{c}\sqrt{2Abcg} = \sqrt{z(zz-cc)}$, vnde vt ad datum tempus t definiatur locus corporis M, reſolui oportet hanc aequationem cubicam:

$$z^3 - ccz = \frac{2Acgtt}{cc} = \frac{2Agtt\sqrt{3}}{c}.$$

Pro

Pro aliis autem caſibus praeter tractatos vix quicquam circa motum definire licebit; hic vero occaſio ſe obtulit eiusmodi artificia adhibendi, quae forte in vberiore huius argumenti tractatione vtilitatem afferre poterunt. Adiungamus tamen adhuc caſum, quo corpus in ellipſi, cuius ambo foci ſint in punctis A et B, mouebitur.

De motu corporis M in Ellipſi.

29 Quoniam caſu praecedente vidimus corpus in hyperbola moueri poſſe, dubium eſt nullum, quin etiam certo quodam caſu motus in ellipſi fieri queat, qui autem diuerſus erit a praecedenti, quo erat $D = 0$ et $E = 0$, exiſtente $A = B$. Vt autem ellipſis prodeat, neceſſe eſt, vt fiat $\text{tang.}\frac{1}{2}\zeta.\text{tang.}\frac{1}{2}\eta = m$, ſeu retentis valoribus $CP = z$, et $CA = CB = b$, vt fiat $(v-b+z)(u-b-z) = myy$. Cum autem ſit

$$\text{vel } yy = vv-(b-z)^2 = (v-b+z)(v+b-z)$$
$$\text{vel } yy = uu-(b+z)^2 = (u-b-z)(u+b+z)$$

erit, vtroque ſeorſim adhibito,

vel $u-b-z = m(v+b-z)$, vel $v-b+z = m(u+b+z)$ quibus additis prodit $u+v-2b = m(u+v+2b)$ ita vt ſit $u+v = \frac{2(1+m)b}{1-m} = 2c$, ſeu $m = \frac{c-b}{c+b}$, denotante $2c$ axem transuerſum. Cum igitur ſit $uu-vv = 4bz$, erit hac per illam diuiſa $u-v = \frac{2bz}{c}$, ideoque $v = c-\frac{bz}{c}$ et $u = c+\frac{bz}{c}$, hincque $yy = \frac{cc-bb}{cc}(cc-zz)$.

30. Cum nunc ſit $l\text{tang.}\frac{1}{2}\zeta + l\text{tang.}\frac{1}{2}\eta = lm$, erit differentiando $\frac{d\zeta}{\text{ſin.}\zeta} + \frac{d\eta}{\text{ſin.}\eta} = 0$, hincque $\frac{d\zeta\,\text{ſin.}\eta}{d\eta\,\text{ſin.}\zeta} = -1$. Quare

Quare ex §. 15. neceſſe eſt, vt ſit $\frac{P-\surd(PP-QQ)}{Q}=-1$, ideoque $P+Q=0$, vnde eſſe oportet

$$(A+B)(\cos.\zeta+\cos.\eta)+D+D\cos.\zeta\cos.\eta$$
$$+E\sin.\zeta\sin.\eta=0$$

vbi conſtantes ita ſunt definiendae, vt haec aequatio conueniat cum natura ellipſis $\tang.\tfrac{1}{2}\zeta\tang\tfrac{1}{2}\eta=m=\frac{c-b}{c+b}$ ſeu hac $\frac{(1-\cos.\zeta)(1-\cos.\eta)}{\sin.\zeta\sin.\eta}=m=\frac{c-b}{c+b}$. Cum ergo ſit $\sin\zeta\sin.\eta=\frac{1-\cos.\zeta-\cos\eta+\cos.\zeta\cos.\eta}{m}$, hoc valore ibi ſubſtituto fit

$$\left.\begin{array}{l} m(A+B)(\cos\zeta+\cos.\eta)+mD+mD\cos.\zeta\cos\eta \\ -E(\cos\zeta+\cos.\eta)+\ \ E+\ \ E\cos.\zeta\cos.\eta \end{array}\right\}=0$$

quocirca hae conditiones requiruntur, vt ſit $E=m(A+B)$ et $D=-\frac{E}{m}=-A-B$, hincque $E=\frac{c-b}{c+b}(A+B)$ et $C=D+E=\frac{-2b}{c+b}(A+B)$.

31. Vt iam motus rationem in hac ellipſi definiamus ob $dy=-\frac{z\,dz}{\surd(cc-zz)}\cdot\frac{\surd(cc-bb)}{c}$ erit $dz^2+dy^2=\frac{dz^2(c^4-bbzz)}{c\surd(cc-zz)}$ et $\surd(dz^2+dy^2)=\frac{dz\surd(c^4-bbzz)}{c\surd(cc-zz)}$ ſupra autem inuenimus eſſe

$$dx^2+dy^2=4g\,dt^2(\frac{A}{u}+\frac{B}{u}+\frac{C}{2b})\text{ ſeu}$$
$$dx^2+dy^2=4g\,dt^2(\frac{Ac}{cc-bz}+\frac{Bc}{cc+bz}-\frac{A-B}{c+b})$$

quae tranſit in hanc formam:

$$dx^2+dy^2=\frac{4bg\,dt^2(A(c+z)(cc+bz)+B(c-z)(cc-bz))}{(c+b)(c^4-bbzz)}$$

vnde colligimus

$$\frac{4bccg\,dt^2}{b+c}=\frac{dz^2(c^4+bbzz)^2}{(cc-zz)(A(c+z)(cc+bz)+B(c-z)(cc-bz))}$$

hincque integrando

$$2ct\sqrt{\frac{bg}{b+c}} = \int \frac{(c^4 - bbzz)dz}{\sqrt{(cc-zz)(A(c+bz)+B(c-z)(cc-bz))}}$$

32. Si ponamus $B = 0$, caſus reducitur ad vnicum centrum virium A, cuius calculum ſupra expediuimus; verum haec ſolutio cum illa minime conuenit, vnde methodus hic vſurpata non parum ſuſpecta redditur. Cuius ſingularis phaenomeni cauſam inueſtigaturus obſeruo, per ſuperiorem aequationem (§. 30.) ne ambas quidem litteras D et E determinari. Ex aequatione enim $(1-\text{coſ.}\,\zeta)(1-\text{coſ.}\,\eta) = m\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\eta$ quadrata colligimus $(1-\text{coſ.}\,\zeta)(1-\text{coſ.}\,\eta) = mm(1+\text{coſ.}\,\zeta)(1+\text{coſ.}\,\eta)$ vnde fit

$$(1-mm)(1+\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\eta) = (1+mm)(\text{coſ.}\,\zeta + \text{coſ.}\,\eta).$$

Cum nunc eſſe debeat

$$(E+MD)(1+\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\eta) = (E-m(A+B))(\text{coſ.}\,\zeta+\text{coſ.}\,\eta)$$

ſufficit, vt ſit

$$E(1+mm)+Dm(1+mm) = E(1-mm)-(A+B)m(1-mm)$$

vnde fit $2Em+D(1+mm)+(A+B)(1-mm)=0$, ſeu $E = -\frac{(A+B)(1-mm)}{2m} - \frac{D(1+mm)}{2m}$, hincque

$$C = D+E = -\frac{(A+B)(1-mm)}{2m} - \frac{D(1-m)^2}{2m}.$$

33. Hinc vitium methodi, qua hic ſum vſus, eo clarius in oculos incurrit. Cum enim quantitas D maneat indeterminata, etiamſi curua a corpore M deſcripta ſit data, celeritas corporis M in quolibet orbitae ſuae puncto non eſſet determinata, ſed quaſi arbitrio noſtro relinqueretur. Nam pro vertice ellipſis foco

A

A propiore, quo eſt diſtantia $v = c - b$, et $u = c + b$, ſeu ob $\frac{c-b}{c+b} = m$, $v = \frac{2mb}{1-m}$ et $u = \frac{2b}{1-m}$, erit celeritatis quadratum $\frac{dx^2+dy^2}{dt^2} = \frac{2g}{b}\left(\frac{A(1-m)}{2m} + \frac{B(1-m)}{2} - \frac{(A+B)(1-mm)}{2m} - \frac{D(1-m)^2}{2m}\right) = \frac{g}{mb}(-Am(1-m) - B(1-m) - D(1-m)^2)$ ideoque ipſa celeritas $\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dt} = \sqrt{\frac{(1-m)g}{mb}(-Am - B - D(1-m))}$, quae cum indefinita eſſe nullo modo poſſit, manifeſtum eſt, methodum §. 30. adhibitam eſſe vitioſam, id quod adhuc clarius perſpicitur, ſi ambo corpora A et B euaneſcentia ſtatuamus, quo caſu certe corpus M in linea recta eſſet inceſſurum, neque ergo ellipſim, quam hic aſſumſimus, deſcribere poterit, etiamſi calculus noſter aliter oſtendat. Plurimum igitur intererit vitium huius methodi noſſe, ne ſimili methodo alias vtentes in errores delabamur.

34. Quoniam in calculo nullum vitium deprehenditur, ipſum ratiocinium, quo vſus ſum, fallax ſit neceſſe eſt, quod iſti innititur fundamento, quod aequationi differentiali

$$\frac{d\zeta \sin.\eta}{d\eta \sin.\zeta} = \frac{P+\sqrt{(PP+QQ)}}{Q} \text{ inde §. 15.}$$

ſatisfaciat aequatio finita $(1-\text{coſ.}\zeta)(1-\text{coſ.}\eta) = m \sin.\zeta \sin\eta$, (quae vtique eſt pro ellipſi) ſiquidem vna conſtantium D et E certo modo aſſumatur. Verum iam alia occaſione obſeruaui fieri poſſe, vt aequationi cuipiam differentiali aequatio quaedam finita ſatisfaciat, quae tamen in aequatione per integrationem inde deducta minime contineatur. Veluti aequationi $ds\sqrt{(1-zz)} = dz$ manifeſto ſatisfacit valor $z = 1$, qui tamen in aequatione integrali $s = \alpha + \text{Arc.}\sin.z$ vel $z = \sin.(s-\alpha)$

 neuti-

neutiquam continetur, quicunque valor conſtanti arbitrariae α tribuatur. Nullum ergo eſt dubium, quin ob ſimilem cauſam methodus hic adhibita in errorem induxerit.

35. Cum in originem huius erroris accuratius inquirerem, praeter expectationem incidi in completam problematis propoſiti ſolutionem, ex qua omnia, quae hactenus in hoc argumento erant deſiderata, perſpicue cognoſcentur, ſimulque origo erroris hic commiſſi ita dilucide intelligetur, vt haud difficulter in aliis ſimilibus caſibus huiusmodi errores euitare queamus. Atque hoc modo tractatio problematis mechanici tantas dilucidationes in ipſa Analyſi ſuppeditauit, quas alias forte fruſtra quaeſiuiſſemus, quod quidem non inſolitum eſt cenſendum, cum pleraque artificia, quae adhuc in Analyſi ſunt inuenta, quaeſtionibus Mechanicis ac Phyſicis accepta ſint referenda. In his enim ſaepe eiusmodi inueſtigationes occurrunt, quae occaſionem praebent, indolem aequationum accuratius rimandi, atque adeo non raro commiſſio errorum illuſtribus inuentis fuit compenſata, quemadmodum mihi hoc problema tractanti vſu venit, cuius ſolutionem, niſi in praedictum errorem fuiſſem delapſus, certe nunquam inueniſſem.

Solutio completa Problematis propoſiti.

36. Cum problema propoſitum pendeat ab integratione iſtius aequationis differentialis:

$$\frac{d\zeta \,\text{ſin.}\,\eta}{d\eta \,\text{ſin.}\,\zeta} = \frac{P + \surd(PP - QQ)}{Q}$$

poſito

poſito breuitatis gratia

$$P = A \operatorname{coſ.} \eta + B \operatorname{coſ.} \zeta + D \operatorname{coſ.} \zeta \operatorname{coſ.} \eta + E \operatorname{ſin.} \zeta \operatorname{ſin.} \eta$$

$$Q = A \operatorname{coſ.} \zeta + \operatorname{coſ.} \eta + D$$

eam redigo ad hanc formam:

$$\frac{d\zeta \operatorname{ſin.} \eta + d\eta \operatorname{ſin.} \zeta}{d\zeta \operatorname{ſin.} \eta - d\eta \operatorname{ſin.} \zeta} = \frac{P + Q + \sqrt{(PP - QQ)}}{P - Q + \sqrt{(PP - QQ)}} = \frac{\sqrt{(P + Q)}}{\sqrt{(P - Q)}}$$

Tum vero poſito $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\zeta = p$, et $\operatorname{tang.} \frac{1}{2}\eta = q$, vnde cum ſit $\frac{d\zeta}{\operatorname{ſin.} \zeta} = \frac{dp}{p}$ et $\frac{d\eta}{\operatorname{ſin.} \eta} = \frac{dq}{q}$, noſtra aequatio reſolvenda erit

$$\frac{q\,dp + p\,dq}{q\,dp - p\,dq} = \sqrt{\frac{P + Q}{P - Q}}.$$

37. At poſito $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\zeta = p$ et $\operatorname{tang.} \frac{1}{2}\eta = q$, erit $\operatorname{ſin.} \zeta = \frac{2p}{1 + pp}$; $\operatorname{coſ.} \zeta = \frac{1 - pp}{1 + pp}$; $\operatorname{ſin.} \eta = \frac{2q}{1 + qq}$; $\operatorname{coſ.} \eta = \frac{1 - qq}{1 + qq}$. Quare cum ſit

$$P + Q = (A + B)(\operatorname{coſ.} \zeta + \operatorname{coſ.} \eta) + D(1 + \operatorname{coſ.} \zeta \operatorname{coſ} \eta) + E \operatorname{ſin.} \zeta \operatorname{ſin.} \eta$$

fiet

$$P + Q \frac{2(A + B)(1 + ppqq) + 2D(1 + ppqq) + 4Epq}{(1 + pp)(1 + qq)}.$$

Deinde quia

$$P - Q = (A - B)(\operatorname{coſ.} \eta - \operatorname{coſ.} \zeta) - D(1 - \operatorname{coſ} \zeta \operatorname{coſ.} \eta) + E \operatorname{ſin.} \zeta \operatorname{ſin.} \eta$$

fiet

$$P - Q = \frac{2(A - B)(pp - qq) - 2D(pp + qq) + 4Epq}{(1 + pp)(1 + qq)}.$$

His ergo valoribus introductis, noſtra aequatio reſoluenda erit

$$\frac{q\,dp + p\,dq}{q\,dp - p\,dq} = \sqrt{\frac{(A + B)(1 - ppqq) + D(1 + ppqq) + 2Epq}{(A - B)(pp - qq) - D(pp + qq) + 2Epq}}$$

quam facile patet ad ſeparationem variabilium perduci poſſe, cum poſterioris membri numerator ſit functio ipſius pq, in denominatore autem quantitates p et q vbique duas dimenſiones compleant.

38. Hunc in finem ſtatuamus $pq = r$ et $\frac{p}{q} = s$ vt ſit $p = \sqrt{rs}$ et $q = \sqrt{\frac{r}{s}}$, vnde ob $pdq + qdp = dr$ et $qdp - pdq = qqds$ fiet

$$\frac{dr}{qqds} = \sqrt{\frac{(A+B)(1-rr)+D(1+rr)+2Er}{qq((A+B)(ss-1)-D(ss+1)+2Es)}} \text{ ſeu}$$

$$\frac{dr}{ds} = \sqrt{\frac{r((A+B)(1-rr)+D(1+rr)+2Er)}{s((A-B)(ss-1)-D(ss+1)+2Es)}}$$

ex qua forma ſeparatio variabilium r et s manifeſta eſt, erit enim

$$\frac{dr}{\sqrt{r(A+B+D+2Er-(A+B-D)rr)}} = \frac{ds}{\sqrt{s(-A+B-D+2Es+(A-B-D)ss)}}$$

Vel ſi ponamus $r = xx$ et $s = yy$, habebitur

$$\frac{dx}{\sqrt{(A+B+D+2Exx-(A+B-D)x^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(-A+B-D+2Eyy+(A-B-D)y^4)}}$$

Quia autem r et s valores habere poſſent negatiuos, haec transformatio incommodum implicare poſſet.

39. Verum etſi hoc modo ad aequationem ſeparatam peruenimus, tamen vtriusque partis integratio magna laborat difficultate, cum neque per circuli quadraturam, neque per logarithmos, abſolui poſſit; conſtructio autem per arcus ſectionum conicarum hic parum lucis eſſet allatura. Atque haec difficultas non minuitur, etſi ſtatuamus $B = 0$, quo tamen caſu ſolutio aliunde eſt nota; quin etiam caſus $A = 0$ et $B = 0$, quo linea a corpore M deſcripta certo eſt recta, haud minore difficultate impeditur. Neceſſe igitur eſt, vt his caſibus ambae quantitates tranſcendentes, quae ex vtraque integratione naſcuntur, eiusmodi inter ſe teneant relationem, vt adeo aequationem algebraicam inter r et s complectantur. Ex quo nouus aperitur campus in aequationes algebraicas, quae forte in huiusmodi

iusmodi aequationibus differentialibus continentur, inquirendi. Atque in hoc negotio alia adhuc methodus non conſtat praeter eam, quam ante aliquot annos expoſui, et cuius ope infinitos arcus, tam ellipticos, quam hyperbolicos, inter ſe comparaui, quae mihi iam tum maximum vſum aliquando habitura videbatur.

40. Sed antequam ad hanc methodum confugiam, haud abs re erit, originem erroris ſupra commiſſi indicare, quae nunc quidem eſt manifeſta. Cum enim ad aequationem differentialem ſeparatam inter r et s pervenerimus, euidens eſt, ei ſatisfieri, ſi vel ipſi r eiusmodi valor conſtans α tribuatur, vt fiat

$$A + B + D + 2Er - (A + B - D)rr = 0$$

vel ipſi s eiusmodi valor conſtans β, vt fiat

$$-A + B - D + 2Es + (A - B - D)ss = 0$$

quod vtrumque duobus modis fieri poteſt. Atque inde quidem $r = \alpha$, ſequitur $pq = \text{tang.}\tfrac{1}{2}\zeta \, \text{tang.}\tfrac{1}{2}\eta = \alpha$, quae eſt aequatio pro ellipſi, hinc autem $s = \beta$ prodit $\frac{p}{q} = \beta$ ſeu $\text{tang.}\tfrac{1}{2}\zeta = \beta \, \text{tang.}\tfrac{1}{2}\eta$, quae eſt aequatio pro hyperbola. Neque vero hae curuae problema ſoluunt, niſi iidem valores in aequatione integrata contineantur. Euidens ergo eſt, nos in ſimilem errorem illapſuros fuiſſe, ſi corporis M motum in hyperbola fieri aſſumſiſſemus.

41. Perpendamus iam aequationem integralem, quam caſu $B = 0$ ſupra §. 22 ex noſtra aequatione differentiali elicuimus, quae erit

$$\frac{\text{ſin.}\zeta \, \text{coſ.}\eta}{\text{ſin.}\eta} = \frac{A + D\,\text{coſ.}\zeta}{C} + \text{ſin.}\zeta \cdot \sqrt{\left(\frac{2E}{C} + \frac{AA - DD}{CC} - 1\right)}$$

haec-

haecque, poſito tang. $\frac{1}{2}\zeta = p$ et tang. $\frac{1}{2}\eta = q$, porroque $pq = r$ et $\frac{p}{q} = s$, abit in hanc formam:

$$\left.\begin{array}{ll} GG(r+s)^2 + 2G(A+D)(r-s) & -8EGrs + (A+D)^2 \\ \quad + 2G(A-D)rs(r-s) & -2(AA-DD)rs \\ & +(A-D)^2 rrss \end{array}\right\} = 0$$

quae eſt ergo aequatio integralis completa, huic aequationi differentiali conueniens

$$\frac{dr}{\sqrt{r(A+D+2Er-(A-D)rr)}} = \frac{ds}{\sqrt{s(-A-D+2Es+(A-D)ss)}}$$

quandoquidem in illa noua conſtans arbitraria G continetur.

42. Vt generaliter in talem aequationem integralem inquiramus, ponamus breuitatis gratia

$$\frac{A+B}{2E} = m; \quad \frac{A-B}{2E} = n, \text{ et } \frac{D}{2E} = k$$

vt aequatio hoc modo integranda, ſiquidem id fieri poteſt, ſit

$$\frac{dr}{\sqrt{r(m+k+r-(m-k)rr)}} = \frac{ds}{\sqrt{s(-n-k+s+(n-k)ss)}}$$

cuius integralem in hac forma contineri fingamus:

$$\mathfrak{A} + 2\mathfrak{B}r + 2\beta s + \mathfrak{C}rr + \gamma ss + 2\mathfrak{D}rs + 2\mathfrak{E}rrs + 2\varepsilon rss + \mathfrak{F}rrss = 0$$

vnde deducimus:

$$rr = \frac{-2\mathfrak{B}r - 2\mathfrak{D}rs - 2\varepsilon rss - \mathfrak{A} - 2\beta s - \gamma ss}{\mathfrak{C} + \mathfrak{E}s + \mathfrak{F}ss} \text{ et}$$

$$ss = \frac{-2\beta s - 2\mathfrak{D}rs - 2\mathfrak{E}rrs - \mathfrak{A} - 2\mathfrak{B}r - \mathfrak{C}rr}{\gamma + 2\varepsilon r + \mathfrak{F}rr}.$$

Tum vero eſt differentiando:

$$dr(\mathfrak{B} + \mathfrak{C}r + \mathfrak{D}s + 2\mathfrak{E}rs + \varepsilon ss + \mathfrak{F}rss) + ds(\beta + \gamma s + \mathfrak{D}r + \mathfrak{E}rr + 2\varepsilon rs + \mathfrak{F}rrs) = 0.$$

43.

43. Ex illis autem aequationibus radicem extrahendo obtinemus

$$r(\mathfrak{C}+2\mathfrak{E}s+\mathfrak{F}ss)+\mathfrak{B}+\mathfrak{D}s+\varepsilon ss = S = \sqrt{((\mathfrak{B}+\mathfrak{D}s+\varepsilon ss)^2-(\mathfrak{A}+2\beta s+\gamma ss)(\mathfrak{C}+2\mathfrak{E}s+\mathfrak{F}ss))}$$

atque

$$s(\gamma+2\varepsilon r+\mathfrak{F}rr)+\beta+\mathfrak{D}r+\mathfrak{E}rr = -R = -\sqrt{((\beta+\mathfrak{D}r+\mathfrak{E}rr)^2-(\mathfrak{A}+2\mathfrak{B}r+\mathfrak{C}rr)(\gamma+2\varepsilon r+\mathfrak{F}rr))}$$

qui valores in differentiali adhibito praebent

$$S\,dr - R\,ds = 0 \quad \text{ſeu} \quad \frac{dr}{R} = \frac{ds}{S}.$$

Supereſt ergo tantum, vt formulae irrationales R et S iis, quas noſtra aequatio reſoluenda continet, aequales efficiantur, ſeu vt fiat

$$R = \sqrt{((m+k)r + rr - (m-k)r^3)} \quad \text{et}$$
$$S = \sqrt{(-(n+k)s + ss + (n-k)s^3)}.$$

44. Cum igitur hic vtrinque tam termini primi conſtantes, quam vltimi r^4 et s^4 continentes, ſint nulli, fieri debet

$$\mathfrak{B}\mathfrak{B}-\mathfrak{A}\mathfrak{C}=0;\quad \varepsilon\varepsilon-\gamma\mathfrak{F}=0;\quad \beta\beta-\mathfrak{A}\gamma=0;\quad \mathfrak{E}\mathfrak{E}-\mathfrak{C}\mathfrak{F}=0.$$

Erit ergo

$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} = \frac{\mathfrak{E}\mathfrak{E}}{\mathfrak{F}} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\varepsilon\varepsilon}{\mathfrak{F}} = \frac{\beta\beta}{\mathfrak{A}}.$$

hincque $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{F}} = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}{\mathfrak{E}\mathfrak{E}} = \frac{\beta\beta}{\varepsilon\varepsilon}$.

Porro ob terminos rr et ss fieri oportet

$$\mathfrak{D}\mathfrak{D}+2\mathfrak{B}\varepsilon-\mathfrak{A}\mathfrak{F}-4\beta\mathfrak{E}-\gamma\mathfrak{C}=1$$
$$\mathfrak{D}\mathfrak{D}+2\beta\mathfrak{E}-\mathfrak{A}\mathfrak{F}-4\mathfrak{B}\varepsilon-\gamma\mathfrak{C}=1$$

 vnde

vnde ſit $6\mathfrak{B}\varepsilon = 6\beta\mathfrak{E}$, ſeu $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{E}} = \frac{\beta}{\varepsilon}$, tum vero,

$$\mathfrak{D}\mathfrak{D} - 2\beta\mathfrak{E} - \mathfrak{A}\mathfrak{F} - \gamma\mathfrak{C} = 1, \text{ ſeu}$$

$$\mathfrak{D}\mathfrak{D} - 2\beta\mathfrak{E} - \mathfrak{A}\mathfrak{F} - \frac{\beta\beta\mathfrak{E}\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}\mathfrak{F}} = 1, \text{ hincque}$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{F}(\mathfrak{D}\mathfrak{D} - 1) = (\beta\mathfrak{E} + \mathfrak{A}\mathfrak{F})^2$$

vel $\beta\mathfrak{E} = -\mathfrak{A}\mathfrak{F} + \sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{F}(\mathfrak{D}\mathfrak{D} - 1)} = \mathfrak{B}\varepsilon$;

ſiue, cum ſit $\mathfrak{F} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{E}\mathfrak{E}}{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}$, erit

$$\mathfrak{D}\mathfrak{D} = 2\beta\mathfrak{E} + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{E}\mathfrak{E}}{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} + \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{B}\beta\beta}{\mathfrak{A}\mathfrak{A}} + 1 = \left(\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{E}}{\mathfrak{B}} + \frac{\mathfrak{B}\beta}{\mathfrak{A}}\right)^2 + 1.$$

45. Reliqui termini dant

$$2\beta\mathfrak{D} - 2\mathfrak{A}\varepsilon - 2\mathfrak{B}\gamma = m + k.$$

$$2\mathfrak{D}\mathfrak{E} - 2\mathfrak{C}\varepsilon - 2\mathfrak{B}\mathfrak{F} = -m + k.$$

$$2\mathfrak{B}\mathfrak{D} - 2\mathfrak{A}\mathfrak{E} - 2\beta\mathfrak{C} = -n - k.$$

$$2\mathfrak{D}\varepsilon - 2\gamma\mathfrak{E} - 2\beta\mathfrak{F} = -n - k.$$

quarum ſumma praebet hanc aequalitatem:

$$\mathfrak{D}(\beta + \mathfrak{B} + \varepsilon + \mathfrak{E}) - \mathfrak{A}(\varepsilon + \mathfrak{E}) - \mathfrak{F}(\beta + \mathfrak{B}) - \mathfrak{C}\varepsilon - \gamma\mathfrak{E} - \mathfrak{B}\gamma - \beta\mathfrak{C} = 0.$$

Cum nunc inuenerimus $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{E}} = \frac{\beta}{\varepsilon}$, ponamus $\mathfrak{B} = \lambda\beta$, et $\mathfrak{E} = \lambda\varepsilon$; erit $\mathfrak{C} = \frac{\lambda\lambda\beta\beta}{\mathfrak{A}}$; $\gamma = \frac{\beta\beta}{\mathfrak{A}}$, et $\mathfrak{F} = \frac{\varepsilon\varepsilon}{\beta\beta}\mathfrak{A}$; vnde ponatur porro $\mathfrak{A} = \mu\beta\beta$ et $\mathfrak{F} = \mu\varepsilon\varepsilon$, vt ſit $\mathfrak{C} = \frac{\lambda\lambda}{\mu}$, et $\gamma = \frac{1}{\mu}$, hincque $\mathfrak{D}\mathfrak{D} = 1 + (\mu\beta\varepsilon + \frac{\lambda}{\mu})^2$, quibus valoribus, praeter hunc vltimum, ibi ſubſtitutis, obtinebimus,

$$\mathfrak{D}(\lambda + 1)(\beta + \varepsilon) - \mu\beta\varepsilon(\lambda + 1)(\beta + \varepsilon) - \frac{\lambda(\lambda + 1)(\beta + \varepsilon)}{\mu} = 0,$$

ſeu $(\lambda + 1)(\beta + \varepsilon)(\mathfrak{D} - \mu\beta\varepsilon - \frac{\lambda}{\mu}) = 0$,
cuius aequationis tres factores totidem praebent ſolutiones.

46.

46. *Reſolutio I.* Sit $\lambda = -1$, erit $\mathfrak{B} = -\beta$; $\mathfrak{E} = -\varepsilon$; $\mathfrak{C} = \frac{1}{\mu}$; $\gamma = \frac{1}{\mu}$; $\mathfrak{A} = \mu\beta\beta$; $\mathfrak{F} = \mu\varepsilon\varepsilon$; hincque $\mathfrak{D}\mathfrak{D} = (\mu\beta\varepsilon - \frac{1}{\mu})^2 + 1$, vnde conditiones adimplendae erunt:

$$k = \mathfrak{D}(\beta-\varepsilon) + \frac{\beta-\varepsilon}{\mu} - \mu\beta\varepsilon(\beta-\varepsilon) = (\beta-\varepsilon)(\mathfrak{D} + \tfrac{1}{\mu} - \mu\beta\varepsilon)$$
$$m = \mathfrak{D}(\beta+\varepsilon) + \frac{\beta+\varepsilon}{\mu} - \mu\beta\varepsilon(\beta+\varepsilon) = (\beta+\varepsilon)(\mathfrak{D} + \tfrac{1}{\mu} - \mu\beta\varepsilon)$$
$$n = \mathfrak{D}(\beta+\varepsilon) + \frac{\beta+\varepsilon}{\mu} - \mu\beta\varepsilon(\beta+\varepsilon) = (\beta+\varepsilon)(\mathfrak{D} + \tfrac{1}{\mu} - \mu\beta\varepsilon).$$

Hinc ergo foret $m = n$, et $B = 0$, ita vt haec reſolutio tantum ad caſum $B = 0$ accommodari poſſit. Hoc igitur caſu cum ſit $\frac{m}{k} = \frac{\beta+\varepsilon}{\beta-\varepsilon}$, ponatur $\beta + \varepsilon = m$ et $\beta - \varepsilon = k$, vt ſit $\beta = \frac{k+m}{2}$ et $\varepsilon = \frac{m-k}{2}$; oportetque eſſe $\mathfrak{D} + \frac{1}{\mu} - \mu\beta\varepsilon = 1$, vnde oritur

$$1 + 2(\mu\beta\varepsilon - \tfrac{1}{\mu}) + (\mu\beta\varepsilon - \tfrac{1}{\mu})^2 = 1 + (\mu\beta\varepsilon - \tfrac{1}{\mu})^2$$

ideoque $\mu\mu = \frac{1}{\beta\varepsilon} = \frac{4}{mm-kk}$, et $\mu = \frac{2}{\sqrt{(mm-kk)}}$. Vnde colligimus $\mathfrak{D} = 1$, eritque pro caſu $m = n$ aequatio integralis

$$\mathfrak{A} + 2\mathfrak{B}r + 2\beta s + \mathfrak{C}rr + \gamma ss + 2\mathfrak{D}rs + 2\mathfrak{E}rrs$$
$$+ 2\varepsilon rss + \mathfrak{F}rrss = 0.$$

47. At haec aequatio integralis, quia nulla noua ineſt conſtans, non eſt completa; cuius ratio eſt, quod quantitates $\beta - \varepsilon$ et $\beta + \varepsilon$ ipſis numeris k et m non aequales, ſed tantum proportionales ſtatui debent. Sit ergo

$$\beta - \varepsilon = \frac{k}{\nu};\ \beta + \varepsilon = \frac{m}{\nu};\ \text{erit}\ \beta = \frac{m+k}{2\nu};\ \varepsilon = \frac{m-k}{2\nu}\ \text{et}$$
$$\mathfrak{D} = \nu + \mu\beta\varepsilon - \tfrac{1}{\mu} = \sqrt{(1 + (\mu\beta\varepsilon - \tfrac{1}{\mu})^2)},\ \text{vnde fit}$$
$$\mu\beta\varepsilon - \tfrac{1}{\mu} = \frac{1-\nu\nu}{2\nu}\ \text{et}\ \mathfrak{D} = \frac{1+\nu\nu}{2\nu}$$

vbi ν eſt quantitas arbitraria, per quam numerus μ definiri debet. Quoniam ergo β et ε per m et k cum ν dantur, aequatio integralis erit

$$0=\mu\beta\beta+2\beta(s-r)+\tfrac{1}{\mu}(rr+ss)+\tfrac{1+\nu\nu}{\nu}rs+2\varepsilon rs(s-r)+m\varepsilon\varepsilon rrss$$

quae pro β et ε ſubſtitutis valoribus, per μ multiplicando abit in hanc formam:

$$0=\tfrac{\mu\mu(m+k)^2}{4\nu\nu}+\tfrac{\mu}{\nu}(m+k)(s-r)+rr+ss+\tfrac{\mu\mu}{4\nu\nu}(m-k)^2rrss+\tfrac{\mu}{\nu}(m-k)rs(s-r)+\tfrac{\mu(1+\nu\nu)}{\nu}rs.$$

Sit $\frac{\mu}{\nu}=2f$, vt f ſit conſtans arbitraria, ſumtoque $f(mm-kk)=\frac{1}{f}+1-\nu\nu$, erit aequatio integralis completa

$$0=ff(m+k)^2+2f(m+k)(s-r)+rr+ss+ff(m-k)^2rrss+2f(m-k)rs(s-r)+2f(1+\nu\nu)rs.$$

48. Cum vero ſit $\nu\nu=1+\frac{1}{f}-f(mm-kk)$, erit $2f(1+\nu\nu)=4f+2-2ff(mm-kk)$; hincque aequatio integralis completa ita ſe euoluta habebit:

$$0=ff(m+k)^2+2f(m+k)(s-r)+(r+s)^2+ff(m-k)^2rrss+2f(m-k)rs(s-r)+4frs-2ff(mm-kk)rs$$

quae extracta radice induit hanc formam:

$$s-r+f(m+k)+f(m-k)rs=2\sqrt{rs(ff(mm-kk)-f-1)}$$

et facta reſtitutione $s=\frac{p}{q}$; $r=pq$ ſit

$$\tfrac{p(1-qq)}{q}+f(m+k)+f(m-k)pp=2p\sqrt{(ff(mm-kk)-f-1)}$$

quae cum integrali completo ſupra exhibito conuenit. Verum probe notandum, hoc integrale tantum ad caſum $B=0$ pertinere.

49.

49. *Reſolutio II*. Ponamus nunc $\varepsilon = -\beta$, habebimusque primo $\mathfrak{B} = \lambda\beta$; $\mathfrak{E} = -\lambda\beta$; $\mathfrak{C} = \frac{\lambda}{\mu}$; $\gamma = \frac{1}{\mu}$; $\mathfrak{A} = \mu\beta\beta$; $\mathfrak{F} = \mu\beta\beta$ et $\mathfrak{D}\mathfrak{D} = 1 + (\frac{\lambda}{\mu} - \mu\beta\beta)^2$. Tum vero hinc concludimus:

$$k = \beta(1-\lambda)(\mathfrak{D} - \tfrac{\lambda}{\mu} + \mu\beta\beta)$$
$$m = \beta(1+\lambda)(\mathfrak{D} - \tfrac{\lambda}{\mu} + \mu\beta\beta) = -n$$

ita vt haec reſolutio locum non inueniat, niſi ſit $m + n = 0$, ideoque $A = 0$. Pro hoc autem caſu erit porro $\frac{k}{m} = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$, hincque $\lambda = \frac{m-k}{m+k}$, vnde ſequitur $k = \frac{2\beta k}{m+k}(\mathfrak{D} - \frac{\lambda}{\mu} + \mu\beta\beta)$ ſeu $\mathfrak{D} = \frac{\lambda}{\mu} - \mu\beta\beta + \frac{m+k}{2\beta}$; ergo

$$1 = \frac{m+k}{\beta}(\tfrac{\lambda}{\mu} - \mu\beta\beta) + \frac{(m+k)^2}{4\beta\beta} \quad \text{et}$$

$\frac{\lambda}{\mu} - \mu\beta\beta = \frac{\beta}{m+k} - \frac{(m+k)}{4\beta}$, ideoque $\mathfrak{D} = \frac{\beta}{m+k} + \frac{m+k}{4\beta}$. Littera β manet indefinita, et μ definitur per hanc aequationem: $\frac{m-k}{\mu(m+k)} - \mu\beta\beta = \frac{\beta}{m+k} - \frac{(m+k)}{4\beta}$.

50. His valoribus ſubſtitutis reſultat aequatio integralis completa pro caſu $A = 0$:

$$0 = \mu\beta\beta + 2\lambda\beta r + 2\beta s + \frac{\lambda\lambda}{\mu}rr + \frac{1}{\mu}ss + \frac{2\beta rs}{m+k} + \frac{(m+k)}{2\beta}rs$$
$$- 2\lambda\beta rrs - 2\beta rss + \mu\beta\beta rrss$$

Statuamus $\mu\beta = f$, erit $\frac{m-k}{m+k} - ff = \frac{f}{m+k} - \frac{\mu\mu(m+k)}{4f}$ et illa aequatio per μ multiplicata erit

$$0 = ff + 2\lambda fr + 2fs + \lambda\lambda rr + ss\,\frac{2frs}{m+k} + \frac{\mu\mu(m+k)}{2f}rs$$
$$- 2\lambda frrs - 2frss + ffrrss$$

quae ob $\frac{\mu\mu(m-k)}{2f} = \frac{2f}{m+k} + 2ff - 2\lambda$ induit hanc formam:

$$0 = ff(1+rs)^2 + (\lambda r - s)^2 + \frac{4frs}{m+k} + 2f(\lambda r + s) - 2frs(\lambda r + s)$$

ſeu hanc:

$$0 = ff(1-rs)^2 + (\lambda r + s)^2 + 2f(1-rs)(\lambda r + s) + \frac{4fnq}{m+k} + 4ffrs - 4\lambda rs$$

quae extracta radice praebet

$$f(1-rs) + \lambda r + s = 2\sqrt{rs\left(\frac{m-k}{m+k} - ff - \frac{f}{m+k}\right)}$$

Eſtque haec ſolutio ſimilis omnino praecedenti, dum illa ad caſum $B=0$, haec vero ad caſum $A=0$, adſtringitur.

51. Tertius factor $\mathfrak{D} - \mu\beta e - \frac{\lambda}{\mu}$ nihil monſtrat, quia eius annihilatio cum aequatione $\mathfrak{D}\mathfrak{D} = 1 + (\mu\beta e + \frac{\lambda}{\mu})^2$ conſiſtere nequit, ſicque duos tantum caſus habemus, reſolutionem algebraicam admittentes, ſcilicet ſi vel $B=0$, vel $A=0$. Praeterea vero etiam tertius caſus ſupra euolutus, quo erat $A=B$, et $D=0$ $E=0$, hic ſponte ſe offert, tum enim aequatio §. 38. abit in hanc: $\frac{dr}{\sqrt{(A+B)r(1-rr)}} = \frac{ds}{\sqrt{s.0}}$, quae ſubſiſtere nequit, niſi ſit $ds=0$, ideoque $s = \frac{p}{q} = \frac{\text{tang.} \frac{1}{2}\zeta}{\text{tang.} \frac{1}{2}\eta} =$ Conſt. qua aequatione hyperbola definitur. Reliquis caſibus conſtructio aequationis

$$\frac{dr}{\sqrt{r(A+B+D+2Er-(A+B-D)rr)}} = \frac{ds}{\sqrt{s(B-A-D+2Es-(B-A+D)ss)}}$$

in ſubſidium eſt vocanda. Quod enim haec aequatio in genere integrale algebraicum non admittat, vel ex caſu $D=A+B$ patet, quo prius membrum a quadratura ſectionum conicarum pendet, poſterius vero altiores quadraturas poſtulat.

52. Inuenta autem relatione inter r et s, vnde ſimul ratio angulorum ζ et η innoteſcit, cognitio motus per tempus hauritur. Cum enim ſit

$$vvuud\zeta d\eta = 2gadt^2(A\cos.\zeta + B\cos.\eta + D)$$

ob

erit $v = \frac{a \sin.\eta}{\sin.(\zeta+\eta)}$ et $u = \frac{a \sin.\zeta}{\sin.(\zeta+\eta)}$, atque tang. $\frac{1}{2}\zeta = p$ et tang. $\frac{1}{2}\eta = q$, erit $d\zeta = \frac{dp \sin.\zeta}{p}$, et $d\eta = \frac{dq \sin.\eta}{q}$, ſeu $d\zeta = \frac{2dp}{1+pp}$ et $d\eta = \frac{2dq}{1+qq}$, hincque porro

$$v = \frac{aq(1+pp)}{(p+q)(1-pq)} \text{ et } u = \frac{ap(1+qq)}{(p+q)(1-pq)}, \text{ vnde fit:}$$

$$\frac{4a^2 pq(1+pp)(1+qq)dp\,dq}{(p+q)^4(1-pq)^4} = 2g\,dt^2 \left(\frac{A(1-pp)}{1+pp} + \frac{B(1-qq)}{1+qq} + D\right).$$

Fiat iam porro $pq = r$, $\frac{p}{q} = s$, ſeu $pp = rs$ et $qq = \frac{r}{s}$; erit $2pdp = rds + sdr$ et $2qdq = \frac{sdr - rds}{ss}$, ergo $4pq\,dp\,dq = \frac{ssdr^2 - rrds^2}{ss}$, hincque tandem:

$$\frac{a^2(r+s)(1+rs)(ssdr^2 - rrds^2)}{rs(1+s)^4(1-r)^4} = 2g\,dt^2 \left(\frac{A(1-rs)}{1+rs} + \frac{B(s-r)}{r+s} + D\right).$$

53. Ponamus nunc breuitatis gratia

$$RR = r(A+B+D+2Er-(A+B-D)rr)$$
$$SS = s(B-A-D+2Es-(B-A+D)ss)$$

vt ſit $\frac{dr}{R} = \frac{ds}{S}$, ſtatuamusque:

$\frac{dr}{R} = \frac{ds}{S} = dV$, vt ſit $dr = R\,dV$ et $ds = S\,dV$, fietque:

$$2g\,dt^2 = \frac{a^2(r+s)^2(1+rs)^2(RRss - SSrr)dV^2}{rs(1+s)^4(1-r)^4(A(r+s)(1-rs)+B(s-r)(1+rs)+D(s+r)(1+rs))}.$$

Eſt vero

$$RRss - SSrr = rs(A(r+s)(1-rs) + B(s-r)(1+rs) + D(r+s)(1+rs));$$

quo valore ſubſtituto prodit

$$2g\,dt^2 = \frac{a^2(r+s)^2(1+rs)^2 dV^2}{(1+s)^4(1-r)^4}, \text{ ideoque:}$$

$$dt\sqrt{\frac{2g}{a}} = \frac{a(r+s)(1+rs)dV}{(1+s)^2(1-r)^2} = a\,dV\left(\frac{r}{(1-r)^2} + \frac{r}{(1+s)^2}\right)$$

ita vt ſit:

$$\frac{dt\sqrt{2g}}{a\sqrt{a}} = \frac{dr\sqrt{r}}{(1-r)^2\sqrt{(A+B+D+2Er-(A+B-D)rr)}} + \frac{ds\sqrt{s}}{(1+s)^2\sqrt{(B-A-D+2Es-(B-A+D)s^2)}};$$

ſicque

ſicque etiam determinatio temporis ad integrationem formularum ſimplicium eſt perducta.

54. Cum igitur hoc problema, quod primo aſpectu vix facilius quam id, quo omnia tria corpora mobilia aſſumuntur, viſum erat, perfecte reſoluere licuerit, maiorem ſpem concipimus, fore aliquando, vt et iſtud problema, cui tanquam fundamento vniuerſa Aſtronomia inniti eſt cenſenda, reſoluatur. Equidem fateor, me hinc nullam adhuc viam ad hunc ſcopum perueniendi perſpicere, ſed etiam ad hoc plurimos ac fortaſſe operoſiſſimos conatus requiri agnoſco. Caeterum circa hoc ipſum problema, quod hic tractaui, obſeruationem Geometris forte haud ingratam adiicio, ſcilicet praeter caſus hic euolutos, innumerabiles alios dari, quibus curua, a corpore M deſcripta, futura ſit algebraica, quarum inueſtigatio Analyſi haud contemnenda incrementa allatura videtur.

55. Quanquam autem ſolutionem huius problematis ad quadraturas curuarum perduximus, tamen moleſtum foret, curuam a corpore M deſcriptam definire multoque magis ad datum tempus locum corporis aſſignare. Sin autem huiusmodi caſus in mundo exiſteret, operae pretium eſſet, hanc ſolutionem accuratius euoluere, quod hoc modo commodiſſime fieri poſſe videtur. Pro tali ſcilicet caſu, poſtquam per plura tentamina conſtantes A, B, D, E proxime ſaltem innotuerint deinceps corrigendae, tabula condi debebit pro ſingulis valoribus ipſius r valores conuenientes litterae s referens, cui deinceps tabula tempora t exhibens

bens adiungi deberet, ex qua porro viciſſim pro dato tempore t valores litterarum r et s, hincque angulos ζ et η concludere liceret. Quae determinatio ſi cum obſeruationibus minus conueniret, indicio id eſſet, conſtantes non recte eſſe aſſumtas, ſicque tandem pluribus huiusmodi tabulis conſtructis, veritas inde non difficulter erueretur.

56. Cum autem inprimis et corporis M loca noſſe conueniat, vbi eius diſtantia ab alterutro punctorum fixorum A et B eſt maxima vel minima, quemadmodum hoc definiri oporteat videamus. Quia diſtantia AM eſt $v = \frac{a\,\text{ſin.}\,\eta}{\text{ſin.}(\zeta+\eta)}$, eius differentiale

$$\frac{dv}{a} = \frac{d\eta\cos.\eta\,\text{ſin.}(\zeta+\eta) - (d\zeta+d\eta)\,\text{ſin.}\,\eta\cos.(\zeta+\eta)}{\text{ſin.}(\zeta+\eta)^2} = \frac{d\eta\,\text{ſin.}\,\zeta - d\zeta\,\text{ſin.}\,\eta\cos.(\zeta+\eta)}{\text{ſin.}(\zeta+\eta)^2}$$

nihilo aequale poſitum, ſeu $\frac{d\eta}{\text{ſin.}\,\eta} = \frac{d\zeta}{\text{ſin.}\,\zeta}\cos.(\zeta+\eta)$ indicabit loca, quibus diſtantia AM eſt vel maxima, vel minima. Poſito ergo tang. $\frac{1}{2}\zeta = p$ et tang $\frac{1}{2}\eta = q$, ob $\cos.(\zeta+\eta)\frac{(1-pp)(1-qq)-4pq}{(1+pp)(1+qq)}$, habebimus $\frac{dq}{q} = \frac{dp}{p}\cdot\frac{(1-pq)^2-(p+q)^2}{(1+pp)(1+qq)}$. Factoque porro $pq = r$, $\frac{p}{q} = s$, ſeu $p = \sqrt{rs}$, $q = \sqrt{\frac{r}{s}}$, fiet $(\frac{dr}{r} - \frac{ds}{s})(s(1+rr)+r(1+ss)) = (\frac{dr}{r}+\frac{ds}{s})(s(1-r)^2-r(1+s)^2)$ ſeu $dr(1+s)^2 = ds(1-r)^2$. Vbi ergo eſt $\frac{dr}{(1-r)^2} = \frac{ds}{(1+s)^2}$, ibi diſtantia $AM = v$ eſt vel maxima vel minima.

57. Cum igitur ſupra inuenerimus $\frac{dr}{R} = \frac{ds}{S}$, pro his locis habemus $\frac{R}{(1-r)^2} = \frac{S}{(1+s)^2}$, vnde relatio inter quantitates finitas r et s eruitur, quae eſt:

$$r(1+s)^4(A+B+D+2Er-(A+B-D)rr) =$$
$$s(1-r)^4(B-A-D+2Es-(B-A+D)ss)$$

vnde poſito breuitatis gratia

$$\frac{A+B+D}{2E}=m\,,\quad \frac{B-A-D}{2E}=n$$

$$\frac{A+B-D}{2E}=\mu\,,\quad \frac{B-A+D}{2E}=\nu$$

vt ſit $\mu+\nu=m+n$, enaſcitur haec aequatio

$$\left.\begin{array}{llll} +mr+rr & -\mu r^3 & +4(n-\mu)r^3s-nr^4s & -r^4ss \\ -ns+4(m+n)rs & +(4-6n)rrs+4(m-\nu)rs^3 & +(4-6\mu)r^3ss-4(\mu+\nu)r^3s^3 & +\nu r^4s^3 \\ -ss & +(4+6m)rss & +(4+6\nu)rrs^3+rrs^4 & +\mu r^3s^4 \\ & +\nu s^3 & +mrs^4 & \end{array}\right\}=0$$

quae aequatio in genere nullos factores habere videtur. At aequatio inter p et q erit

$$(p+q)^4(m+pq-\mu ppqq)=(1-pq)^4(nqq+pq-\nu pp).$$

58. Reſtitutis autem ipſis angulis ζ et η, inter eos aequatio pro hoc caſu, quo diſtantia v ſit vel maxima vel minima, ita ſe habebit:

$$\text{ſin.}\left(\tfrac{\zeta+\eta}{2}\right)^4\big(D(1+\text{coſ.}\zeta\,\text{coſ.}\eta)+(A+B)(\text{coſ}\,\zeta+\text{coſ}\,\eta)+E\,\text{ſin.}\zeta\,\text{ſin.}\eta\big)=$$

$$\text{coſ.}\left(\tfrac{\zeta+\eta}{2}\right)^4\big(D(\text{coſ.}\zeta\,\text{coſ.}\eta-1)+(B-A)(\text{coſ.}\zeta-\text{coſ}\,\eta)+E\,\text{ſin.}\zeta\,\text{ſin.}\eta\big)$$

vbi eſt $\text{ſin}\left(\frac{\zeta+\eta}{2}\right)^4=\frac{1}{4}(1-\text{coſ.}(\zeta+\eta))^2$ et $\text{coſ.}\left(\frac{\zeta+\eta}{2}\right)^4=\frac{1}{4}(1+\text{coſ.}(\zeta+\eta))^2$ vnde colligimus:

$$(1+\text{coſ.}(\zeta+\eta)^2)(A\,\text{coſ.}\zeta+B\,\text{coſ.}\eta+D)=2\,\text{coſ.}(\zeta+\eta)$$
$$(A\,\text{coſ.}\eta+B\,\text{coſ.}\zeta+D\,\text{coſ.}\zeta\,\text{coſ.}\eta+E\,\text{ſin.}\zeta\,\text{ſin.}\eta)$$

quae autem aequatio aeque parum reſolutionem admittit. Caeterum quia permutatis angulis ζ, η et maſſis A et B aequatio non mutatur, eadem loca indicat, vbi diſtantia $BM=u$ ſit vel maxima vel minima. Verum radice quadrata extracta bini caſus a ſe inuicem ſeparantur.

DE

DE MOTV VIBRATORIO TYMPANORVM.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Quae adhuc a Geometris de motu vibratorio ſunt inueſtigata, ad corpora tantum vna dimenſione praedita, vel quae potius tanquam talia conſiderare liceat, ſunt reſtricta, cuius modi ſunt cordae tenſae, et laminae elaſticae, quarum vnica tantum dimenſio ſecundum longitudinem extenſa in calculum ingreditur, caeteris neglectis. Hinc quomodo ſuperficies, cuiusmodi eſt linteum vel membrana extenſa, ad motum vibratorium ſit comparata, a nemine adhuc, quantum mihi quidem conſtat, eſt definitum. Pertinet huc imprimis doctrina ſonorum, quos tympanum tenſum ac pulſum edere ſolet, cuius doctrinae hic quidem prima quaſi fundamenta iacere conſtitui, quae eo magis omni attentione digna videtur, quod nouum fere calculi genus requirit; cum enim in cordarum vibrationibus infinita varietas locum habeat, in vibrationibus membranarum infinities maiorem varietatem admitti oportere euidens eſt, quam idcirco calculus exhibere debet.

2. Quo igitur huiusmodi ſuperficiei motum, ac potiſſimum tenſionem, in calculum facilius inducere poſſimus, ad eius generationem, textura filorum ſecundum longitudinem et latitudinem expanſorum ortam reſpici conueniet, cum hac ratione lintea reuera efficiantur, in membranis autem filorum numerum quaſi infinitum concipere liceat. Primum ergo interualla filorum ſe mutuo normaliter traiicientium tanquam finita ſpectemus, quae littera ω indicentur, qua ſimul latitudo ſingulorum filorum exponatur, quaſi omnia ita eſſent compreſſa, vt planitiem vbique aequaliter compleant.

Tab. III. Fig. 2. In figura ergo filorum lateri AB parallelorum numerus eſt $= \frac{AC}{\omega}$, longitudo $= AB$, et latitudo $= \omega$, vnde ſumma eorum eſt $= AC.AB$. Simili modo alterorum filorum ipſi AC parallelorum ſumma eſt $= AB.AC$, ita vt planities rectanguli tota ſit $= 2AB.AC$, quoniam ob texturam materia eorum vbique duplicatur. Si haec quantitas $2AB.AC$, ſeu dupla area inſuper in craſſitiem, quae ſit $= k$ ducatur, habebitur volumen lintei $= 2k\, AB.AC$. quo ſimul maſſam indicemus.

3. Singulis filis peculiarem tenſionem tribuere poſſemus, ſed ne calculus nimis fiat moleſtus, et quia ob eorum mutuam implicationem inaequalitas tenſionis vix ſubſiſtere poteſt, ponamus ſingula fila lateribus AB et CD parallela tendi vi tanta, quae aequetur ponderi voluminis eiusdem materiae $= bk\omega$, vnde omnia ſimul tendentur vi $= bk.AC$; ſingula autem fila lateribus AC et BD parallela tendantur vi $= fk\omega$, vt omnium tenſio ſit $= fk\,AB$. Quodſi iam elementum quodcunque in puncto Y collectum concipiamus, vbi ſcilicet materia vnum quadratulum complens, quae eſt

$= 2$

$= 2k\omega\omega$, ſit congregata, perpendendum eſt, fili portionem pq tendi vi $= bk\omega$, fili autem alterius transverſi qr tenſionem eſſe $= fk\omega$. Quare ſi haec puncta a ſitu naturali in ſublime ſint diducta per minima interualla, quae per $\Pi.Y$, $\Pi.p$, $\Pi.q$, $\Pi.r$ et $\Pi.y$ indicemus, elementum Y deorſum premetur, ob tenſionem fili py,

$$\text{vi} = bk\omega\left(\frac{2\Pi.Y - \Pi p - \Pi y}{\omega}\right) = bk(2\Pi Y - \Pi p - \Pi y)$$

at ob tenſionem fili qr

$$\text{vi} = fk\omega\left(\frac{2\Pi Y - \Pi q - \Pi r}{\omega}\right) = fk(2\Pi Y - \Pi q - \Pi r)$$

vnde ex principiis mechanicis oritur

$$2k\omega\omega\left(\frac{dd.\Pi Y}{dt^2}\right) = -2gbk(2\Pi Y - \Pi p - \Pi q) \\ -2gfk(2\Pi Y - \Pi q - \Pi r)$$

4. Quodſi iam filorum interualla ω infinite parua ſtatuamus, et pro puncto quocunque Y, quod in ſtatu naturali in plano ABCD verſatur, ponamus coordinatas orthogonales $CX = x$, et $XY = y$, tum vero id in ſtatu violento ab hoc plano ſurſum fuerit diductum per interuallum $= z$, vt ſit $\Pi Y = z$, erit z functio quaedam tam binarum variabilium x et y, quam temporis t. Tum vero erit $\Pi Y - \Pi p = \omega\left(\frac{dz}{dx}\right)$ et

$$\Pi y - 2\Pi Y - \Pi p = \omega\omega\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$$

ſimili modo ob $\Pi Y - \Pi r = \omega\left(\frac{dz}{dy}\right)$ erit

$$\Pi q - 2\Pi Y - \Pi r = \omega\omega\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$$

Quibus ſubſtitutis aequatio noſtra per $\omega\omega$ diuiſa induet hanc formam:

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = gb\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + gf\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$$

vnde etiam craſſities membranae k ex calculo exceſſit. Hic autem g denotat altitudinem lapſus vno minuto ſecundo, dum tempus t in minutis ſecundis exprimitur, at quantitas b tenſioni filorum abſciſſae x parallelorum, f vero applicatae y parallelorum, eſt proportionalis, ſecundum menſuras ſupra expoſitas.

5. Quo rationem harum tenſionum clarius perſpiciamus, habeat membrana figuram rectangularem ABCD; etſi enim aliam habuerit quamcunque, rationem tenſionis ad illum caſum reducere licet. Sit, vt ante, k craſſities membranae, eiusque pondus $= M$, quatenus ſcilicet eius figura eſt ABCD. Hinc quia ante vires per volumina materiae homogeneae, cujusmodi eſt ipſa membrana, expreſſimus, erit $M = 2k\,AB.AC$. Deinde ſit vis lateribus oppoſitis AC et BD applicata, qua omnia fila AB.CD abſciſſis x parallela diſtenduntur $= E$, vis autem lateribus AB et CD applicata, qua fila omnia AC.BD applicatis y parallela tenduntur $= F$, erit $E = bk.AC$, et $F = fk.AB$, hincque ob $k = \frac{M}{2\,AB.AC}$ habebimus

$$b = \frac{2\,E.AB}{M} \text{ et } f = \frac{2\,F.AC}{M}$$

ex quo, omnibus ad menſuras determinatas reductis, aequatio noſtra motum vibratorium membranae exprimens erit

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \frac{2\,Eg.AB}{M}\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{2\,Fg.AC}{M}\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$$

in qua autem neutiquam aſſumitur, membranae figuram eſſe ABCD, ſed quaecunque ea fuerit ad eam aequationem ipſam accommodari oportet.

6.

6. Quamcunque ſcilicet membrana tenſa, velut tympanum, habuerit figuram, eius terminos, in quibus quaſi eſt fixa, ſollicite notari oportet; tum vero ſuperior aequatio ita reſolui debet, vt coordinatis x et y ad hos terminos porrectis, quantitas z omni tempore euaneſcat, ſeu vt z eiusmodi ſit functio ipſarum x, y et t, vt prioribus x et y ad terminos membranae relatis, fiat $z=0$, quicquid ſit t. Tum vero etiam in reſolutione noſtrae aequationis ad agitationem membranae initio inductam attendi conuenit, vt non ſolum functio z ſingulorum punctorum Y deturbationem de ſtatu naturali indicet, ſed etiam formula $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ celeritatem cuique impreſſam exhibeat. Ad aequationem autem noſtram ſuccinctius exprimendam, ponamus $\frac{2Eg.AB}{M}=ee$, et $\frac{2Fg.AC}{M}=ff$, vt noſtra aequatio fiat:

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=ee\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)+ff\left(\frac{ddz}{dy^2}\right).$$

Plerumque autem poni $ff=ee$ conueniet, vt tenſio per totam membranam ſit eadem, ac diſcrimen inter filamenta ſecundum longitudinem et latitudinem extenſa tollatur. Sit ergo $ff=ee$, atque habebimus:

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=ee\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)+ee\left(\frac{ddz}{dy^2}\right).$$

7. Ponamus $z=v\,\text{ſin.}(\alpha t+\mathfrak{A})$, ſitque v tantum functio ipſarum x et y, atque aequatio noſtra ad duas tantum variabiles reducetur, excluſo tempore t, fietque

$$0=\frac{\alpha\alpha v}{ee}+\left(\frac{ddv}{dx^2}\right)+\left(\frac{ddv}{dy^2}\right).$$

Ponamus porro $v=u\,\text{ſin.}\left(\frac{\beta x}{a}+\mathfrak{B}\right)$, vt etiam variabilem x ex calculo elidamus, fietque u functio ſolius y ex hac aequatione determinanda:

$$0=\frac{\alpha\alpha u}{ee}-\frac{\beta\beta u}{aa}+\frac{ddu}{dy^2},$$

vnde

vnde, ſi ponamus $u = \text{ſin.}\left(\frac{\gamma y}{b} + \mathfrak{C}\right)$, erit

$$\frac{\alpha\alpha}{ee} = \frac{\beta\beta}{aa} + \frac{\gamma\gamma}{bb}.$$

Quare ſumto $\alpha = e\sqrt{\left(\frac{\beta\beta}{aa} + \frac{\gamma\gamma}{bb}\right)}$ habebimus huiusmodi aequationem finitam:

$$z = A\,\text{ſin.}\,(\alpha t + \mathfrak{A})\,\text{ſin.}\left(\frac{\beta x}{a} + \mathfrak{B}\right)\text{ſin.}\left(\frac{\gamma y}{b} + \mathfrak{C}\right)$$

vbi A denotat lineolam quandam minimam, quandoquidem particula z ſemper debet eſſe minima. Cum autem hic numeri β, γ, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ pro lubitu accipi queant, infinitae huiusmodi formulae exhiberi poſſunt, quae non ſolum ſingulae, ſed etiam iunctim ſumtae, problemati ſatisfaciunt.

8. Incipiamus a caſu ſimpliciſſimo, quo eſt

$$z = A\,\text{coſ.}\,\alpha t.\ \text{ſin.}\,\frac{\beta x}{a}.\ \text{ſin.}\,\frac{\gamma y}{b}$$

vbi eſt $\alpha = e\sqrt{\left(\frac{\beta\beta}{aa} + \frac{\gamma\gamma}{bb}\right)}$; ita vt poſito $t = 0$ aequatio $z = A\,\text{ſin.}\,\frac{\beta x}{a}\,\text{ſin.}\,\frac{\gamma y}{b}$ ſtatum tympano initio impreſſum denotet, quo momento cum in genere ſit cuiusque puncti celeritas:

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = -A\alpha\,\text{ſin.}\,\alpha t\,\text{ſin.}\,\frac{\beta x}{a}\,\text{ſin.}\,\frac{\gamma y}{b}$$

euidens eſt, in hoc ſtatu violento tympanum fuiſſe in quiete. Inueſtigemus nunc terminos tympani, qui perpetuo maneant immoti, ac primo quidem manifeſtum eſt, fore $z = 0$, tam ſi $x = 0$, quam ſi $y = 0$, quare tam linea recta AC, quam CD, conſtituet tympani terminos. Tum vero fit etiam $z = 0$, ſi ſit $x = \frac{2\pi a}{\beta}$, et $y = \frac{2\pi b}{\gamma}$, vnde ſumta $CD = \frac{2\pi a}{\beta}$ et $CA = \frac{2\pi b}{\gamma}$, reli-

reliqui termini erunt in rectis AB et BD, ita vt tympani figura prodeat *rectangulum* ABCD.

9. Sit ergo parallelogrammum rectangulum AB CD figura tympani in perimetro fixi, et vndequaque tenſi vi per litteram e relata. Ponamus latera AB $= CD = a$, et $AC = BD = b$, erit $\beta = \gamma = 2\pi$, ac pro motu vibratorio huius tympani habebimus: Tab. III. Fig. 3.

$$z = A \operatorname{coſ.} \alpha t \operatorname{ſin.} \frac{2\pi x}{a} \operatorname{ſin.} \frac{2\pi y}{b},$$

exiſtente $\alpha = 2\pi e \sqrt{\left(\frac{1}{aa} + \frac{1}{bb}\right)} = \frac{2\pi e}{ab}\sqrt{(aa+bb)}$. Tempus ergo vnius vibrationis prodibit poſito $\alpha t = \pi$, vnde id fit $t = \frac{\pi}{\alpha} = \frac{ab}{2e\sqrt{(aa+bb)}}$ min. ſecund. ſicque hoc tympanum ſingulis minutis ſecundis tot edet vibrationes, quot vnitates continentur in formula $\frac{2e\sqrt{(aa+bb)}}{ab}$. Quodſi iam pondus membranae ABCD ſit $= M$, erit vis, qua latera AC et BD diſtrahuntur, $E = \frac{Mee}{2ga}$, et qua latera AB et CD diſtrahuntur, $F = \frac{Mee}{2gb}$. At ducta alterutra diagonali BC, ſi in eam ex altero reliquorum angulorum A demittatur perpendiculum AE, erit $AE = \frac{ab}{\sqrt{(aa+bb)}}$, vnde numerus vibrationum vno minuto ſecundo editarum erit $= \frac{2e}{AE}$, vbi e eſt in ratione ſubduplicata tenſionis.

10. Verum idem tympanum rectangulare praeter hunc ſonum, qui eſt principalis, infinitos alios ſimplices edere poteſt, qui ſcilicet ex pluribus aliis non ſint permixti. Sumtis enim pro m et n numeris quibusuis integris, haec aequatio

$$z = A \operatorname{coſ.} \alpha t \operatorname{ſin.} \frac{2m\pi x}{a} \operatorname{ſin.} \frac{2n\pi y}{b}$$

 ita

ita eſt comparata, vt, poſitis tam $x=0$ et $y=0$, quam $x=a$ et $y=b$, fiat $z=0$. Tum autem ob $\alpha = 2\pi e \surd\left(\frac{mm}{aa} + \frac{nn}{bb}\right)$ tempus vnius vibrationis erit $\frac{\pi}{\alpha} = \frac{ab}{2e\surd(nnaa+mmbb)}$ min. ſecund. ac tempore vnius minuti ſecundi vibrationum editarum numerus eſt $= \frac{2e\surd(nnaa+mmbb)}{ab}$, cui ipſe ſonus cenſetur proportionalis. Ponamus, tympanum eſſe quadratum, ſeu $b=a$ et omnes ſoni, quos hoc tympanum reddere valet, in hac formula $\frac{2e}{a}\surd 2(mm+nn)$ continentur, vbi pro m et n numeros integros quoscunque capere licet. Neglecto ergo factore communi $\frac{2e}{a}\surd 2$, hi ſoni ſunt inter ſe vt numeri

$\surd 2$, $\surd 5$, $2\surd 2$, $\surd 10$, $\surd 13$, $\surd 17$, $3\surd 2$, $2\surd 5$. 5, $\surd 26$, $\surd 29$, $4\surd 2$ etc.

qui ſi infimus nota muſica C indicetur, erunt

C; G*s*; *c*; *d*; *e**; *g*^b; *g*; *gs*; *b*; *b**; *b**; *c*

vbi ſtellula * notat, ſonum eſſe aliquantillum acutiorem, littera *b* vero grauiorem quam in ſyſtemate muſico.

11. Cum quantitas z pluribus eiusmodi formulis ſimul ſumtis aequari poſſit, tympanum hoc quadratum plures ſonos ſimul edere poteſt, prout impulſio initio facta fuerit comparata; vix vnquam enim eueniet, vt ſonus inde ſimplex oriatur, quin potius plerumque omnes iſti ſoni coniunctim producentur. Qui cum inter ſe maxime ſint diſſoni, ac tanta multitudine cumulentur, ſonitus ex iis mixtus ab harmonia muſica multum abhorrebit. Prae reliquis autem ſonus principalis

palis et grauiſſimus dominabitur, qui ſingulis minutis ſecundis $\frac{2e\sqrt{2}}{a}$ vibrationes edet. Eſt autem $e = \sqrt{\frac{2Ega}{M}}$, vbi *M* eſt pondus membranae quadratae A B C D et E pondus, quo ſingula latera diſtenduntur, exiſtente *g* altitudine $15\frac{5}{8}$ ped. Rhen. Vnde numerus vibrationum ſingulis minutis ſecundis editarum eſt $= 4\sqrt{\frac{Eg}{Ma}}$. Ponamus latus quadrati *a* eſſe vnius pedis, eritque hic numerus $= 4\sqrt{\frac{125}{8}\cdot\frac{E}{M}} = 5\sqrt{\frac{10E}{M}}$. Quare ſi E ſit $= 100\,M$, ſingulis minutis ſecundis edentur 160 vibrationes, qui ſonus conueniet propemodum cum claue F, tribuendo claui C quaſi 120 vibrationes.

12. Ita ſe habent ſoni a tympanis quadratis ac rectangularibus editi, ſin autem tympanum aliam quamcunque habeat figuram, difficillimum eſt, aequationem noſtram ad eam accommodare. In genere autem pro quauis figura tenendum eſt, ex ea primo innumerabiles ſonos ſimplices elici poſſe, tum vero eandem plures eorum coniunctim edere valere; perpetuo enim quod inſtrumentum plures ſonos ſimplices ſeorſim edere poteſt, idem ad eosdem ſonos coniunctim reddendos erit aptum. Soni autem ſimplices oriuntur, ſi noſtra formula vnicum terminum tempus inuoluentem contineat, veluti coſ. αt, vt ſit

$$z = A\,\text{coſ.}\,\alpha t\,\text{ſin.}(\mu x + \mathfrak{M})\,\text{ſin.}(\nu y + \mathfrak{N})$$

exiſtente $\mu\mu + \nu\nu = \frac{\alpha\alpha}{ee}$. Cum enim pro eodem numero α, binae litterae μ et ν in infinitum variari queant, idem factor coſ. αt cum infinitis huiusmodi binorum ſinuum productis coniungi poterit, ex quibus

 omnibus

omnibus cuiusque vibrationis tempus prodit $= \frac{\pi}{\alpha}$ min. ſec. Talis autem formula generalius ita repraeſentari poteſt:

$$z = \operatorname{coſ} \alpha t \begin{cases} + A \operatorname{ſin} \mu x \operatorname{ſin.} \nu y + B \operatorname{ſin} \mu x \operatorname{coſ.} \nu y + C \operatorname{coſ.} \mu x \operatorname{ſin.} \nu y \\ \qquad + D \operatorname{coſ.} \mu x \operatorname{coſ.} \nu y \\ + A' \operatorname{ſin.} \mu' x \operatorname{ſin} \nu' y + B' \operatorname{ſin.} \mu' x \operatorname{coſ.} \nu' y + C' \operatorname{coſ.} \mu' x \operatorname{ſin} \nu' y \\ \qquad + D' \operatorname{coſ.} \mu' x \operatorname{coſ.} \nu' y \\ + A'' \operatorname{ſin.} \mu'' x \operatorname{ſin.} \nu'' y + B'' \operatorname{ſin.} \mu'' x \operatorname{coſ.} \nu'' y + C'' \operatorname{coſ.} \mu'' x \operatorname{ſin.} \nu'' y \\ \qquad + D'' \operatorname{coſ.} \mu'' x \operatorname{coſ.} \nu'' y \\ \text{etc.} \end{cases}$$

dummodo litterae μ; ν; μ'; ν'; μ''; ν''; etc. ita capiantur, vt ſit $\frac{\alpha\alpha}{ee} = \mu\mu + \nu\nu = \mu'\mu' + \nu'\nu' = \mu''\mu'' + \nu''\nu''$ etc. coefficientes vero A, B etc. penitus arbitrio noſtro relinquuntur, ſi modo ſint minimi.

13. Hinc autem minime patet, quomodo tympano figura quaepiam data veluti circularis conciliari poſſit, vt ſcilicet in perimetro figurae vbique fiat $z=o$. In hunc finem aequationem noſtram differentialem

$$\frac{1}{ee}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$$

Tab. III. Fig. 4. in aliam formam transfundi conueniet, introducendo loco x et y binas alias variabiles. Scilicet cum ſit $CX = x$ et $XY = y$, ponatur recta $CY = r$, et angulus $ACY = \Phi$, quae binae quantitates r et Φ loco x et y introducantur, vt iam z exiſtat functio quantitatum r et Φ, inſuperque temporis t. Primum igitur terminus $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$ non mutabitur; pro reliquorum vero transformatione notetur, ob $x = r \operatorname{coſ.} \Phi$ et $y = r \operatorname{ſin.} \Phi$, eſſe

dx

$dx = dr\,\text{coſ.}\,\Phi - r\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi$ et $dy = dr\,\text{ſin.}\,\Phi + r\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi$, hincque $dr = dx\,\text{coſ.}\,\Phi + dy\,\text{ſin.}\,\Phi$ et $d\Phi = \frac{dy\,\text{coſ.}\,\Phi - dx\,\text{ſin.}\,\Phi}{r}$. Quaeritur ergo, quomodo hinc in formulis $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$ et $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$ loco differentialium dx et dy, ad quae referuntur, ratio nouorum differentialium dr et $d\Phi$ introduci debeant, et cuiusmodi hinc formulae loco earum ſint prodituræ.

14. Conſideretur in genere functio quaecunque ipſarum x et y, quae ſit v, et quae eadem erit quoque functio ipſarum r et Φ. Cum igitur ſit

$$dv = dx\left(\frac{dv}{dx}\right) + dy\left(\frac{dv}{dy}\right) = dr\left(\frac{dv}{dr}\right) + d\Phi\left(\frac{dv}{d\Phi}\right)$$

erit pro dr et $d\Phi$, ſubſtitutis valoribus per dx et dy expreſſis,

$$dx\left(\frac{dv}{dx}\right) + dy\left(\frac{dv}{dy}\right) = (dx\,\text{coſ.}\,\Phi + dy\,\text{ſin.}\,\Phi)\left(\frac{dv}{dr}\right) + \left(\frac{dy\,\text{coſ.}\,\Phi - dx\,\text{ſin.}\,\Phi}{r}\right)\left(\frac{dv}{d\Phi}\right)$$

vbi terminos tam per dx, quam per dy, affectos ſeorſim aequari oportet, ſicque erit

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = \text{coſ.}\,\Phi\left(\frac{dv}{dr}\right) - \frac{\text{ſin.}\,\Phi}{r}\left(\frac{dv}{d\Phi}\right) \quad \text{et}$$

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) = \text{ſin.}\,\Phi\left(\frac{dv}{dr}\right) + \frac{\text{coſ.}\,\Phi}{r}\left(\frac{dv}{d\Phi}\right).$$

Sit breuitatis gratia $\left(\frac{dv}{dr}\right) = p$ et $\left(\frac{dv}{d\Phi}\right) = q$, erit

$$\left(\frac{ddv}{dx^2}\right) = -p\,\text{ſin.}\,\Phi\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) + \text{coſ.}\,\Phi\left(\frac{dp}{dx}\right) - \frac{q\,\text{coſ.}\,\Phi}{r}\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) + \frac{q\,\text{ſin.}\,\Phi}{rr}\left(\frac{dr}{dx}\right) - \frac{\text{ſin.}\,\Phi}{r}\left(\frac{dq}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{ddv}{dy^2}\right) = p\,\text{coſ.}\,\Phi\left(\frac{d\Phi}{dy}\right) + \text{ſin.}\,\Phi\left(\frac{dp}{dy}\right) - \frac{q\,\text{ſin.}\,\Phi}{r}\left(\frac{d\Phi}{dy}\right) - \frac{q\,\text{coſ.}\,\Phi}{rr}\left(\frac{dr}{dy}\right) + \frac{\text{coſ.}\,\Phi}{r}\left(\frac{dq}{dy}\right)$$

Erit vero ex formulis ſupra propoſitis:

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) = -\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{r};\ \left(\frac{d\Phi}{dy}\right) = \frac{\text{coſ.}\,\Phi}{r};\ \left(\frac{dr}{dx}\right) = \text{coſ.}\,\Phi;\ \left(\frac{dr}{dy}\right) = \text{ſin.}\,\Phi$$

vnde conficitur:

$$\left(\frac{ddv}{dx^2}\right)=\frac{p\,\text{ſin.}\,\Phi^2}{r}+\text{coſ.}\,\Phi\left(\frac{dp}{dx}\right)+\frac{2q\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}{rr}-\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{r}\left(\frac{dp}{dx}\right)$$
$$\left(\frac{ddv}{dy_2}\right)=\frac{p\,\text{coſ.}\,\Phi^2}{r}+\text{ſin.}\,\Phi\left(\frac{dp}{dy}\right)-\frac{2q\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}{rr}+\frac{\text{coſ.}\,\Phi}{r}\left(\frac{dq}{dy}\right).$$

15. Nunc vero, cum quantitatum p et q eadem ſit ratio ac ſupra ipſius v, erit:

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)=\text{coſ.}\,\Phi\left(\frac{dp}{dr}\right)-\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{r}\left(\frac{dp}{d\Phi}\right)=\text{coſ.}\,\Phi\left(\frac{ddv}{dr^2}\right)-\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{r}\left(\frac{ddv}{dr\,d\Phi}\right)$$
$$\left(\frac{dq}{dx}\right)=\text{coſ.}\,\Phi\left(\frac{dq}{dr}\right)-\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{r}\left(\frac{dq}{d\Phi}\right)=\text{coſ.}\,\Phi\left(\frac{ddv}{dr\,d\Phi}\right)-\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{r}\left(\frac{ddv}{d\Phi^2}\right)$$
$$\left(\frac{dp}{dy}\right)=\text{ſin.}\,\Phi\left(\frac{dp}{dr}\right)+\frac{\text{coſ.}\,\Phi}{r}\left(\frac{dp}{d\Phi}\right)=\text{ſin.}\,\Phi\left(\frac{ddv}{dr^2}\right)+\frac{\text{coſ.}\,\Phi}{r}\left(\frac{ddv}{dr\,d\Phi}\right)$$
$$\left(\frac{dq}{dy}\right)=\text{ſin.}\,\Phi\left(\frac{dq}{dr}\right)+\frac{\text{coſ.}\,\Phi}{r}\left(\frac{dp}{d\Phi}\right)=\text{ſin.}\,\Phi\left(\frac{ddv}{dr\,d\Phi}\right)+\frac{\text{coſ.}\,\Phi}{r}\left(\frac{ddv}{d\Phi^2}\right)$$

hincque colligimus:

$$\left(\frac{ddv}{dx^2}\right)=\frac{\text{ſin.}\,\Phi^2}{r}\left(\frac{dv}{dr}\right)-\frac{2\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}{rr}\left(\frac{dv}{d\Phi}\right)+\text{coſ.}\,\Phi^2\left(\frac{ddv}{dr^2}\right)$$
$$-\frac{2\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}{r}\left(\frac{ddv}{dr\,d\Phi}\right)+\frac{\text{ſin.}\,\Phi^2}{rr}\left(\frac{ddv}{d\Phi^2}\right)$$
$$\left(\frac{ddv}{dy^2}\right)=\frac{\text{coſ.}\,\Phi^2}{r}\left(\frac{dv}{dr}\right)-\frac{2\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}{rr}\left(\frac{dv}{d\Phi}\right)+\text{ſin.}\,\Phi^2\left(\frac{ddv}{dr^2}\right)$$
$$+\frac{2\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}{r}\left(\frac{ddv}{dr\,d\Phi}\right)+\frac{\text{ſin.}\,\Phi^2}{rr}\left(\frac{ddv}{d\Phi^2}\right).$$

Scribamus iam z pro v, quoniam tempus t hic nihil turbat, et habebimus:

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)=\frac{\text{ſin.}\,\Phi^2}{r}\left(\frac{dz}{dr}\right)+\frac{2\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}{rr}\left(\frac{dz}{d\Phi}\right)+\text{coſ.}\,\Phi^2\left(\frac{ddz}{dr^2}\right)$$
$$-\frac{2\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}{r}\left(\frac{ddz}{dr\,d\Phi}\right)+\frac{\text{ſin.}\,\Phi^2}{rr}\left(\frac{ddz}{d\Phi^2}\right)$$
$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)=\frac{\text{coſ.}\,\Phi^2}{r}\left(\frac{dz}{dr}\right)-\frac{2\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}{rr}\left(\frac{dz}{d\Phi}\right)+\text{ſin.}\,\Phi^2\left(\frac{ddz}{dr^2}\right)$$
$$+\frac{2\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}{r}\left(\frac{ddz}{dr\,d\Phi}\right)+\frac{\text{coſ.}\,\Phi^2}{rr}\left(\frac{ddz}{d\Phi^2}\right)$$

quibus collectis noſtra aequatio induet hanc formam:

$$\frac{1}{ge}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=\frac{1}{r}\left(\frac{dz}{dr}\right)+\left(\frac{ddz}{dr^2}\right)+\frac{1}{rr}\left(\frac{ddz}{d\Phi^2}\right)$$

Modus

Modus autem, quo hanc aequationem elicuimus, nouam quandam algorithmi ſpeciem conſtituit, quae omni attentione digna videtur.

16. Ponamus hic iterum ad tempus elidendum $z = v\,\text{ſin.}(\alpha t + \mathfrak{A})$, vt iam v tantum ſit functio ipſarum r et Φ, eritque

$$o = \frac{\alpha\alpha}{ee}v + \frac{1}{r}\left(\frac{dv}{dr}\right) + \left(\frac{ddv}{dr^2}\right) + \frac{1}{rr}\left(\frac{ddv}{d\Phi^2}\right).$$

Statuatur porro ad anguli Φ rationem tollendam $v = u$ ſin. $(\beta\Phi + \mathfrak{B})$, vt u ſit functio ſolius r, eritque

$$o = \frac{\alpha\alpha}{ee}u - \frac{\beta\beta}{rr}u + \frac{du}{rdr} + \frac{ddu}{dr^2},$$

vnde iam valor ipſius u per r definiri debet; cum autem β pro lubitu aſſumi poſſit, innumerabiles valores pro v exhibere licet, qui omnes iunctim ſumti cum ſin. $(\alpha t + \mathfrak{A})$ combinari poſſunt, ſicque pro quouis numero α, vnde tempus vnius vibrationis fit $= \frac{\pi}{\alpha}$ min. ſec. expreſſio maxime generalis valorem z exhibens obtinebitur. Aequatio autem inuenta, poſito $lu = \int p\,dr$, abit in

$$o = \frac{\alpha\alpha}{ee} - \frac{\beta\beta}{rr} + \frac{p}{r} + \frac{dp}{dr} + pp, \text{ quae poſito } p = \frac{q}{r} \text{ fit}$$

$$dq + \frac{qqdr}{r} + \frac{\alpha\alpha}{ee}r\,dr - \beta\beta.\frac{dr}{r} = o$$

quae ad eiusmodi caſus aequationis Riccatianae reducitur, qui integrationem admittunt, quoties β fuerit numerus huius formae: $i - \frac{1}{2}$, denotante i numerum integrum quemcunque.

17. Confugiamus ergo ad ſeries, ac primo quidem in aequatione

$$o = \frac{\alpha\alpha}{ee}u - \frac{\beta\beta}{rr}u + \frac{du}{rdr} + \frac{ddu}{dr^2}$$

ponamus

Ponamus $u = r^{\beta} s$, vt nanciſcamur hanc aequationem:

$$0 = \frac{\alpha\alpha}{ee} s + \frac{(2\beta+1)ds}{rdr} + \frac{dds}{dr^2}.$$

Sit breuitatis gratia $2\beta + 1 = n$, ſeu $\beta = \frac{n-1}{2}$, vt ſit $u = r^{\frac{n-1}{2}} s$

et ponamus $s = A - Br^2 + Cr^4 - Dr^6 + Er^8 -$ etc. factaque ſubſtitutione fit:

$$\begin{aligned} 0 = \tfrac{\alpha\alpha}{ee}A - \tfrac{\alpha\alpha}{ee}Br^2 + \tfrac{\alpha\alpha}{ee}Cr^4 - \tfrac{\alpha\alpha}{ee}Dr^6 + \tfrac{\alpha\alpha}{ee}Er^8 \\ -2nB + 4nC - 6nD + 8nE - 10nF \\ -2B + 12C - 30D + 56E - 90F \end{aligned}$$

hincque:

$B = \frac{\alpha\alpha A}{2(n+1)ee}$; $C = \frac{\alpha\alpha B}{4(n+3)ee}$; $D = \frac{\alpha\alpha C}{6(n+5)ee}$; $E = \frac{\alpha\alpha D}{8(n+7)ee}$ etc.

vnde obtinemus:

$$u = Ar^{\beta}\left(1 - \frac{\alpha\alpha r^2}{2(n+1)ee} + \frac{\alpha^4 r^4}{2.4(n+1)(n+3)e^4} - \frac{\alpha^6 r^6}{2.4.6(n+1)(n+3)(n+5)e^6} + \text{etc.}\right)$$

exiſtente $n = 2\beta + 1$, eritque $z = u \sin(\alpha t + \mathfrak{A}) \sin(\beta\Phi + \mathfrak{B})$.

Quodſi iam, poſito $r = a$, fiat $u = 0$, habebitur tympanum circulare, cuius radius $CA = a$. At poſito $r = a$, pro quouis numero β vel n, ſcribendo $\frac{\alpha a}{e} = l$ aequatio

$$1 - \frac{ll}{2(n+1)} + \frac{l^4}{2.4(n+1)(n+3)} - \frac{l^6}{2.4.6(n+1)(n+3)(n+5)} + \text{etc.} = 0$$

infinitos exhibet valores pro l, ideoque etiam pro α, ex quo infiniti ſoni ſimplices reſultabunt. Cum autem angulis Φ, $2\pi + \Phi$, $4\pi + \Phi$ etc. idem valor ipſius z reſpondere debeat, euidens eſt, pro β alios numeros accipi non poſſe niſi integros; vnde pro n omnes numeros

meros impares ſumere licet, ex quorum ſingulis infiniti valores pro α, ideoque infiniti ſoni, exſurgunt.

18. Verum haec ſeries tantum integrale particulare noſtrae aequationis differentio-differentialis exhibet, cum vnicam conſtantem arbitrariam inuoluat; ſeries autem duas conſtantes ab arbitrio noſtro pendentes reperietur, ſi ponatur $s = p\,\text{ſin.}\frac{\alpha r}{e} + q\,\text{coſ.}\frac{\alpha r}{e}$, ac tum aequationis reſultantis partes tam per ſin. $\frac{\alpha r}{e}$ quam coſ. $\frac{\alpha r}{e}$ affectas ſeorſim nihilo aequentur, indeque quantitates p et q per ſeries definiantur. Calculo hoc ſubducto, ſi breuitatis gratia ponamus $\frac{\alpha r}{e} = \theta$, vt ſit $r = \frac{\theta}{\alpha}e$, maneatque $n = 2\beta + 1$, erit

$$u = + r^{\beta}\,\text{ſin.}\,\theta\left(A + \mathfrak{A}\theta - \frac{(n+2)A\theta\theta}{2(n+1)} - \frac{(n+2)(n+4)\mathfrak{A}\theta^3}{2\cdot 3(n+1)(n+2)} + \frac{(n+2)(n+4)(n+6)A\theta^4}{2\cdot 3\cdot 4(n+1)(n+2)(n+3)} + \text{etc.}\right)$$
$$+ r^{\beta}\,\text{coſ.}\,\theta\left(\mathfrak{A} - A\theta - \frac{(n+2)\mathfrak{A}\theta\theta}{2(n+1)} + \frac{(n+2)(n+4)A\theta^3}{2\cdot 3(n+1)(n+2)} + \frac{(n+2)(n+4)(n+6)\mathfrak{A}\theta^4}{2\cdot 3\cdot 4(n+1)(n+2)(n+3)} - \text{etc.}\right)$$

Euler does not notice that all the terms involving A cancel against one another.

vbi, vt ante, obſeruandum eſt, loco β nonniſi numeros integros accipi poſſe; tum autem erit $z = u\,\text{ſin.}(\alpha t + \gamma)\,\text{ſin.}(\beta\Phi + \delta)$ at A et $\mathfrak{A}$ ſunt binae conſtantes arbitrariae per duplicem integrationem introductae. Quodſi ergo breuitatis gratia ponamus:

$$1 - \frac{(n+2)\theta\theta}{2(n+1)} + \frac{(n+2)(n+4)(n+6)\theta^4}{2\cdot 3\cdot 4(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{(n+2)(n+4)(n+6)(n+8)(n+10)\theta^6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} + \text{etc.} = P$$
$$\theta - \frac{(n+2)(n+4)\theta^3}{2\cdot 3(n+1)(n+2)} + \frac{(n+2)(n+4)(n+6)(n+8)\theta^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} - \text{etc.} = Q$$

habebimus:

$$u = r^{\beta}(A P\,\text{ſin.}\,\theta + \mathfrak{A} Q\,\text{ſin.}\,\theta + \mathfrak{A} P\,\text{coſ.}\,\theta - A Q\,\text{coſ.}\,\theta).$$

Ponamus $u = r^\beta s$, vt nanciſcamur hanc aequationem:

$$0 = \frac{\alpha\alpha}{ee} s + \frac{(2\beta+1)ds}{rdr} + \frac{dds}{dr^2}.$$

Sit breuitatis gratia $2\beta + 1 = n$, ſeu $\beta = \frac{n-1}{2}$, vt fit $u = r^{\frac{n-1}{2}} s$

et ponamus $s = A - Br^2 + Cr^4 - Dr^6 + Er^8 -$ etc. factaque ſubſtitutione fit:

$$\begin{aligned} 0 = \tfrac{\alpha\alpha}{ee}A - \tfrac{\alpha\alpha}{ee}Br^2 + \tfrac{\alpha\alpha}{ee}Cr^4 - \tfrac{\alpha\alpha}{ee}Dr^6 + \tfrac{\alpha\alpha}{ee}Er^8 \\ -2nB + 4nC - 6nD + 8nE - 10nF \\ -2B + 12C - 30D + 56E - 90F \end{aligned}$$

hincque:

$B = \frac{\alpha\alpha A}{2(n+1)ee}$; $C = \frac{\alpha\alpha B}{4(n+3)ee}$; $D = \frac{\alpha\alpha C}{6(n+5)ee}$; $E = \frac{\alpha\alpha D}{8(n+7)ee}$ etc.

vnde obtinemus:

$$u = Ar^\beta \left(1 - \frac{\alpha\alpha r^2}{2(n+1)ee} + \frac{\alpha^4 r^4}{2.4(n+1)(n+3)e^4} - \frac{\alpha^6 r^6}{2.4.6(n+1)(n+3)(n+5)e^6} + \text{etc.}\right)$$

exiſtente $n = 2\beta + 1$, eritque $z = u \sin(\alpha t + \mathfrak{A}) \sin.(\beta\phi + \mathfrak{B})$.

Quodſi iam, poſito $r = a$, fiat $u = 0$, habebitur tympanum circulare, cuius radius $CA = a$. At poſito $r = a$, pro quouis numero β vel n, ſcribendo $\frac{\alpha a}{e} = l$ aequatio

$$1 - \frac{ll}{2(n+1)} + \frac{l^4}{2.4(n+1)(n+3)} - \frac{l^6}{2.4.6(n+1)(n+3)(n+5)} + \text{etc.} = 0$$

infinitos exhibet valores pro l, ideoque etiam pro α, ex quo infiniti ſoni ſimplices reſultabunt. Cum autem angulis ϕ, $2\pi + \phi$, $4\pi + \phi$ etc. idem valor ipſius z reſpondere debeat, euidens eſt, pro β alios numeros accipi non poſſe niſi integros; vnde pro n omnes numeros

Si enim tantum in vibrationibus regularibus ſubſiſtere velimus, vt valor numeri α maneat idem, pro β autem ſucceſſiue quicunque numeri integri 0, 1, 2, 3, 4, etc. ſumantur, vnde capiatur $n = 2\beta + 1$, denotet formula $\Sigma(r, \beta)$ valorem huius ſeriei infinitae:

$$r^{\beta}\left(1 - \frac{\alpha\alpha r^2}{2(n+1)e^2} + \frac{\alpha^4 r^4}{2\cdot 4(n+1)(n+3)e^4} - \frac{\alpha^6 r^6}{2\cdot 4\cdot 6(n+1)(n+3)(n+5)e^6} + \text{etc.}\right)$$

atque pro motu vibratorio regulari habebimus:

$$z = \text{ſin.}(\alpha t + \mathfrak{A})\left(A\Sigma(r,0) + B\Sigma(r,1)\,\text{ſin}(\Phi + \mathfrak{B}) + C\Sigma(r,2)\,\text{ſin}(2\Phi + \mathfrak{C}) + \text{etc.}\right)$$

Haec expreſſio ſi nihilo aequetur, dabit terminos tympani fixos, qui determinantur aequatione quadam inter diſtantiam r et angulum Φ. Verum methodus non patet coefficientes A, B, C cum angulis $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. ita definiendi, vt pro terminis data aequatio reſultet. Aeque parum autem conſtat, quomodo pro eadem tympani figura plures valores numeri α reperiri queant, ex quibus omnes ſonos ſimplices, quos id reddere valeat, cognoſcere liceat.

21. Imprimis autem haec formula apta eſt ad ſonos a tympano circulari editos definiendos; poſito enim radio tympani $= a$, et $\frac{a}{e} = m$, conſiderentur ſequentes aequationes infinitae:

$$1 - \frac{m^2\alpha^2}{2\cdot 2} + \frac{m^4\alpha^4}{2\cdot 4\cdot 2\cdot 4} - \frac{m^6\alpha^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2\cdot 4\cdot 6} + \frac{m^8\alpha^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} - \text{etc.} = 0$$

$$1 - \frac{m^2\alpha^2}{2\cdot 6} + \frac{m^4\alpha^4}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6} - \frac{m^6\alpha^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \frac{m^8\alpha^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} - \text{etc.} = 0$$

$$1 - \frac{m^2\alpha^2}{2\cdot 8} + \frac{m^4\alpha^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} - \frac{m^6\alpha^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 10} + \frac{m^8\alpha^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12} - \text{etc.} = 0$$

$$1 - \frac{m^2\alpha^2}{2\cdot 10} + \frac{m^4\alpha^4}{2\cdot 4\cdot 8\cdot 10} - \frac{m^6\alpha^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12} + \frac{m^8\alpha^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14} - \text{etc.} = 0$$

etc.

quarum vnaquaeque infinitos valores pro α praebet, ita vt infinities infiniti valores ipſius α obtineantur, quorum quilibet peculiarem denotat ſonum, cuiusque vibrationis tempore exiſtente $= \frac{\pi}{\alpha}$ min. ſec. Tum vero notandum eſt, quos ſonos ſimplices hoc tympanum ſeorſim reddere valet, eosdem quoque coniunctim vtcunque mixtos edere poſſe. Verum ipſa harum aequationum reſolutio aliter niſi per approximationem inſtitui non poſſe videtur, neque etiam poſtquam radices vnius inueneriṁus, nullum auxilium inde ad reliquas ſoluendas peti poteſt.

22. Specie quidem amplior reſolutio aequationis noſtrae

$$\frac{1}{ee}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$$

exhiberi poteſt, vnde autem parum vtilitatis ad caſus particulares expediendos redundat. Satisfacit ſcilicet huic aequationi iſta expreſſio:

$$z = \Phi(\alpha x + \beta y + \gamma t) \text{ ſi ſit } \alpha\alpha + \beta\beta = \frac{\gamma\gamma}{ee},$$

et cum huiusmodi formulae infinitis modis formari poſſint, aggregatum ex earum quotcunque valorem idoneum pro z praebet ſicque habebitur:

$$z = \Phi(\alpha x + \beta y + \gamma t) + \Psi(\alpha' x + \beta' y + \gamma' t) + \Omega(\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' t) \text{ etc.}$$

exiſtente

$$\alpha\alpha + \beta\beta = \frac{\gamma\gamma}{ee},\ \alpha'\alpha' + \beta'\beta' = \frac{\gamma'\gamma'}{ee},\ \alpha''\alpha'' + \beta''\beta'' = \frac{\gamma''\gamma''}{ee} \text{ etc.}$$

neque vero patet, quomodo huiusmodi expreſſio ad datam tympani figuram, neque quomodo ad datam impulſionem initio factam accommodari queat. Interim tamen perſpicuum eſt, hanc ſolutionem latiſſime patere, cum characteres Φ, Ψ, Ω functiones quascunque denotent, vnde maxime deſideratur methodus huiusmodi formulas ad vſum applicandi. TENTA-

TENTAMEN
DE SONO CAMPANARVM.

Auctore
L. EVLERO.

1.

Inter ea corpora, quae percuſſa contremiſcunt, ſonumque edunt, cordae tenſae et laminae elaſticae omni cura ſunt exploratae, quae inueſtigatio a Geometris eo diligentius eſt ſuſcepta, quod non ſolum Phyſicae inſignem illuſtrationem afferat, ſed etiam principiis Acuſticae et Muſicae ſtabiliendis inſeruiat. Quin etiam Celebris harmonicorum concentuum artifex *de Rameau* in hoc ſibi verum harmoniae fundamentum detexiſſe videtur, quod pleraque corpora percuſſa plures ſimul ſonos edere deprehendantur, quo phaenomeno naturam nobis ipſam ſonos harmonicos declarare putat. Tanquam principium enim aſſumit, quos ſonos idem corpus ſonorum percuſſum coniunctim producat, eos pro conſonis eſſe habendos. De cordis quidem tenſis Celeberrimus *Bernoulli* luculenter oſtendit, quomodo ab iis ſimul duo pluresve ſoni edi queant, qui ſecundum interualla conſona octauae, quintae ac tertiae diſcrepent. Inſtrumentis porro muſicis, quae inflatu tractantur, haec opinio mirifice confirmari videtur, dum ſoni, quos diuerſimode inflata edere ſolent, ſecundum ſeriem numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, etc. progrediuntur. Tum vero etiam in campanis Celeb. *de Rameau* varios ſonos ſimul ſe audire profitetur, inter quos potiſ-

ſimum interuallum tertiae ſeu decimae maioris emineat, hincque principium ſuum verae harmoniae antehac penitus ignoratum cumulatiſſime confirmari arbitratur.

2. Cauſa ergo, cur interualla *octauae*, *quintae* ac *tertiae* pro conſonis ſint habenda, hinc Auctori non tam in ſimplicitate rationum, quas auditu facile percipiamus, quaerenda videtur; ſed potius in eo, quod eadem interualla ſaepenumero a corporibus ſonoris percuſſis exhibeantur; quae ratio iis, qui regulis philoſophandi ſunt aſſueti, parum congrua videri debet. Si enim cauſa harmoniae in ſimplicitate rationis, quam vibrationes eodem tempore peractae inter ſe tenent, conſiſtit, parum refert, vtrum huiusmodi ſoni harmonici ab eodem corpore percuſſo ſimul edantur, nec ne? ac duo ſoni interuallo octauae vel quintae remoti ſuauius non ſonabunt, ſiue a duabus cordis diuerſis edantur, ſiue ab eadem ſimul. Ac ſi duo huiusmodi ſoni in eodem corpore ſimul percipiantur, tantum abeſt, vt in hoc ipſo cauſa conſonantiae conſtitui poſſit, vt potius noua quaeſtio inde naſcatur, quomodo eueniat, vt ab eodem corpore duo ſoni conſoni ſimul edantur. Cum autem hoc principium per ſe ſit infirmum, tum funditus iam eſt euerſum per ea, quae Celeb. *Bernoulli* et ego de laminis elaſticis ſumus commentati, quos ſonos maxime diſſonos ſimul edere poſſe oſtendimus. Atque nunc etiam monſtrabo, binos illos ſonos in campanis percipiendos, quos Celeb. *de Rameau* pro decima maiore habet, tantillum ab hac ratione deficere, eorumque interuallum adeo irrationale, ſicque maxime eſſe diſſonum. Ex quo exemplo cum laminis elaſticis coniuncto patebit, na-

naturam aeque ſonorum diſſonorum productione atque conſonorum delectari, neque hinc quicquam ad principiorum harmonicorum per ſe ſolidiſſime ſtabilitorum maiorem confirmationem, atque adeo ne ad illuſtrationem quidem, peti poſſe.

3. Satis perſpicuum videtur, dum campana pulſa contremiſcit, ſonumque edit, eius figuram ita continuo immutari, vt annuli elementares, quibus conſtare concipitur, a figura circulari rapidiſſime detorqueantur, atque alternatim figuram quaſi ellipticam elongatam et compreſſam recipiant. Quare ſi rationem huius tremoris inueſtigare velimus, tales annulos tenuiſſimos, in quos campana ſectionibus horizontalibus reſolui concipitur, ſeorſim conſiderare debemus, ita vt haec quaeſtio nobis ſit imprimis euoluenda, quomodo annulus elaſticus percuſſus vibrationes ſuas ſit peracturus, quae ergo quaeſtio affinis eſt ei, quam de vibrationibus laminarum elaſticarum inſtituimus, niſi quod hic figura corporis elaſtici naturalis eſt circularis, cum ibi eſſet linea recta. Sit igitur propoſitus huiusmodi annulus circularis ABMNCD, cuius latitudo ponatur $MN = c$, et radius medius $= a$, ita vt circuli interioris radius ſit $OM = a - \frac{1}{2}c$ et exterioris $ON = a + \frac{1}{2}c$, vnde ſuperficies annuli erit $= \pi(a + \frac{1}{2}c)^2 - \pi(a - \frac{1}{2}c)^2 = 2\pi ac$, denotante 2π peripheriam circuli, cuius radius $= 1$. Hinc ſi ſectore infinite paruo, cuius angulus ad $O = \omega$, exſcindatur elementum $MNmn$, erit eius areola $= ac\omega$. Tab IV. Fig. 1.

4. Iam elaſticitatem huius annuli contemplari oportet, vnde eius fruſtum quodcunque ABCD a vi quapiam in M ita incuruari pono, vt portio CMmD hiet Fig. 2.

hiet ab altera parte AMNB angulo infinite paruo $NMn=\omega$, et effectum elaſticitatis in minimis elaſtris $Nn.Zz$, quae vi ſeſe contrahendi praedita ambas annuli partes in ſtatum naturalem reſtituere conentur. Quaero igitur momentum omnium harum virium elementarium, quippe cui momentum vis, quae hanc inflexionem producere valet, aequale eſt ſtatuendum. Vis autem ſingulorum horum elaſtrorum Zz ipſorum elongationi proportionalis eſt cenſenda, ex quo, ſi ponatur $MZ=z$, ob $Zz=\omega z$, erit vis huius elaſtri vt $\omega z dz$, eiusque momentum reſpectu puncti quaſi immobilis $M=\omega zzdz$; vnde ſumma horum momentorum eſt $=\frac{1}{3}\omega z^3$, et expanſione ad totam latitudinem $MN=c$ facta, erit totum momentum hanc inflexionem producens vt $\frac{1}{3}c^3\omega$. Magnitudinem huius momenti abſolutam hic non curo, quippe quam pro quouis caſu per experimenta explorare licet. Sufficiat ergo noſſe, eam eſſe angulo inflexionis $NMn=\omega$ et cubo latitudinis annuli $MN=c$ coniunctim proportionalem. Dum ergo annulus ita in M inflectitur, vt angulus inflexionis ſit $NMn=\omega$, momentum virium ad hunc effectum producendum requiſitum ſtatuo $=Ec^3\omega$; ita ſi vis quaedam CV hunc effectum producat, eius momentum pro puncto M erit $=Ec^3\omega$. Ac ſi etiam craſſitiem huius annuli, quae ſit $=b$ ſimulque minima, introducere velimus, prodibit iſtud momentum $=Ebc^3\omega$.

5. Quo haec ad inſtitutum noſtrum magis accommodemus, ponamus in annulo figuram circularem Tab. IV. Fig. 1. iam a cauſa quacunque periiſſe, atque in M ſeu potius puncto medio inter M et N radium curuedinis non

non amplius eſſe $= a$, ſed iam factum eſſe $= r$. Cum igitur nunc curuatura ſit vt $\frac{1}{r}$, cum in ſtatu naturali eſt $\frac{1}{a}$, differentia $\frac{1}{r} - \frac{1}{a}$ ſeu $\frac{1}{a} - \frac{1}{r}$ id repraeſentat, quod ſupra angulo elementari ω deſignabatur. Quare virium momentum ad hanc inflexionem in M requiſitum erit $= Ebc^2(\frac{1}{a} - \frac{1}{a})$ vel $Ebc^2(\frac{1}{a} - \frac{1}{r})$, prout r fuerit vel minor vel maior quam a; priori ſcilicet caſu momentum aſſignatum tendet ad inflexionem minuendam, poſteriori vero ad augendam, quia hoc caſu annuli limbus minus eſt incurvatus, quam in ſtatu naturali. Hinc patet, literam E ita quampiam vim inuoluere, vt E ſit vis per quadratum lineae cuiusdam diuiſae; ſcilicet eius forma erit $\frac{P}{ff}$, vbi P vim quandam abſolutam, et f lineam quandam rectam denotat, quas quantitates per experimenta definiri conuenit.

6. Comparemus iam ſtatum annuli quemcunque violentum cum naturali et circulari, cuius centrum O, et ne figura nimis fiat confuſa, loco annuli latitudine c praediti, tantum circulum A X x radio O A $= a$ deſcriptum conſideremus, qui per annuli medium in ſtatu naturali ſit ductus, in violento autem in curuam B Y y ſit detortus. Cum deinde haec immutatio minima ſit ſtatuenda, puncta A, X, x ita e ſtatu naturali in violentum in B, Y, y translata concipere licet, vt rectae A B, Y X, yx productae per centrum O tranſeant, et puncta B, Y, y ſitum ſuum naturalem A, X, x affectent. Puncto ergo A tanquam fixo ſpectato, vocemus arcum A X $=$ X, et particulam X Y $=$ Y, tum vero pro alio puncto y arcum A $x = x$, et particulam $xy = y$, ita vt qualis functio y ſit ipſius x, talis fun- Tab. IV. Fig. 3.

 ctio

ctio Y eſſe debeat ipſius X. Nunc igitur perpendendum eſt, elementum annuli circa y eatenus in ſtatu violento verſari, quatenus radius oſculi in y vel maior eſt, vel Tab. IV. minor, quam a. Ad eum ergo inueſtigandum fig. 4. Fig. 4. magis ad hunc ſcopum accommodata vtor, vbi Oxy ſit radius ipſi OXY proximus, et Yv arculus centro O deſcriptus; hic ob $AX = x$, $XY = y$, et $OX = a$, erit $Xx = dx$, $Yv = (1 + \frac{y}{a})dx$, et $vy = dy$, vnde fit $Yy = \sqrt{((1 + \frac{y}{a})^2 dx^2 + dy^2)} = ds$. Ducatur ad Y tangens, in eamque ex O demittatur perpendiculum $OT = \Pi$, erit $ds : (1 + \frac{y}{a})dx = a + y : \Pi$; hincque $\Pi = \frac{(a+y)^2 dx}{a ds}$. Conſtat autem, eſſe radium curuedinis $YR = \frac{(a+y)dy}{d\Pi}$. At ſumto dx conſtante eſt $d\Pi = \frac{2(a+y)dxdy}{ads} - \frac{(a+y)^2 dxdds}{ads^2}$; quod ob $dds = \frac{(a+y)dx^2 dy + aadyddy}{aads}$, abit in

$$d\Pi = \frac{(a+y)^3 dx^2 dy + 2aa(a+y)dxdy^3 - aa(a+y)^2 dxdyddy}{a^3 ds^3}$$

hincque $YR = \frac{a^3 ds^3}{(a+y)^3 dx^3 + 2aadxdy^2 - aa(a+y)dxddy}$.

7. Nunc autem cogitemus, eſſe y prae a quantitatem minimam, indeque etiam rationem $dy : dx$ euaneſcere; atque proxime erit $ds = dx$, hincque

$$YR = \frac{a^3 dx^3}{aadx^3 + 2aadxdy^2 - a^2 dxddy} = \frac{adx^2}{ax^2 - addy}.$$

Quare poſito radio oſculi in $y = r$, erit $r = \frac{adx^2}{dx^2 - addy}$
Fig. 3. et $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} - \frac{ddy}{dx^2}$; vnde ſi $\frac{ddy}{dx^2}$ vt poſitiuum ſpectemus, radius oſculi in y maior erit quam a, et conatus aderit ad annulum in y magis incuruandum, cuius momentum, vt ante oſtendimus, aeſtimari debet $= Ebc^2 . \frac{ddy}{dx^2}$, vel momentum, quod annulus exerit ad curuaturam in y minuendam, erit $= -Ebc^2 . \frac{ddy}{dx^2}$, quod momentum ad

ipſum

ipſum punctum y applicatum eſt cenſendum. Quatenus ergo annulus in ſingulis elementis vel magis incuruatus eſt, vel minus, quam in ſtatu naturali, eatenus vires naſcuntur, ſingula annuli elementa in ſtatum naturalem pellentes. Sit igitur vis, qua elementum ad y vrgetur verſus $x = p\,dx$, ſimilique modo vis elementaris ſecundum $YX = P\,dX$, quas vires ex ſuperioribus ſollicitationibus determinari oportet; ac quin volumen elementi in y ſit $= bc\,dx$, in Y autem $= bc\,dX$, erunt eorum maſſae per denſitatem δ quaſi multiplicando $\delta\,bc\,dx$ et $\delta\,bc\,dX$, vnde introducendo tempus $= t$ in minutis ſecundis expreſſum, ſi g ſit altitudo lapſus vno minuto ſecundo, erit ex principiis ſollicitationum $\delta\,bc\,dx\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -2gp\,dx$ ſeu $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{2gp}{\delta bc}$.

8. Ad has autem vires elementares $p\,dx$ et $P\,dX$ inueniendas, quibus ſingula annuli elementa actu ad ſtatum naturalem vrgentur, concipiamus ſingulas has vires contrarie applicatas, quibus ergo efficietur, vt annulus in hoc ſtatu violento conſeruetur. Repraeſentet recta YP hanc vim $P\,dX$, huiusque cum reliquis omnibus effectus ratione puncti y in hoc conſiſtet, vt ab eorum momentis iunctim ſumtis curuatura in y tantum minuatur, quantum ob elaſticitatem augeri conatur, quod momentum ante vidimus eſſe $= Ebc^2.\frac{ddy}{dx^2}$, cui ergo ſumma omnium momentorum ex viribus elementaribus $P\,dX$ natorum aequalis eſſe debet. Hunc in finem punctum y tanquam fixum ſpectemus, punctum vero Y per totum annuli ambitum variari ponamus, vt x et y tantisper ſint quantitates conſtantes, ſolae autem X et Y cum vi incognita $P\,dX$

variabiles. Ac huius quidem vis $YP = PdY$ momentum in punctum y eſt $= PdX.\text{ſin}.XOx.Oy$ $= (a+y)PdX\,\text{ſin}.(\frac{x}{a}-\frac{X}{a}) = aPdX(\text{ſin}.\frac{x}{a}\text{coſ}.\frac{X}{a} - \text{coſ}.\frac{x}{a}\,\text{ſin}.\frac{X}{a})$, quia y prae a vt euaneſcentem ſpectamus, vnde ſumma horum momentorum eſt $a\,\text{ſin}.\frac{x}{a}\int PdX\,\text{coſ}.\frac{X}{a}$ $- a\,\text{coſ}.\frac{x}{a}\int PdX\,\text{ſin}.\frac{X}{a}$, quod vsque ad ipſum punctum y eſt extendendum, quo fit $X = x$ et $P = p$.

9 Nunc igitur variabilitas puncti Y in ipſum punctum y transfertur, ac iam x et p vt variabilibus ſpectatis erit ſumma omnium momentorum curuaturam in y minuere tendentium $= a\,\text{ſin}.\frac{x}{a}\int pdx\,\text{coſ}.\frac{x}{a} - a\,\text{coſ}.\frac{x}{a}\int pdx\,\text{ſin}.\frac{x}{a}$, ipſi $Ebc^2.\frac{ddy}{dx^2}$ aequalis ſtatuenda, vnde vim elementarem pdx hactenus incognitam definire licebit. Sumto autem elemento dx conſtante, differentiatio praebet:

$$\text{coſ}.\frac{x}{a}\int pdx\,\text{coſ}.\frac{x}{a} + \text{ſin}.\frac{x}{a}\int pdx\,\text{ſin}.\frac{x}{a} = Ebc^2.\frac{d^3y}{dx^3}$$

porro autem differentiando adipiſcimur

$$-\frac{1}{a}\text{ſin}.\frac{x}{a}\int pdx\,\text{coſ}.\frac{x}{a} - \frac{1}{a}\text{coſ}.\frac{x}{a}\int pdx\,\text{ſin}.\frac{x}{a} + p = Ebc^2.\frac{d^4y}{dx^4}.$$

Cum vero ſit

$$\frac{1}{a}\text{ſin}.\frac{x}{a}\int pdx\,\text{coſ}.\frac{x}{a} - \frac{1}{a}\text{coſ}.\frac{x}{a}\int pdx\,\text{ſin}.\frac{x}{a} = Ebc^2.\frac{ddy}{aadx^2}$$

addendo prodibit

$$p = Ebc^2(\frac{ddy}{aadx^2} + \frac{d^4y}{dx^4})$$

qui valor per duplicem differentiationem ortus idem eſſe debet, quaecunque conſtantes in integrationibus formularum $\int pdx\,\text{coſ}.\frac{x}{a}$ et $\int pdx\,\text{ſin}.\frac{x}{a}$ fuerint adiectae. Neque ergo hinc vllum dubium naſci poteſt, quod ſupra has integrationes non ſatis ſollicite determinauerimus;

mus ; vtcunque enim determinentur, ſemper idem valor pro littera p obtinetur.

10. Cum igitur nunc, vbi ad variationem temporis fluxu oriundam ſimul ſpectamus, quantitas y non tantum, vt functio ipſius x, ſed etiam temporis t, tractari debeat, loco formularum $\frac{ddy}{dx^2}$ et $\frac{d^4y}{dx^4}$, vbi temporis nulla eſt ratio habita, more recepto ſcribere debemus $(\frac{ddy}{dx^2})$ et $(\frac{d^4y}{dx^4})$, et quoniam ſupra inuenimus $(\frac{ddy}{dt^2}) = \frac{2gp}{\delta bc}$, aequatio motum annuli ad quoduis tempus determinans erit

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{2gEcc}{\delta}\left(\frac{1}{aa}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)\right).$$

Quare ſi breuitatis gratia ponamus $\frac{2gE}{\delta} = ff$, quae eſt quantitas conſtans pro omnibus annulis ex eadem materia confectis, vtcunque ratione radii a et latitudinis c inter ſe diſcrepent, (craſſities enim b penitus ex calculo exceſſit,) aequatio noſtra reſoluenda erit

$$0 = \frac{1}{ffcc}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) + \frac{1}{aa}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)$$

cuius reſolutio per ſe non determinata ex ſtatu initiali, quo tam figura annulo impreſſa, quam celeritates ſingulorum elementorum dantur, determinari debet. Tum vero etiam ad hoc reſpici oportet, quod ſi pro x ſcribatur $2\pi a + x$, vel in genere $2i\pi a + x$, valor ipſius y idem reſultet, quandoquidem hi arcus omnes in eodem puncto x terminantur. Denique etiam recordandum eſt, nullas alias reſolutiones locum habere poſſe, niſi quae pro y valores quam minimos, nunquam vltra certos limites augendos, exhibeant, ad quas conditiones in reſolutione probe attendi oportet.

11. Ex aequatione inuenta temporis ratio ſtatim tollitur ponendo $y = v\,\text{ſin.}(nt+\nu)$, vt v ſit functio ſolius x; tum enim ob $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -nnv\,\text{ſin.}(nt+\nu)$ totam aequationem per ſin.$(nt+\nu)$ diuidendo habebimus:

$$\frac{d^4v}{dx^4} + \frac{ddv}{aadx^2} - \frac{nnv}{ffcc} = 0$$

cuius integrale completum huiusmodi formae erit:

$$v = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} + C\,\text{ſin.}\,\beta x + D\,\text{coſ.}\,\beta x$$

ita vt ſit:

$$\alpha^4 + \frac{\alpha\alpha}{aa} = \frac{nn}{ffcc} \quad \text{et} \quad \beta^4 - \frac{\beta\beta}{aa} = \frac{nn}{ffcc}$$

hincque $\alpha^4 - \beta^4 + \frac{\alpha\alpha + \beta\beta}{aa} = 0$, et $\alpha\alpha - \beta\beta + \frac{1}{aa} = 0$. Cum ergo ſit $\beta\beta = \frac{1}{2aa} + \sqrt{\left(\frac{1}{4a^4} + \frac{nn}{ffcc}\right)}$, erit $\alpha\alpha = \frac{1}{2aa} + \sqrt{\left(\frac{1}{4a^4} + \frac{nn}{ffcc}\right)}$. Verum quia valor ipſius v idem eſſe debet, etiamſi pro x ſcribatur $2i\pi a + x$, manifeſtum eſt, caſu noſtro fore $A = 0$ et $B = 0$; tum vero vt ſin.$(2i\pi\beta a + \beta x) =$ ſin.βx, neceſſe eſt ſit βa numerus integer. Statuatur ergo $\beta a = i$, ſeu $\beta = \frac{i}{a}$, hincque numerus n ita definitur, vt ſit

$$\frac{nn}{ffcc} = \frac{i^4 - ii}{a^4} \quad \text{ſeu} \quad n = \frac{ifc}{aa}\sqrt{(ii-1)}.$$

Quocirca cum ſit $v = C\,\text{ſin.}\frac{ix}{a} + D\,\text{coſ.}\frac{ix}{a}$, habebimus

$$y = \left(C\,\text{ſin.}\frac{ix}{a} + C\,\text{coſ.}\frac{ix}{a}\right)\text{ſin.}\left(\frac{ifct}{aa}\sqrt{(ii-1)} + \nu\right)$$

quae aequatio facilius ita exhibetur:

$$y = A\,\text{ſin.}\left(\frac{ix}{a} + \alpha\right)\text{ſin.}\left(\frac{ifct}{aa}\sqrt{(ii-1)} + \nu\right).$$

12. Quoniam A, α, ν ſunt quantitates prorſus arbitrariae, et pro i numerum integrum quemcunque accipere licet, infinitas huiusmodi formulas exhibere poterimus,

rimus, quae ſingulae pro y poſitae quaeſtioni ſatisfaciant. Quilibet autem, poſito breuitatis gratia $\frac{ifc}{aa}\surd(ii-1)$, generalius ita exprimi poteſt, vt ſit

$$y = Aa\,\text{ſin.}\frac{ix}{a}\,\text{ſin.}\,nt + Ba\,\text{ſin.}\frac{ix}{a}\,\text{coſ.}\,nt + C\,a\,\text{coſ.}\frac{ix}{a}\,\text{ſin.}\,nt + Da\,\text{coſ}\frac{ix}{a}\,\text{ſin.}\,nt$$

vbi iam coefficientes A, B, C, D ſunt numeri arbitrarii iique minimi, quandoquidem problema ita reſoluimus, vt tremores ſint quam minimi. Pro i autem quoscunque numeros integros accipere licet, vnde innumerabiles huiusmodi formulae exhiberi poſſunt, quae non ſolum ſingulae ſatisfaciunt, ſed etiam binae pluresue iunctim ſumtae. Verum hic obſeruo, caſum $i=1$, quo ſit $n=0$, nullum motum indicare; aequatio enim $y = Ba\,\text{ſin.}\frac{x}{a} + Da\,\text{coſ.}\frac{x}{a}$ eiusmodi annuli mutationem refert, qua figuram circularem retinet, ac tantum de ſuo loco aliquantillum remouetur, quod ad motum vibratorium nihil confert, vnde huic caſui, ne in compoſitione quidem, locus relinquitur.

13. Caſus ergo ſimpliciſſimus motum vibratorium annuli exhibens oritur ponendo $i=2$, vnde ſit $n=\frac{2fc}{aa}\surd 3$, atque

$$y = a\left(A\,\text{ſin.}\frac{2x}{a} + C\,\text{coſ.}\frac{2x}{a}\right)\text{ſin.}\frac{2fc}{aa}t\surd 3 + a\left(B\,\text{ſin.}\frac{2x}{a} + D\,\text{coſ.}\frac{2x}{a}\right)\text{coſ}\frac{2fc}{aa}t\surd 3$$

vnde ſimul celeritas cuiusque puncti y pro quouis tempore t cognoſcitur, quae eſt

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{2fc\surd 3}{a}\left(A\,\text{ſin.}\frac{2x}{a} + C\,\text{coſ.}\frac{2x}{a}\right)\text{coſ.}\frac{2fc}{aa}t\surd 3 - \frac{2fc\surd 3}{a}\left(B\,\text{ſin}\frac{2x}{a} + D\,\text{coſ.}\frac{2x}{a}\right)\text{ſin.}\frac{2fc}{aa}t\surd 3$$

qui

qui motus ex eo ſtatu initiali naſcitur, quo erat

$$y = a\left(B\,\text{ſin.}\,\tfrac{2x}{a} + D\,\text{coſ.}\,\tfrac{2x}{a}\right)$$

et $\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{2fc\sqrt{3}}{a}\left(A\,\text{ſin.}\,\tfrac{2x}{a} + C\,\text{coſ.}\,\tfrac{2x}{a}\right)$

vnde ſingulorum punctorum tam variatio de ſtatu naturali, quam celeritas impreſſa naſcitur. Tum vero vibrationes erunt regulares; elapſo enim quoque tempore t vt ſit $\frac{2fc}{aa}t\sqrt{3} = 2\pi$, annulus in ſtatum priſtinum reducitur. Quoniam igitur interea binas vibrationes abſoluiſſe cenſetur, tempus vnius vibrationis erit $= \frac{\pi aa}{2fc\sqrt{3}}$, ſingulisque minutis tot vibrationes abſoluentur, quot indicat numerus $\frac{2fc\sqrt{3}}{\pi aa}$, cui ipſe ſonus editus cenſetur proportionalis. Ex quo patet, pro annulis ex eadem materia confectis ſonum eſſe directe vt annuli latitudinem, et reciproce vt quadratum radii.

14. Hic ergo eſt ſonus principalis, quem annulus pulſus edere poteſt. Secundus caſus vibrationum regularium oritur ſumendo $i = 3$, quo fit $n = \frac{3fc}{aa}\sqrt{8}$ et

$$y = a\left(A\,\text{ſin.}\,\tfrac{3x}{a} + C\,\text{coſ.}\,\tfrac{3x}{a}\right)\text{ſin.}\,\tfrac{3fc}{aa}t\sqrt{3} + a\left(B\,\text{ſin.}\,\tfrac{3x}{a} + D\,\text{coſ.}\,\tfrac{3x}{a}\right)\text{coſ.}\,\tfrac{3fc}{aa}t\sqrt{8}$$

et celeritas puncti y elapſo tempore t

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{3fc\sqrt{8}}{a}\left(A\,\text{ſin.}\,\tfrac{3x}{a} + C\,\text{coſ.}\,\tfrac{3x}{a}\right)\text{coſ.}\,\tfrac{3fc}{aa}t\sqrt{8} - \frac{3fc\sqrt{8}}{a}\left(B\,\text{ſin.}\,\tfrac{3x}{a} + D\,\text{coſ.}\,\tfrac{3x}{a}\right)\text{ſin.}\,\tfrac{3fc}{aa}t\sqrt{8}.$$

Hic ergo caſus oritur, ſi annulus ita percutiatur, vt initio poſito $t = 0$ fuerit

$$y = a\left(B\,\text{ſin.}\,\tfrac{3x}{a} + D\,\text{coſ.}\,\tfrac{3x}{a}\right) \text{ et}$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{3fc\sqrt{8}}{a}\left(A\,\text{ſin.}\,\tfrac{3x}{a} + C\,\text{coſ.}\,\tfrac{3x}{a}\right)$$

quod

quod adhuc ob A, B, C, D arbitrarias infinitis modis fieri poteſt. Tum autem annulo ita percuſſo, is, elapſo tempore $t = \frac{2\pi aa}{3fc\sqrt{8}}$, iterum in ſtatum priſtinum reducitur, ſicque ſingularum vibrationum tempus erit $= \frac{\pi aa}{3fc\sqrt{8}}$, ſeu vno minuto ſecundo tot edentur vibrationes, quot hic numerus $\frac{3fc\sqrt{8}}{\pi aa}$ continet vnitates, cui numero ergo hic ſecundus ſonus ab annulo editus erit proportionalis. Hic igitur ſonus ad principalem rationem tenet vt $\frac{3\sqrt{8}}{2\sqrt{3}}$ ad 1, ſeu vt $\sqrt{6}:1$. Vnde ſi ſonus principalis conueniat cum ſono muſico C, ſecundus ſonus aliquanto grauior eſt ſono e, ita vt interuallum parumper deficiat a *decima maiore.*

15. Tertius caſus vibrationum regularium, ideoque tertius ſonus ſimplex, quem annulus pulſus edere valet, oritur ponendo $i = 4$, et $n = \frac{4fc}{aa}\sqrt{15}$, vnde fit:

$$y = a(A\,\text{ſin.}\tfrac{4x}{a} + C\,\text{coſ.}\tfrac{4x}{a})\,\text{ſin.}\tfrac{4fc}{aa}t\sqrt{15} + a(B\,\text{ſin.}\tfrac{4x}{a} + D\,\text{coſ.}\tfrac{4x}{a})\,\text{coſ.}\tfrac{4fc}{aa}t\sqrt{15}$$

et celeritas:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{4fc\sqrt{15}}{a}(A\,\text{ſin.}\tfrac{4x}{a} + C\,\text{coſ.}\tfrac{4x}{a})\,\text{coſ.}\tfrac{4fc}{aa}t\sqrt{15} - \frac{4fc\sqrt{15}}{a}(B\,\text{ſin.}\tfrac{4x}{a} + D\,\text{coſ.}\tfrac{4x}{a})\,\text{ſin.}\tfrac{4fc}{aa}t\sqrt{15}$$

qui motus oritur, ſi annulus ita percutiatur, vt motus initio fuerit:

$$y = a(B\,\text{ſin.}\tfrac{4x}{a} + D\,\text{coſ.}\tfrac{4x}{a}) \text{ et}$$
$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{4fc\sqrt{15}}{a}(A\,\text{ſin.}\tfrac{4x}{a} + C\,\text{coſ.}\tfrac{4x}{a})$$

qui ergo caſus etiam infinitis modis produci poteſt, tum autem annulus ad ſtatum priſtinum redit elapſo tem-

pore $t = \frac{2\pi aa}{4fc\sqrt{15}}$, ita vt ſingularum vibrationum tempus futurum ſit $= \frac{\pi aa}{4fc\sqrt{15}}$ min. ſec. Singulis ergo minutis ſecundis tot edentur vibrationes, quot vnitates continet iſte numerus $\frac{4fc\sqrt{15}}{\pi aa}$, cui ſimul ipſe ſonus eſt proportionalis. Quare ſi ſonus principalis, quem ſigno muſico C reſpondere ponamus, vnitate exprimatur, hic tertius ſonus erit $= \frac{4\sqrt{15}}{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{5}$, ſeu tantillo minor quam $\frac{9}{2}$; paulisper igitur grauior erit ſono $\bar{d}$, et interuallum valde parum deficit ab interuallo ex duplici octaua et tono maiore compoſito.

16. Quartus caſus vibrationum regularium, quartusque ſonus ſimplex, quem annulus edere valet, oritur ponendo. $i = 5$ et $n = \frac{5fc}{aa}\sqrt{24}$, vnde fit

$$y = a\left(A\,\text{ſin.}\frac{5x}{a} + C\,\text{coſ.}\frac{5x}{a}\right)\text{ſin.}\frac{5fc}{aa}t\sqrt{24} + a\left(B\,\text{ſin.}\frac{5x}{a} + D\,\text{coſ.}\frac{5x}{a}\right)\text{coſ.}\frac{5fc}{aa}t\sqrt{24}$$

et celeritas:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{5fc\sqrt{24}}{a}\left(A\,\text{ſin.}\frac{5x}{a} + C\,\text{coſ.}\frac{5x}{a}\right)\text{coſ.}\frac{5fc}{aa}t\sqrt{24} - \frac{5fc\sqrt{24}}{a}\left(B\,\text{ſin.}\frac{5x}{a} + D\,\text{coſ.}\frac{5x}{a}\right)\text{ſin.}\frac{5fc}{aa}t\sqrt{24}$$

qui motus oritur, ſi annulus ita percutiatur, vt poſito $t = 0$ fuerit

$$y = a\left(B\,\text{ſin.}\frac{5x}{a} + D\,\text{coſ.}\frac{5x}{a}\right) \text{ et}$$
$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{5fc\sqrt{24}}{a}\left(A\,\text{ſin.}\frac{5x}{a} + C\,\text{coſ.}\frac{5x}{a}\right).$$

Ad ſitum ergo priſtinum annulus reducitur elapſo tempore $t = \frac{2\pi aa}{5fc\sqrt{24}}$, vnde ſingularum vibrationum tempus erit $= \frac{\pi aa}{5fc\sqrt{24}}$ min. ſec. ita vt ſingulis minutis ſecundis tot edantur vibrationes, quot vnitates continet

net hic numerus $\frac{5fc\sqrt{24}}{\pi aa}$, cui ipſe ſonus eſt proportionalis. Quare ſi ſonus principalis conueniat cum ſono C, qui vnitate exponatur, hic ſonus quartus erit $= \frac{5\sqrt{24}}{2\sqrt{3}} = 5\sqrt{2}$, ideoque tantillum ſuperat 7. Cum nunc 6 ſit ſonus g', noſter ſonus paulisper acutior eſt quam a', et interuallum a principali parumper excedit interuallum ex duplici octaua et ſexta maiore compoſitum.

17. Soni ergo ſimplices, quos in eodem annulo excitare licet, ſiquidem principalis vnitate exponatur, ſequenti modo ſe habebunt:

I.	. . $1 =$	$1 =$	$1,00000$	. . C
II.	. . $\frac{3\sqrt{8}}{2\sqrt{3}} = \sqrt{}$	$6 =$	$2,44949$	. . $e-$
III.	. . $\frac{4\sqrt{15}}{2\sqrt{3}} = \sqrt{}$	$20 =$	$4,47214$	. . $\bar{d}-$
IV.	. . $\frac{5\sqrt{24}}{2\sqrt{3}} = \sqrt{}$	$50 =$	$7,07107$	. . $\bar{b}-$
V.	. . $\frac{6\sqrt{35}}{2\sqrt{3}} = \sqrt{}$	$105 =$	$10,24695$	. . $\bar{\bar{e}}+$
VI.	. . $\frac{7\sqrt{48}}{2\sqrt{3}} = \sqrt{}$	$196 =$	$14,00000$	. . $\bar{\bar{b}}-$
VII.	. . $\frac{8\sqrt{63}}{2\sqrt{3}} = \sqrt{}$	$336 =$	$18,33024$	. . $\bar{\bar{\bar{d}}}+$

Hi ergo ſoni continuo fiunt acutiores; interuallis autem irrationalibus diſtinguuntur, ſecus ac fit in cordis, ita vt hi ſoni maxime ſint diſſoni, plurimumque ab harmonia abhorreant. Atque ſingulos hos ſonos idem annulus, ſi certo modo percutiatur, ſingulatim edere poteſt, ſin autem percuſſio non ita fuerit comparata, vti plerumque vſu venire debet, annulus non ſimplicem edet ſonum, ſed mixtum ex binis pluribusue ſimplicibus, ideoque inter ſe diſſonis; ex quo principium Cel. *de Rameau* funditus euertitur.

18. Operae pretium erit inueſtigare, quomodo impulſionem initialem comparatam eſſe oporteat, vt quisque ſonorum ſimplicium purus edatur; id quod clariſſime inde perſpicietur, ſi definiamus, in quot punctis figura annuli diſtorta naturalem interſecet, ſeu vbi fiat $y = 0$; in totidem enim punctis quoque, etſi non iisdem, celeritas impreſſa $(\frac{dy}{dt})$ euaneſcere debet. Cum enim pro ſtatu initiali ſit in genere

$$\frac{y}{a} = B \text{ſin.} \frac{ix}{a} + D \text{coſ.} \frac{ix}{a} \text{ et } (\frac{dy}{dt}) = \alpha (A \text{ſin.} \frac{ix}{a} + C \text{coſ.} \frac{ix}{a})$$

totidem locis tam y, quam $(\frac{dy}{dt})$, euaneſcit, niſi forte vel y vbique vel etiam celeritas fuerit nulla. Puncta ergo, quibus ſit ſiue $y = 0$, ſiue $(\frac{dy}{dt}) = 0$ huiusmodi aequatione tang. $\frac{ix}{a} =$ Conſt. determinantur, vnde ſi Conſt. $=$ tang. θ, valores anguli $\frac{ix}{a}$ ſunt θ, $\pi + \theta$, $2\pi + \theta$, $3\pi + \theta$, $4\pi + \theta$ etc vnde anguli $AOx = \frac{x}{a}$ valores ſunt:

$$\frac{\theta}{i};\ \frac{\pi + \theta}{i};\ \frac{2\pi + \theta}{i};\ \frac{3\pi + \theta}{i} \ldots \text{vsque ad } \frac{(2i-1)\pi + \theta}{i}$$

quorum numerus eſt $2i$. Pro quouis ergo numero i tam numerus interſectionum, quam locorum, vbi celeritas eſt nulla, eſt duplo maior $= 2i$.

19. Vt igitur annulus ſonum principalem purum edat, impulſio ita debet eſſe comparata, vt figura impreſſa figuram naturalem in quatuor punctis aequidiſtantibus interſecet, et vt celeritas in ſimilibus quatuor punctis ſit nulla. Sin autem figura impreſſa figuram naturalem vel in ſex, vel octo, vel decem etc. punctis interſecet, in totidemque locis celeritas fuerit nulla,

annulus

annulus edet ſonum, vel ſecundum, vel tertium, vel quartum etc. Ex quo intelligitur, rariſſime id obtineri poſſe, vt vllus horum ſonorum purus edatur, ac ſemper fere eueniet, vt quomodocunque annulus percutiatur, plures ſoni ſimul exaudiantur, qui tantum abeſt, vt perfectam harmoniam referant, vt potius interualla maxime diſſona conſtituant. Inter hos autem diuerſos ſonos modo alii aliique eminebunt, prout impulſio ad rationem cuiuspiam ſoni ſimplicis propius acceſſerit. In genere autem vibrationes frequentiores, quibus ſoni acutiores reſpondent, a reſiſtentia citius extinguentur, praecipue ſi per ſe fuerint debiliores, at ſonus principalis grauiſſimus diutiſſime durabit, reliquisque plerumque multum antecellet. Vix autem euenire poterit, vt idem annulus ſaepius impulſus eandem plane ſonorum mixturam exhibeat.

20. Hinc cuiusmodi ſonos campanae reddant, quodammodo colligere licet, quandoquidem mente campanas in huiusmodi annulos reſolutas concipimus. Ac primo quidem intelligitur, ſi omnes iſti annuli fuerint inter ſe aequales, vt forma prodeat cruſtae cylindricae, eandem ſonorum rationem eſſe futuram, quaecunque fuerit campanae altitudo, propterea quod ſinguli annuli ad pares vibrationes ſunt inſtructi. Verum idem quoque euenire debet, licet annuli ratione amplitudinis differant, dummodo latitudo ſingulorum quadrato radii ipſorum fuerit proportionalis. Scilicet ſi poſito cuiusque annuli radio $=r$, eius latitudo fuerit $s=\frac{rr}{b}$, ſinguli annuli ad pares ſonos edendos erunt accommodati,

ſicque tota campana eosdem ſonos, ſiue ſimplices, ſiue mixtos, reddere poterit, qui formula $\frac{ifs\sqrt{(ii-1)}}{\pi rr}$ indicantur, ex quo ſonus principalis erit $=\frac{2fs\sqrt{3}}{\pi rr}$. Quodſi plures campanae huiusmodi inter ſe ſimiles habeantur, erunt ſoni principales ab iis editi reciproce, vt latera homologa, ſeu diametri amplitudinum, vel, quod eodem redit, in ratione reciproca ſubtriplicata ponderum. Quare, vt duae campanae ſonos edant rationem $m:n$ tenentes, earum diametri rationem $n:m$, pondera autem rationem $n^3:m^3$, tenere debent, ſiquidem inter ſe fuerint ſimiles, quam regulam etiam experientia comprobat. Verum hinc probe notetur, vnamquamque campanam praeter ſonum principalem plerumque plures alios ſonos ſimul edere, ſecundum interualla ſupra indicata, qui a vera harmonia maxime abhorreant.

22. At Theoria campanarum non mediocriter perfici videtur, ſi campanae non per ſectiones horizontales in annulos planos, ſed potius per ſectiones ad earum ſuperficiem normales in annulos conicos ſecari intelligantur, quoniam priori modo neque ſupremus campanae fundus, neque infimus limbus repraeſentari poteſt. Sit igitur AC axis campanae, circa quem figura $Aa\,Ss$ B rotata corpus campanae gignat. (Tab. IV. Fig. 5) Ponatur pro hac figura $AQ=p$; $QS=q$, normalis ad curuam $SR=r$, et craſſities in S normaliter capta $Ss=s$; erit $QR=\frac{qdq}{dp}$ et $rr=\frac{qq(dp^2+dq^2)}{dp^2}$. Hinc fit elementum curuae $S\Sigma=\frac{rdp}{q}$, quod in $Ss=s$, et inſuper circuli radio $QS=q$ deſcripti peripheriam $2\pi q$ ductum

ductum dat ſoliditatem elementi campanae $= 2\pi r s dp$, vnde tota campanae ſoliditas erit $= 2\pi \int r s dp$, ſi ſcilicet hoc integrale per totam figuram extendatur. Caeterum hic aequatio inter coordinatas p et q, neque ad curuam interiorem ASB, neque exteriorem asB, ſed ad lineam quandam mediam pertinere eſt cenſenda.

22. Nunc ergo eiusmodi annulum contemplemur, qui ex rotatione elementi $Ss\Sigma\sigma$ circa axem AC generetur, et cuius figura cruſtam coni truncati referet. Hunc annulum cono vertice R et latere RS circumplicatum concipiamus, cuius autem tantum quaſi medium circulum SEXx in figura exprimimus, in qua propterea erit $SQ = Qx = q$, et $RS = Rx = r$; atque s denotat hic latitudinem annuli, quae ſupra fuerat c, dum radius, qui ſupra erat a, hic eſt q. Iam huius annuli vibrationes ita fieri concipiamus, vt is perpetuo in ſuperficie huius coni maneat; peruenerit ergo annulus ex ſtatu naturali EXx in ſtatum eYy, pro quo ponamus arcus $EX = X$ et $Ex = x$, ſpatiola vero $XY = Y$ et $xy = y$, quae ſint minima. Quatenus ergo curuatura annuli in y maior minorue eſt, quam in ſtatu naturali, eatenus elaſticitas in y virium momentum inuoluit, quod, vt ſupra, aeſtimari debet $= Ebs^2\frac{ddy}{dx^2}$, vbi b craſſitiem annuli denotat, quae autem deinceps ex calculo euaneſcit. Manifeſtum hoc fit, ſi ſuperficiem conicam in planum explicemus; tum enim quaeſtio ad ſuperiorem caſum ſponte reducitur. Momentum ergo, quod elaſticitas exerit ad curuaturam minuendam, eſt $= -Ebs^3\frac{ddy}{dx^2}$, quod non modo ad punctum

Tab. IV. Fig. 6.

ctum y, ſed axem ibi ad ſuperficiem coni normalem yz eſt referendum.

23. Ratiocinium vt ſupra inſtituturi, ſit vis elementum annuli in y ſecundum yx vrgens $= p\,dx$, eritque vt ibi: $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{-2gq}{\delta b s}$; ſpectemus autem punctum y vt fixum. In Y autem vis reſpondens $P\,dX$ contrarie applicata concipiatur, quae ergo ſecundum RX trahens; reſoluatur ſecundum directiones RT et RV, quarum illa pro axe yz, vtpote in eodem plano nullum momentum, haec vero momentum RV, $Ry =$ vis RV. r. At ex X ad Sx demittatur perpendicularis XT, cui RV eſt parallela et aequalis, et ob $Xx = x - X$, eſt $XT = q\,\text{ſin.}\left(\frac{x}{q} - \frac{X}{q}\right)$, hincque vis RX $(P\,dX)$: vim RV $=$ RX (r) : $q\,\text{ſin.}\left(\frac{x}{q} - \frac{X}{q}\right)$, vnde fit

vis $RV = \frac{Pq\,dX}{r}\left(\text{ſin.}\frac{x}{q}\,\text{coſ.}\frac{X}{q} - \text{coſ.}\frac{x}{q}\,\text{ſin.}\frac{X}{q}\right)$ et ſumma omnium momentorum:

$$q\,\text{ſin.}\frac{x}{q}\int P\,dX\,\text{coſ.}\frac{X}{q} - q\,\text{coſ.}\frac{x}{q}\int P\,dX\,\text{ſin.}\frac{X}{q}$$

quod ad y vsque extenſum praebet

$$q\,\text{ſin.}\frac{x}{q}\int p\,dx\,\text{coſ.}\frac{x}{q} - q\,\text{coſ.}\frac{x}{q}\int p\,dx\,\text{ſin.}\frac{x}{q} = Ebs^2.\frac{ddy}{dx^2}$$

hincque vt ſupra colligitur

$$p = Ebs^2\left(\frac{ddy}{qq\,dx^2}\right) + \frac{d^4y}{dx^4}\Big)$$

ac poſito $\frac{2gE}{\delta} = ff$ erit pro motu annuli

$$0 = \frac{1}{ffss}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) + \frac{1}{qq}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right).$$

Tab. IV. Fig. 5. 24. Haec eſt eadem plane aequatio, quae prodiiſſet, ſi campanam per ſectiones horizontales in annulos ſecuiſſemus. Verum s veram craſſitiem campanae

in

in quouis loco S denotat, vbi imprimis notandum eſt, normalem $SR = r$ ex calculo exceſſiſſe. Caeterum videntur campanae pulſae hanc potius legem vibrationum ſequi, quam eam, quae ſectionibus horizontalibus conuenit. Quare, vt omnes annuli ad pares ſonos edendos diſponantur, neceſſe eſt, in ſingulis locis S craſſitiem $Ss = s$ quadrato radii $QS = q$ eſſe proportionalem. Hinc campanae inferne, vbi amplitudo eſt maxima, maximam craſſitiem tribui conueniet, minimam ſuperne circa Aa, vbi clauditur. Hac lege neglecta, vibrationes ſingulorum a reliquis turbabuntur, indeque ſonus, vel minus fortis, vel raucus, edetur. Interim tamen nondum ſatis conſtat, num haec lex ad conſtructionem campanarum abſolute ſit neceſſaria, quandoquidem longe alia ratione tremorem concipere poteſt, atque hic ſuppoſuimus. Deſideratur ſcilicet adhuc methodus, motum tremulum corporum formae cuiuscunque definiendi; methodi enim adhuc vſitatae tantum ad certa corporum genera ſunt reſtricta, cuiusmodi ſunt cordae, vel laminae tenuiſſimae, quare his, quae in iſta diſſertatione expoſui, plus tribui non oportet, quam per hypotheſes expreſſe ſtabilitas licet.

OBSERVATIONES QVAEDAM AD OPTICAM PERTINENTES.

Auctore

F. V. T. AEPINO.

Academiae regiae Pariſinae Commentarii Anni 1743 continent elegantiſſimam quandam, ac obſeruationibus quam maxime notabilibus opticis repletam, Celeberrimi *Buffoni* diſſertationem, de coloribus accidentalibus inſcriptam. Quanquam autem in ſcriptionis huius titulo non niſi colorum accidentalium mentio iniiciatur, tractat ipſa nihilominus praeterea adhuc duo obiecta alia. Suam enim Vir Celeberrimus ſententiam de eo oculorum morbo, vbi maculae nigrae ante oculum circumuolitare videntur, declarat; atque prorſus nouam, de coloribus, quibus vmbrae a Sole oriente aut occidente proiectae tinguntur, obſeruationem annectit. Obtulerunt ſe mihi circa omnia haec tria obiecta obſeruationes, vti videtur, Celeb. *Buffono* incognitae, dignae tamen, quae obliuioni non tradantur, quarumque proinde breuem deſcriptionem Illuſtriſſimae Academiae non ingratam futuram, coniicio.

OBSER-

OBSERVATIO I.

De coloribus accidentalibus.

Dum Sol vel horizonti propinquus, vel raris obtectus eſt nubibus, ita vt ſplendor ipſius nimius aliquantum ſit hebetatus, neque oculum laedere, ſat validam tamen in ipſum impreſſionem producere valeat, attente, oculisque non commotis, per quartam circiter minuti primi partem, adſpiciatur. Si tum oculi a Sole auertantur, impreſſio, indeque orta ſenſatio, non ſtatim euaneſcit, ſed per tria vel quatuor minuta prima, immo adhuc longius, perdurat. Aeque autem perſtat haec ſenſatio, ſiue oculi claudantur, ſiue aperiantur, aſt ſingulares ſunt, quae has ſenſationes comitantur, circumſtantiae, quas repetitis tentaminibus reduci poſſe ad leges ſequentes reperi. Namque

1) Si ſtatim, dum oculi a Sole auertuntur, claudantur, videtur macula irregulariter circularis, cuius area interna *abcd* colorem habet flauum, quodammodo ad viridem vergentem, qualis eſſe ſolet ſulphuris communis. Area autem haec flaua cingitur margine, ſiue annulo *efgh*. qui rubro colore tinctus videtur. Tab. V. Fig. 1.

2) Aperiantur tum oculi, atque coniiciantur in parietem aut tabulam dealbatam, atque fundo huic albo inhaerere videbitur macula, cum iſta, quae oculis clauſis conſpicitur, quoad magnitudinem et figuram omnino coincidens, longe autem alia ratione colorata. Namque

 3).

3) area, quae oculis clauſis videbatur flaua, apertis apparet rubea, ſeu potius colore brunneo in rubrum vergente tincta. Margo autem, qui ruber videbatur quamdiu oculi clauſi erant, in fundo albo, apertis oculis coeruleus videtur.

4) Si tum oculi rurſus claudantur, redit apparentia num. 1. ſi aperiantur illa num. 2 et 3, aſt colores non omnino iidem manent, ſed continuo magis magisque immutantur. Quodſi ad has mutationes attendatur, obſeruabitur; poſt minutum circiter primum temporis

5) oculis clauſis aream maculae videri eleganter viridem, marginemque equidem perſtitiſſe rubrum, aſt rubrum, huncce colorem ita mutatum eſſe, vt a priori num. 1 ſenſibiliter iam differat.

6) Oculis apertis, in fundo albo, aream maculae magis ad rubrum vergere, marginemque laetiori, quam antea, colore coeruleo gaudere.

7) Poſt aliud minutum primum circiter, oculis clauſis, area maculae videbitur equidem viridis adhuc, ſed magis ad coeruleum vergens; margo erit ruber, aſt color hic rurſus ab eo num. 1 et 5 diuerſus.

8) Oculis autem apertis, in fundo albo area cernetur adhuc rubra, margo coeruleus, colores autem hi cum antea obſeruatis non erunt prorſus iidem.

9) Poſt 4 tandem aut 5 minuta, oculis clauſis, area videbitur penitus coerulea, margoque eleganter rubeus;

beus; oculis autem apertis, area rubra, margo viuide coeruleus.

10) Ita perſtat ſenſatio haec per quoddam adhuc temporis ſpatium, vsquedum magis magisque debilitata prorſus tandem euaneſcat. Exiſtimandum autem non eſt, quaſi hoc interuallo colores omnino iidem permaneant, ſed potius tenendum, quanquam idem conſeruent genus, ſpeciem tamen continuo mutare.

Fateor, me occaſiones inſtituendi hoc experimentum euitaſſe potius, quam quaeſiuiſſe; frequenter enim oculos tam forti exercere impreſſione, res videtur periculo non omnino carens. Quanquam igitur tentamina non ſint ſaepius repetita, id tamen aſſerere poſſum, phaenomena leges antea expoſitas conſtanter fere ſeruare; pro omnino enim conſtantibus venditare ipſas non audeo, quoniam vna alterave vice aliam quodammodo colorum ſucceſſionem obſeruaui, quam hic deſcripſi.

Variae autem ex obſeruationibus iſtis notatu dignae deduci poſſunt concluſiones, quas paucis hic iungam.

Extra dubium poſitum eſt, radios Solis directos, a fundo oculi exceptos, in neruos agere, certamque ipſis imprimere mutationem, cuius anima noſtra conſcia eſt. Perſpicimus autem ex obſeruationibus hic deſcriptis, mutationem hanc neruis inductam, ſiue impreſſionem, non ceſſare ſimul cum ceſſante, quae ipſam produxit, lucis actione, ſed perdurare potius per ſat longum adhuc tempus, animamque eodem modo

afficere, quaſi vere adeſſet obiectum extra oculum, a quo reflexi lucis radii actionem in neruos exercerent. Quodſi hoc, prouti quam maxime euidens, ſupponamus, concludere debemus ex obſeruationibus antea expoſitis

1) Impreſſionem a radiis lucis vehementioribus excitatam, poſtquam actio ipſa ceſſauit, tranſire in impreſſionem radiorum flauorum, hanc in eam radiorum viridium, hancque tandem in eam, quam radii coerulei producere alias ſolent, id eſt, neruos ſucceſſiue, ceſſante radiorum alborum actione, in eum deuenire ſtatum, quem flaui, virides, coeruleique radii imprimere ipſis ſolent.

2) Impreſſionem a colore albo parietis aut tabulae dealbatae excitatam, compoſitam cum impreſſione, quae debetur colori flauo, viridi atque coeruleo, generare eandem impreſſionem, quam brunneus minus magisque in rubrum vergens color producere ſolet.

3) Impreſſionem ab imagine Solis in oculi fundo factam, ſe circumcirca partibus tunicae retinae proxime adiacentibus, ad quas imago ipſa non pertingit, communicare, eamque ipſis imprimere mutationem, quae alias radiis rubrum colorem producentibus debetur.

4) Impreſſionem hanc cum ea, quam generat parietis aut tabulae color albus, compoſitam, producere impreſſionem coeruleo colori debitam.

Admodum notabile hic inuenio, quod in coloribus his accidentalibus ſimiliter prorſus, vt in realibus fieri

fieri ſolet, color flauus in coeruleum tranſeat per viridem. Notiſſimum enim eſt, in poſterioris generis coloribus, flauum ab admixto ſucceſſiue coeruleo maiori maiorique copia vergere primum in viridem, fieri mox omnino viridem, tum magis magisque continuo vergere in coeruleum, inque hunc tandem penitus tranſire, ſi ſucceſſiue maior maiorque coerulei copia flauo admiſceatur.

Obſeruabunt, qui experimentum hoc repetere voluerint, adhuc rem aliam, quam non omnino reticendam iudico. Si nempe quis oculis apertis maculam in fundum album proiiciat, obſeruabit, ſubito interdum maculam euaneſcere, alternisque vicibus mox redire, mox rurſus euaneſcere. Valde dubius ſub initium haeſi de paradoxi huius phaenomeni cauſa, animaduerti autem tandem, euaneſcere ſemper tunc maculam, cum conatum exſererem, admodum exacte ipſam contemplandi; redire, ſi oculos quaſi non attendens in planum coniicerem. Difficultatem hoc aliqualem ſub initium in inſtituendo experimento creabat. Eo enim ipſo momento, quo anima ſibi proponit, ad maculam attendere, oculus ſe ſtatim, inſciis et inuitis nobis, ita diſponit, vt viſio tabulae, in quam macula proiicitur, fiat diſtincta, eodemque momento macula euaneſcit. Aliquale igitur praerequiritur ad rite inſtituendum experimentum exercitium; aſſueſacere enim ſe debet obſeruator, vt anima attendat quidem maculae, oculi vero inhibeantur, ne ſe ita diſponant, vt tabulae viſio fiat diſtincta. Concludendum autem hinc eſt, dum oculus ſe ita diſponit, vt obiectum aliquantum diſſitum

diſſitum diſtincte conſpiciat, neruos redire eum in ſtatum, quem habent, ſi non afficiuntur, priſtinum autem mox recuperare ſtatum, ſi oculus ſe denuo aliter diſponit. Aſt vereor, ne in errores incidam, ſi concluſiones deducere pergam, ſpectantes materiam, quae tenebris tamdiu inuoluta erit, quamdiu, in quonam praeciſe impreſſio lucis in neruos viſioni ſubſeruientes conſiſtat, ignoramus.

OBSERVATIO II.

De maculis nigris oculo obuolitantibus.

Notiſſimus eſt morbus, quo ante oculum, obiectum quoddam album aut lucidum contemplantem, circumuolitare videntur maculae nigrae, eandem fere producentes apparentiam, quaſi muſcae aliaue inſecta nigricantia inter obiectum ac oculum circumuolitarent. Quaeſiuerunt infirmitatis oculorum huius cauſam, antequam vera viſionis oeconomia diſtincte ſatis cognita erat, medicorum plerique, in particulis quibusdam opacis humori aqueo admixtis et innatantibus. Alii opacitatem quarundam lentis cryſtallinae partium accuſarunt, tandem vero ea praeualuit opinio, quae ex partibus quibusdam tunicae retinae ſenſatione orbatis, ſiue paralyſi affectis, morbum hunc deducit, in qua quoque opinione Celeberrimus, quem ſupra allegaui, eſt *Buffonus*.

Quan-

Quanquam autem vltima haec ſententia phaenomenis, veriſque dioptrices legibus, magis conſentiat, quam priores, neque aſſerere auſim, omnino morbum huncce ortum hinc trahere non poſſe, propria tamen experientia conuictus exiſto, dari minimum interdum caſus, vbi morbus eiusmodi ſedem ſuam in tunica retina omnino non habet.

Laboro nempe ipſe hoc morbo ex longo iam tempore, ac forſitan a primis infantiae annis; ortum enim ipſius ignoro, neque vnquam has maculas me obſeruaſſe memini, niſi ante 10 circiter annos, cum obiectum quoddam eleuatum, coelo exiſtente admodum ſereno, contemplans, primum eas obſeruarem. Ex eo tempore penitus eaedem perſtiterunt, vsque ad tempus, quo haec ſcribo, vbi adhuc numero, magnitudine et loco praeciſe tales apparent, vti apparebant, dum primum ipſas cernerem.

Opportunitatem itaque nactus, ope experientiae in veram morbi naturam inquirendi, exactius, quae ipſum comitantur, circumſtantias annotaui. Animaduerti autem ſtatim, duplicis eſſe, quae mihi apparent, generis, maculas; namque

1) ſi obiectum album, aut coelum ſerenum, contemplor, video figuras, quae referunt fila nodoſa, varia ratione ſibi implexa, ac transparentia, quaſi cernerem vaſa lymphatica, aliquoties ſibi implexa, lymphaque admodum transparente turgida.

2) Obſeruo maculas quasdam prioribus adhaerentes, rotundas atque opacas, non penitus tamen, ſed

 inſtar

inſtar ſumi aut nebulae rarioris, quodammodo transparentes.

Prioris generis macularum me vnquam reperiſſe apud alios mentionem iniectam, non recordor.

In poſterioris generis maculis peculiare obſeruaui phaenomenon, quod, qualis ſit macularum iſtarum indoles, diſtincte monſtrare videtur. Si nempe linea
Tab. V. Fig. 2. FG ſeparet corpus quoddam opacum HFGI, a transparente FGKL, quod a lumine tranſeunte viuide illuſtratur, ac oculus ita diſponatur, vt macula quaedam incidat dimidia ſui parte ADC in opacum, altera ABC in transparens corpus, pars ABC nebula quaſi obtecta apparet, pars vero ADC, quae opaca videri deberet, etiam ſenſibiliter illuminata apparet, ita vt ſpatium opacum videatur non ſeparari a transparente per lineam rectam FG, ſed quaſi terminatum eſſet per lineam FADCG, ex rectis duabus et ſemicirculo compoſitam.

Vix ſubſiſtere poſſe videtur hoc phaenomenon, cum opinione ea, quae morbum hunc pro paralytico habet affectu; ſi enim talis foret, ſpatium ADC nullatenus illuminatum apparere poſſet, ſed potius apparentia eiusmodi eſſe deberet, quaſi corpus opacum terminaretur linea FABCG, non vero, vti ſemper euenit, linea FADCG. Dioptricis itaque legibus conformiter concludendum eſt, adeſſe in oculo meo obſtaculum quoddam, poſt pupillae aperturam prope tunicam retinam ſitum, quod radios aliquos a tranſitu impedit, caeteros irregulariter diſpergit. Hoc enim ſuppoſito eius

eius quod deſcripſi phaenomeni, ſufficiens explicatio dari poterit.

Locum autem obſtaculi huius prope tunicam retinam ſtatuere eapropter debemus, quoniam, ſi vel ante pupillam, vel proxime poſt eam, in humore cryſtallino, aut alibi, haereret, dioptricis legibus conformiter, claritati quidem imaginis in oculi fundo depictae praeiudicium afferre, aſt ipſum ſui picturam in tunicam retinam proiicere non poſſet. Similiter nempe, vt in camera obſcura, in qua corpus opacum, lenti obiectiuae applicatum, aut parum ab ipſa diſtans, quosdam, ad quemuis penicillorum radioſorum pertinentes, radios intercipiens, imaginem pariete exceptam, debilitat quidem, aſt ipſum non depingitur.

Cum itaque oculus vniuerſus prope tunicam retinam humore ſic dicto vitreo repletus ſit, certi iam eſſe poſſumus, ſedem morbi non alibi, quam in corpore hoc, quaerendam eſſe. Cum autem humoris vitrei ſubſtantia contineat ſine dubio vaſa ſubtiliſſima, lympham valde diaphanam vehentia, indubium videtur, oriri maculas, de quibus hactenus diſſerui, a dilatatione vaſculorum iſtorum vehementiori, qua efficitur, vt partes craſſiores, opacae, ac lumen aliter ac lympha, quam in ſtatu naturali vehunt, refringentes, ipſa intrent; breuibus, pro varice quaſi vaſculorum lymphaticorum habendas eſſe has maculas, iudico. Non mediocriter quoque confirmor in hac ſententia per maculas primi generis ſupra deſcriptas, opacis adhaerentes; hae enim,

in quo conſiſtat morbus immediate, quaſi oculo cernendum praebent.

Non ſine difficultate, neque niſi poſt crebrius exercitium, eo perueni, vt obſeruationem, quam ſupra deſcripſi, rite inſtituere poſſem. Cum enim adſueti ſimus, vt ſi obiectum aliquod attentius contemplari volumus, etiam inſcio et invito animo, oculorum axes praeciſe eo dirigamus, idem quoque mihi accidebat. Aſt ſitae ſunt maculae in oculo meo extra oculi axin. Quodſi itaque oculum eo conuertebam, macula ſtatim fugiens locum obſeruationi commodum, limitem nempe, qui corpus opacum a transparente ſeparat, relinquebat. Difficillimam itaque eousque expertus ſum obſeruationem, vsquedum me non paruo labore ad maculam quidem attendere, aſt oculi axin eo non dirigere, aſſueſeceram.

OBSERVATIO III.

De colore vmbrarum.

Quanquam mihi iam diu cognitae fuerint Celeberrimi *Buffoni* obſeruationes, vmbras, quas Sole, vel oriente, vel occidente, proiiciunt corpora, fere ſemper eſſe coeruleas, interdum quoque virides, non tamen niſi fortuito, in ſimile phaenomenon aliud incidi. Cum enim crepuſculi tempore accenſam mecum haberem candelam, obſeruaui, vmbram, quam ſtylus, quem manibus tenebam, in chartae albae folium proiiciebat, elegantiſſime eſſe coeruleam. Rei nouitas, ac cum obſer-

obſeruatis *Buffonianis* ſimilitudo, excitauit me, ad experimentum ſaepius, ac diuerſis ſub circumſtantiis, coelo nempe mox ſereno, mox nubilo, repetendum, ac inveni, nunquam non vmbram ope candelae accenſae in chartam proiectam, tempore diluculi, aut matutini aut veſpertini, elegantiſſime coeruleum, prouti dixi, exhibere colorem.

Cum color coeruleus flauo mixtus producere ſoleat viridem, experiri volui, an idem hoc accidat in colore hoc, quo vmbrae tinctae videntur. Excepi itaque vmbram in tabula ex ſulphure communi fuſa, quam ad experimenta electrica adhibebam, ac omnino, vti exſpectaueram, vmbram viridem colorem admodum laetum exhibere obſeruaui.

Nunquam autem, inter plures quam triginta obſeruationes, inueni, vmbram a candela ardente proiectam viridem eſſe, ſed ipſam conſtanter, vti eſſe quoque ſolent a Sole oriente vel occidente proiectae, coeruleam deprehendi, niſi excepta fuerit a plano flauedine tincto. Suſpicio hinc mihi ſubnaſcitur, in Celeberrimi *Buffoni* obſeruatis leuem quandam ſubeſſe inaduertentiam, Solemque etiam nunquam niſi coeruleum vmbris conciliare colorem, ac quod Vir Celeberrimus aliquoties ipſas viderit virides, aliunde ortum non traxiſſe, niſi quod ſuperficies, quae vmbras exceperunt, fuerint non omnino albae, ſed flaueſcentes. (*)

(*) Aliter iam de hac re iudico, ex quo ipſe aliquoties vidi, vmbras a Sole occidente proiectas, et plano albo exceptas, fuiſſe

Quanquam de cauſa phaenomeni huius dubius haeream, ſuſpicor tamen inde peti eam debere, quod

1) Sol oriens ac occidens luceat radiis rubris, idemque fiat a candelis, quibus vtimur, conſuetis.

2) Quod praeter directum Solis lumen, corpora omnia illuſtrentur luce adhuc alia, quam lucem diurnam vocamus. Dum enim Solis radii incidunt in aerem, nubes, corporaque terreſtria caetera, irregulariter hinc reflectuntur, ac quaquauerſus diſtribuuntur, haec vero lux reflexa, in corpora incidens, valide ipſa illuſtrat, quanquam Solis radii directi eo non pertingant.

Tab. V. Fig. 3. Si ergo EF repraeſentet tabulam, in qua vmbra excipitur, AB corpus vmbram proiiciens, cadatque vmbra, quam efficiunt aut Solis horizonti propinqui, aut candelae radii directi in CD

1) pars tabulae EC ac DF illuſtrabitur tam a lumine diurno, quam a lumine rubeſcente, quod Solis aut candelae radii ſuppeditant.

2) Cum corpus AB intercipiat radios rubros a Sole aut candela emanantes, pars CD non illuſtratur, niſi luce diurna ſola. Conſtat itaque, eam tabulae partem, quae diurna ſolum luce illuſtratur, videri in hoc

fuiſſe ſatis eleganter virides. Erat, cum hoc obſeruarem, aer ſparſis nubibus rubicundo, aut aureo potius, colore tinctis, repletus, vnde vix dubium eſſe poteſt, flauos radios a nubis reflexos, coeruleo vmbrarum colori mixtas, virides reddidiſſe vmbras.

hoc experimento coeruleam. Nonne concludere hinc licet, lucem diurnam per ſe eſſe coeruleam? Crederem omnino, hoc ita probari per experimentum hocce, vt extra omne poſitum ſit dubium, modo concipere poſſem, quomodo fiat, vt non omne corpus album, a luce diurna ſola colluſtratum, videatur coeruleum, ſed hoc contingat ſolum, ſub iis, quas experimentum requirit, circumſtantiis.

SIMILITVDINIS EFFECTVVM VIS MAGNETICAE ET ELECTRICAE NOVVM SPECIMEN.

Auctore

F. V. T. AEPINO.

Phaenomena electrica omnia ad binas claſſes redigi poſſe, in *Tentamine* meo *Theoriae Electricitatis et Magnetismi*, monui atque probaui. Alia nempe phaenomena electrica oriuntur ab actuali fluidi electrici ex vno corpore in aliud tranſitu, alia, ab actione fluidi huius in corpore quodam haerentis vnice pendent. Ad priorem claſſem ſpectant ſcintillae, phaenomenaque electrica luminoſa omnia, in poſteriori autem comprehenduntur attractiones et repulſiones, a corporibus electrificatis exerceri ſolitae.

Phaenomenorum magneticorum et electricorum comparationem inſtituenti mihi, magno vſui fuit haec diſtinctio. Eius enim ope ſtatim diſcernere potui, quaenam phaenomena electrica ea ſint, in quae ſuſpicio cadere poteſt, quod inter magnetica, aliqua dentur, ipſis analoga. Euidens namque eſt, non niſi de phaenomenis, ad poſteriorem claſſem ſupra indicatam pertinentibus, quaeſtionem inſtitui poſſe, atque de his quidem, eſſe ipſa magneticis ſimillima, ita luculenter me probaſſe exiſtimo, vt qui de rei veritate dubitet, ad Tentamen meum *Theoriae Electricitatis et Magnetismi*, ablegandus ſolummodo mihi videatur.

Etſi

Etſi itaque ex hac parte, a me nihil deſiderandum reliquerim, obtulit tamen ſe mihi nuper phaenomenon, quod dignum videtur, vt publice eius mentio iniiciatur. Eſt enim in experimento iſto mox deſcribendo, tanta vis vtriusque ſimilitudo conſpicua, vt ex euentu ſolo, quantumuis perſpicax ſpectator, omnino diſtinguere nequeat, an, quod videt, phaenomenon pro operatione electricae, an magneticae virtutis, agnoſcere debeat.

Eſt experimentum hoc ſequens. Acus tenuis, ferrea, mollis, longitudinis pollicis vnius circiter, CD, capitulo ſphaerico, C, D, vtrinque terminata, libere ſuſpendatur, ex filo ſerico, tenui, ſicco, AC, pollices 5 ad 6 longo. Ad manus ſint, filum ferreum molle FE, craſſitiei calami anſerini, longitudinis 5 ad 6 pollicum, cuius extrema parumper ſint rotundata; praetereaque virga chalybea GH fortiter magnetica, atque tubus vitreus, aut cylinder ex ſulphure, vel cera hiſpanica conſtans, *gb*. Tab. V. Fig. 4 et 5.

Iam 1.) Magnes GH, horizontaliter detentus, admoueatur acui CD, vt acus alterutri magnetis polo verticaliter immineat, ad diſtantiam pollicis dimidii aut integri, atque in hoc ſitu magnes GH immotus detineatur. Quodſi nunc filum FE inferiori acus extremo D admoueatur, obſeruabitur, repelli hanc acus partem a filo FE. Sin autem filum FE acus extremo ſuperiori C appropinquetur, ex hac parte acus ad filum FE accedere, et ab ipſo attrahi deprehendetur. Fig. 4.

Fig. 5. Deinde 2) Cylinder vitreus, aut ſulphureus *gb*, (perinde enim eſt, quinam adhibeatur) panno laneo rite fricatus, magneti GH ſubſtituatur; eritque experimenti euentus penitus idem, qui antea obſeruabatur, tanta cum ſimilitudine, vt, niſi aliunde noueris, an magnetem, an cylindrum electricum in vſum vocauerit experimentator, ex euentu tentaminis diuinare hoc nulla prorſus ratione queas.

Phaenomeni hactenus deſcripti, quatenus magnetem ſpectat, in *Tentamine Theoriae Electr. et Magnet.* §. 158, aliquam mentionem feci, aſt non vſus ſum ibi ipſo, niſi vt probarem, ferrum magneti propinquum in magnetem conuerti, ea lege, vt extremitas, magnetis polo propinquior, oppoſitum, auerſa, homologum acquirat magnetiſmum. Prodigioſae autem, quam ſiſtit, ſimilitudinis effectuum vis electricae, et magneticae nullam mentionem inieci, ad hanc enim animum nondum aduerteram.

Superflua acturus eſſem, ſi de explicatione phaenomeni hic deſcripti, vel verbum addere vellem. Tam obuia enim haec eſt, vt, qui principia Theoriae electricae et magneticae, a me ſtabilita, nouit, ipſa plane non indigeat.

DE-

DESCRIPTIO DVPLICIS MICROSCOPII SOLARIS APPARATVS OBIECTIS OPACIS ADAPTATI.

Auctore

I. E. ZEIHERO.

Quoniam inter obiecta, praecipue opaca, micro-ſcopiorum ope inueſtiganda, multa occurrunt, quae in fruſtula minima diſſecari, hocque modo, in lentis focum commode locari non poſſunt: praeter apparatum obiectis minimis inſeruientem, adhuc alter requiritur, obiectis prius memoratis idoneus; quam ob cauſam duplicem conſtructionem pro obiectis opacis, microſcopio ſolari applicandis, excogitaui, alteram nempe obiectis minimis, valde amplificandis, alteram autem obiectis maioribus, integris, mediocre adaugendis, e. g monetis, gemmis exſculptis etc. inſeruientem. Ad poſteriorem vero finem obtinendum Fig. 1. repraeſentat capſulam ABCD, cuius extremitas AB machinamento microſcopii ſolaris conſueto inſeritur. EF eſt microſcopium, quod cochleae ope antrorſum vel retrorſum dirigi poteſt, donec ab obiecto, in diſco GH poſito, iuſto interuallo diſtet. IK eſt operculum, ſub angulo 37 ad 38° circiter cum axe *vz* poſitum, ac eo modo confectum, vt commode deſumi, ac iterum immitti poſſit. Lamina *ab*, intra fruſtula *cd*,*ef* mobilis, vni vel alteri obiecti parti collocandae inſeruit: cum eadem enim diſcus GH, capitulo L Tab. VI. Fig. 1.

inſtructus, coniunctus eſt. Ad MN operculum IK eſt exſciſſum, ne capitulum, ſi lamina *ab* vnum vel alterum verſus latus ſit mouenda, impediatur; *gb* denotat crenam, in qua diſcus GH, vna cum ſuo capitulo, ſurſum vel deorſum moueri queat. Ad *i, i*, eſt elater, diſci vacillationem impediens; diſcus inſuper, vna cum ſuo capitulo, ita eſt formatus, vt circa axem ſuum moueri, ac per conſequens obiectum facillimo negotio in ſitum iuſtum collocari poſſit.

Experientia me docuit, operculum IK ratione axis *vz* ad obiecta repraeſentanda ſitum obtinere aptiſſimum, ſi angulus, quem efficiunt, 37 ad 38 vsque gradus non ſuperet: ſub angulo enim 45, qui initio maxime mihi videbatur idoneus, obiecta nimis obliqua poſita ſunt, quo fit, vt, ſi nonnihil ſint magna, eorum margo ſemper obſcurus repraeſentetur; quoniam marginis partis puncta ad G nimis extra, puncta autem ad H nimis intra focum cadunt. Quodſi e contrario angulus minor ſit 37°, conus radiorum ſolarium, a lente collectiua concentratorum, nimium obliquus, ſecaretur a plano GH, ac obiecta non ſatis illuminarentur. Porro notandum eſt, microſcopii lentis focus non minor decem aut duodecim lineis eſſe debere, ſi vtriusque marginis obiecti in pariete delineationem claram deſideremus.

Tab. VI. Fig. 2.

Capſula obiectis opacis minutiſſimis inſeruiens amplificandis, ſequenti modo eſt conſtructa: AB eſt tubus exterior, microſcopii ſolaris machinamento immittendus; hincque

que inſeritur alter, interior CDEF, microſcopii apparatu inſtructus. Fundus EF ſpeculum concauum *mn* in medio perforatum fixum tenet, ſimulque cochlea concaua eſt praeditus, qua mediante microſcopium GH, cochlea ſolida pariter praeditum, eidem inſeri, ac antrorſum vel retrorſum moueri poteſt. Diſcus *o*, in quo obiecta ſunt affigenda, cum duabus alis *pq*, *rs* eſt coniunctus, ita, vt ſimul ſumtae vnicum conſtituant fruſtum, ad n°. 2 et 3 repraeſentatum, quod, obiectis in diſco prius affixis, in tubum transuerſim immittitur. Ad *tv* ſunt elateres, qui illam ſurſum vel deorſum dirigi poſſe quidem ſinunt, ſed vacillationem eiusdem ſimul impediunt. Interioris tubi foraminum latera trabeculae lateribus accurate adiacent, exterioris autem foramina *x*, *y*, magis ſunt aperta, ac quidem eum ob finem, vt interior tubus ſine impedimento antrorſum vel retrorſum dirigi, ac per conſequens ſpeculi focus ad diſcum vel admoueri vel ab eodem remoueri poſſit.

METHODVS EXPEDITA VELOCITATEM VENTI ABSOLVTAM DETERMINANDI.

Auctore

I. E. ZEIHERO.

Celeberrimi ac ingenioſiſſimi mathematici *Bougueril* Anemometrum, in tractatu eiusdem de naui (Traité du Navire, p. 359 ſqq.) deſcriptum, anſam mihi praebuit, modum inueniendi, quo inſtrumentum hoc, tam ſimplex, quam ingenioſum, ita componi poteſt, vt eiusdem ope celeritates venti abſolutas, pari modo ac relatiuas, metiri queamus. Prius autem, quam methodum meam expono, non incongruum iudico, commodae inſtrumenti Bougueriani ſtructurae interioris deſcriptionem praemittere ſequentem.

Tab. VII. Fig. 1. AB eſt cylindrus cauus, elaterem ſpiralem C includens, cuiusque pars anterior apertura quadrangulari *op* praeditus, poſterior autem ad *qr* capulo D inſtructus eſt. EG repraeſentat virgam, ad E vsque quadrangularem, ac ad H diſco praeditam, quippe qui, ſi virga ab actione venti repellitur, elaterem C premit. Pars virgae poſterior HG eſt rotunda, in recuſu cauitatem F, capuli D, introiens. Vſus autem huius partis, quae cauitatem F iuſto quidem implere, ſed tamen ſine difficultate eandem ingredi debet, in eo conſiſtit, vt virga aequaliter libereque moueatur. Capulum D vel protrudi, vel retrahi, poſteaque mediante

cochlea

cochlea B in ſitu ſuo firmari poteſt: id quod ei fini inſeruit, vt ſpatium *op*, *qr*, vel diminui, vel amplificari, ac conſequenter ſpiralis tam magis tendi, quam iterum relaxari poſſit. I eſt theca, extremitatem partis virgae quadrangularem excipiens, atque cochlea *s*, qua mediante firmari poteſt, inſtructa. Ad modo dictam thecam affigitur planum, in quo ventus vim ſuam exſerere debet; *n* deſignat trochleam, ſuper qua inferius virgae latus mouetur, ne iſta nimiam patiatur frictionem: quam ob cauſam, in experimentis inſtituendis, haec pars ſolo ſemper obuertitur. Ad *m t* eſt elater valde tenuis atque ſubtilis, ſtilo e ceruſſa facto ad *m* inſtructus, qui actionis venti effectibus, in virgae latere ſuperiori denotandis, inſeruit.

Ad deſignandos vero, in inſtrumento modo deſcripto, celeritatis abſolutae gradus quod attinet, facili negotio id praeſtari poteſt, ſi idem celeritate aequali ac vniformi contra aerem mouetur quietem et tranquillum, quod per motum circularem commodiſſime eſt perficiendum Ad hunc vero finem obtinendum machina requiritur peculiaris, cuius deſcriptio iam ſequitur. (*)

ABC eſt fulcimentum pyramidale, partes mouendas ſuſtinens. DE denotat ergatam perpendicularem, cui radius ſeu brachium FG, inſtrumentum anemometricum Tab. VII. Fig. 2.

(*) Hac machina vſus eſt ingenioſiſſimus Anglus Dn. *Smeaton*, occaſione experimentorum circa aquae et venti vires inſtitutorum (vid. Philoſ Tranſact. Vol. LI p. I. p 138 ſqq.) Omne id, quod ad ſcopum noſtrum non pertinet, omiſi, reliqua ad hunc finem melius accommodaui.

tricum iuſta et requiſita diſtantia ab axe gerens, eſt affixus. N eiusdem repraeſentat contrapondium. H eſt tympanum, fune circumuolutum, cuius alteram extremitatem manu trahit Dn. *Smeaton*, quo rotatio axis et brachii exoritur. Ad ſcopum vero noſtrum commodius mihi viſum eſt, eiusdem loco gyrgillum IK, quatuor vel pluribus tympanis, craſſitie diuerſa, inſtructum adaptare. Dn. *Smeaton* ad fulcimentum modo deſcriptum pendulum L M collocauit, quod ex duobus globulis conſtat metallicis, ſuper pertica lignea mobilibus, quo id eo modo ordinari poteſt, vt deſideratas ac determinatas efficiat oſcillationes. Commodiſſimam penduli diſpoſitionem iam laudatus Vir iudicat eam, vbi, reuolutione brachii vnica peracta, illud oſcillationes duas abſoluit. Quilibet ſecundum arbitrium ſuum, vel pendulo modo memorato, vel horologio vulgari, pendulo inſtructo, vti poteſt.

Ad brachium autem ſupra delineatum FG affigatur inſtrumentum Bouguerianum G, mediante confibula O, et eo quidem modo, vt eiusdem axis, ſeu linea ad planum KL perpendicularis, cum tangente arcus, quem radius DG deſcribit, ſit parallelus. Hac re peracta, machinaque in loco, vbi aer eſt tranquillus, poſita, circumagatur brachium DG, tempore deſiderato, i. e. moueatur planum G, tempore dato, per ſpatium cognitum, ac aliquot reuolutionibus peractis, obſeruetur, quousque virga fuerit intruſa, quod veſtigium a ſtilo in virgae ſuperficiei relictum indicabit. Denotetur tunc hic celeritatis abſolutae gradus in inſtrumento, poſteaque operatio repetatur.

Non

Non opus eſt, omnes celeritatum gradus machinae auxilio determinare; ſed quibusdam illius ope denotatis, reliquae interiacentes ſubdiuiſione interpolari poſſunt. Ne autem aliquid deficiat, quod experimentum accuratius reddere poſſit, Barometri nec non Thermometri altitudines non negligendae ſunt.

Breui exercitio acquirere poſſumus conſuetudinem, quartam, vel dimidiam partem reuolutionis, vel reuolutionem integram, ſpatio temporis vnius minuti ſecundi, motu admodum vniformi, efficiendi; per conſequens vnico radio DG, tympano H, ac quadruplici trochlea, gyrgillo affixa, velocitatem ſedecies commutare, inſuperque tympani H mutatione, facili negotio illius variationem multiplicare poſſumus. Modus velocitates variandi iam deſcriptus, melior mihi viſus eſt, quam radii commutatio: forſitan enim radio nimis decurtato, vortices, velocitatum determinationes aliquo modo reddentes incertas, oriri poſſint. Vnicae eiusmodi machinae auxilio innumerabilia Anemometra, velocitatum abſolutarum gradibus praedita, elaborari ac vbiuis mitti poſſe, per ſe conſtat.

Quodſi elater pro maxima celeritate in inſtrumento Bougueriano notanda nimis debilis inueniretur, tunc facili negotio huic mederi poſſumus, mediante capulo D, vlterius protruſo; aut eodem retracto, ſi contrarium contigerit. Vt linea autem, ſtili affrictu orta, melius ſit diſtinguenda, ſuperficiei virgae ſplendor pumicis ope eſt demendus.

Tab. VII. Fig. 1. Deſignatis vero omnibus in inſtrumento velocitatum gradibus, ſtilus *mi* vna cum elatere ſuo auſertur. Si quis autem iudicet, frictionem a ſtilo ortam, quamuis valde exiguam, tamen non eſſe negligendam, is valorem eius ponderibus, inſtrumenti plano impoſitis, facili negotio determinare poteſt.

Vt autem ſemper ſit in manu noſtra, elapſo quodam tempore, inſtrumentum verificare, ac diiudicare, an elater ſpiralis ab elaſticitate ſua aliquid perdiderit, nec ne? requiritur, vt ſtatim ab initio, quantum pondus plano impoſitum, hoc vel illo celeritatis gradu reſpondeat, inueniamus, iſtudque accurate denotemus; poſteaque, ſi opus nobis videtur, diſquiramus, an idem ſcalae gradus eodem pondere denuo reſpondeat, aut punctum eum denotans vlterius deſcendat, ſiue euaneſcat? id quod verum eſt indicium, ſpiralem de elaſticitate ſua aliquid amiſiſſe, cui tunc, capulum vlterius protrudendo, poſſumus mederi.

PHYSICA.

PHYSICA.

CALORIS DIMINVTI ET AVCTI PHAENOMENA NOVA PARADOXA, ET CONSIDERATIONES.

Auctore
I. A. BRAVNIO.

In phyſicis ſaepe occurrere phaenomena, quae principiis naturae et legibus repugnare videntur, adeoque admirabilitatem maximam faciunt, ſatis conſtare exiſtimo. Deteguntur eiusmodi phaenomena extraordinaria et inſolita tam obſeruationibus, quam experimentis, quamquam illud rarius, hoc frequentius contingere ſolet. Et quia eiusmodi phaenomena contra omnium opinionem eſſe videntur, recte paradoxa adpellari poſſunt et ſolent, quae mirationem faciunt, vti cauſſarum ignoratio in re noua alias ſolet. Phaenomena eiusmodi naturae varii generis eſſe poſſunt et ſolent, prouti materiae et corpora varia ſunt, in quibus obſeruationes et experimenta inſtituuntur. Nos in praeſenti cum Academia quaedam paradoxa noua communicamus, multis experimentis nobis detecta, quae ad diminutionem caloris et auctionem extraordinariam ſpectant, ſimulque alia quaedam, falſo pro talibus habita, refutata exhibemus.

Monuimus in diſſertatione noſtra de Congelatione Hydrargyri a nobis detecta p. 26. experimenta illa nobis non ſucceſſiſſe, quae frigus quoddam producere

perhibentur, ſi oleis eſſentialibus adfundatur ſpiritus vini, praecipue rectificatiſſimus. Quoniam autem viri celeberrimi, et in arte experimentandi verſatiſſimi, hoc adfirmarunt: experimenta omni cura et diligentia repetenda cenſui, vt, ſi quod vitium ſubreptionis vel a me, vel ab aliis, commiſſum eſſet, detegeretur.

Inſtitui experimenta cum multis oleis eſſentialibus puris deſtillatione paratis, quae ad manus idcirco erant, quoniam in iis cepi experimenta ad cognoſcendum, vtrum, et quae, gelaſcerent, vel frigore naturali, vel frigore artificiali, de quo alias. Olea nominatim erant Terebinthinae, Menthae, Carui, Foeniculi, Aniſi, Rutae, Serpilli et alia, etiam Succini, quae omnia in medium afferre nihil attinet, quum euentus fuerit idem.

Vt haec experimenta quam adcuratiſſime caperemus, omnem operam adhibuimus et diligentiam, vt temperies eadem omnino et conclauis et ſpiritus vini et olei eſſet, id quod in eiusmodi liquoribus non tam facile obtineri poſſe, ſaepius experientia me docuit. Nam olea et ſpiritus, quamuis, non per vnum diem ſolum, ſed per plures etiam, in eodem conclaui ſteterint; tamen vno alteroque gradu caloris differre comperi. Quin cauendum quoque eſt, ne loca conclauis, vbi experimenta inſtituuntur, commutentur. Nam differentia caloris inſignis non ſolum deprehenditur inter loca ſuperiora et inferiora conclauis, ſed in eiusdem quoque altitudinis locis diuerſis, vt in medio conclaui, ad feneſtras etc. differentia obſeruari ſolet non contemnenda,

nenda, vnius, duorum et plurium graduum. Quodſi igitur fluida ex vno loco in alterum transferantur, temperiei mutatio fiat neceſſe eſt, et experimentum vitioſum. Temperies quoque in vno eodemque loco diu eadem permanere non ſolet, hinc niſi animum attendamus ad hanc mutationem, vitium ſubreptionis irrepat oportet in experimenta. Denique liquorum quantitatis et proportionis rationem quoque in eiusmodi experimentis eſſe habendam, quis non videt? Cautiones has, qua potui adcuratione, obſeruare ſtudui in experimentis meis. Liquorum quantitas fuit vtplurimum vnius drachmae; fere enim partes aequales olei et ſpiritus vini rectificatiſſimi adhibuimus, nonnunquam maiorem copiam ſpiritus vini, duplum quoque, ſed differentiam in effectu obſeruare non potuimus. Thermometrum erat mercuriale ſcalae Delilianae, et ita comparatum, vt dimidii gradus bene diſtingui potuerint, longitudine vnius pedis; pars inferior, vt commode immergi poſſet, ad duos fere pollices tabula carebat. Praeparatione debite facta, explorato calore olei, ſpiritus vini, et loci conclauis, et eodem deprehenſo, immerſi thermometrum in oleum, calyce vitreo contentum, et adfudi ſpiritum vini rectificatiſſimum, quo facto adcuratiſſime attendi, non ſolum primis minutis, ſed etiam ad dimidiam horam, quam requirunt, et vlterius integram horam, et nullam mutationem caloris, nullam frigoris productionem obſeruare nobis licuit, temperie ſcilicet conclauis inuariata, neque in oleo terebinthinae, neque in aliis mihi hoc modo exploratis, quamdiu thermometrum immerſum manebat, ſed thermometro

ex-

extracto, confeſtim mercurius ad gradus 4 et 5 deſcendere in thermometro coepit intra pauca minuta. Hunc mercurii deſcenſum, hanc frigoris productionem in conclaui eiusdem temperiei, non a miſtione, vel ſolutione olei a ſpiritu vini pendere, ſed aliunde, facile erat ad intelligendum et iudicandum. Conieci igitur, hoc phaenomenum forſitan impoſuiſſe illis, qui eiusmodi experimenta fecerunt et deſcripſerunt primi.

Primus procul dubio fuit *Geoffroy*, Academicus Pariſienſis celeberrimus, qui eiusmodi experimenta fecit et euulgauit in Hiſtoria Academiae Pariſienſis ad annum 1727. vbi adfirmauit, omnia fere olea plantarum deſtillatione parata, miſta cum ſpiritu vini, frigus producere. Imitatus haec eſt *Muſchenbroek*, naturae ſcrutator clariſſimus, qui et alia adiecit, deſcripta in Additamento ad tentamina Experimentorum Academiae del Cimento P. II. p. 141. et ſqq. Conf. quoque *Kraſt* Academiae noſtrae quondam ſocius Cel. in Experimentis phyſicis p. 200. Sed hi Auctores ipſi de his phaenomenis dubie pronunciarunt. *Geoffroy* faſſus eſt, ſe nullam caloris mutationem, nullam frigoris productionem obſeruare potuiſſe, neque in oleo Lauendulae, neque Caryophyllorum, cum ſpiritu vini miſtis. *Muſchenbroekius* quoque negat, ſe in oleo Foeniculi cum ſpiritu vini miſto mutationis aliquid caloris obſeruaſſe. Idem contigit in oleo ſtillatitio Carui cum ſpiritu vini. In oleo Aniſi vnum gradum obſeruaſſe ſibi viſus eſt, qui facile vel a mutatione caloris externi, vel neglecta adcuratione ſupra indicata, proficiſci potuit. Quum enim phaeno-

phaenomenum non primo tempore, ſed ad minimum poſt horam dimidiam ſe conſpiciendum (ex opinione eorum) praebere debeat; interea temporis facile mutationem temperiei contingere poſſe, quis eſt, qui non videat?

Vitium igitur ſubreptionis in experimenta irrepſiſſe a Viris Celeberrimis inſtituta, ſecundum experimenta mea non dubitandum videtur, hinc paradoxum in illis euaneſcat neceſſe eſt. Valde mirandum eſt, idcirco ait *Muſchenbroekius*, olea plantarum ſtillatitia, quae adeo calida ſunt, corpori noſtro adplicata, vt et ſpiritum vini, frigus producere, atque ita expellere per aliquod temporis ſpatium ex ſeſe mutuo ignem, addit, durat haec expulſio, quamdiu motu inteſtino agitantur. Si hoc, cur demum poſt dimidiam horam et amplius motus inteſtinus incipit? Vtrum, ſi in vacuo haec inſtituantur experimenta, aliquot frigoris gradus producantur, vti contendit *Muſchenbroekius*, quamuis in aere aperto nulla adpareat mutatio caloris, definire in praeſentia non poſſumus, quoniam in vacuo hoc quidem tempore capere experimenta nobis non licuit, interim, quum eiusmodi experimenta in vacuo inſtituenda multo delicatiora ſint et difficiliora factu, quoniam circumſtantiae omnes non tam in poteſtate ſunt, vt cautiones omnes obſeruari poſſint, quam in aere: non ſine ratione probabili de iis quoque tantiſper nobis dubitare liceat, dum per experimenta noua res decidatur.

Sed quam incertum et nullum paradoxum eſt in recenſitis hactenus phaenomenis, tam certum et extra

omne dubium poſitum eſt illud paradoxum, quod in extracto thermometro ſe conſpiciendum mihi praebuit, et ſemper praebere ſolet, quod ſcilicet frigus 4, 5, et 6 graduum, quin plurium, obſeruatur maius, quam eſt loci temperies, vbi experimenta capiuntur. Haec phaenomena igitur nunc adcuratius conſideranda ſunt, quum et potiſſimum haec nobis examinanda propoſuerimus.

Quum confeſtim indicarem, productionem frigoris in extracto thermometro ex liquoribus dictis obſeruatam, non eſſe effectum miſtionis vel ſolutionis oleorum cum ſpiritu vini: ſeparatim hos liquores explorandos cenſui, quo facto et cognoui, iudicium opinionemque meam me non fefelliſſe. Cepi olea diuerſa, Terebinthinae, Foeniculi, Carui, Aniſi, Rutae, Succini, et alia multa, quibus immerſi thermometrum, quo extracto, nullam caloris mutationem ſenſibilem conſpicere potui, mercurius eundem retinebat gradum in thermometro, olea autem et conclaue, ſeu potius locus conclauis, vbi experimenta capiebantur, eandem tenebant temperiem. Hoc facto ſumſi ſpiritum vini rect. ſolum, immerſi in eum thermometrum probe antea purgatum, et obſeruaui mercurium ad 7 et 8 grad. deſcendiſſe profundius, quam ſtare debebat ſecundum leges ordinarias, conclaue enim 8° calidior erat, ſcilicet eiusdem caloris cum liquore, nempe S. v. R ante extractum thermometrum. Repetii haec experimenta innumero numero, et ſemper eundem effectum obſeruaui, ſcilicet extractum ex ſpiritu vini thermometrum monſtrabat inter 5 ad ſummum 6 minuta temporis, deſcenſum mercurii, adeoque frigus 7 et 8°, ita vt primis minutis, vt alias, quam poſterioribus

rioribus multo celerius deſcenderet. His igitur experimentis certus factus ſum, hanc frigoris productionem extraordinariam, neque eſſe effectum miſtionis ſpiritus vini et oleorum, neque oleorum tantum, ſed ſolius ſpiritus vini quacunque de cauſſa, quam indagare in ſequentibus ſtudebimus. Phaenomenum igitur hoc ſimile iudicaui illi, quod *Richmannus* quondam obſeruauit in aqua; et deſcripſit Academiae Comment. Nou. Tom. I. p. 284. et ſqq. *Richmannus* primus ſibi viſus eſt hoc phaenomenum paradoxum in aqua obſeruaſſe, ſed, ſi dicendum quod res eſt, obſeruatio huius phaenomeni eſt antiquior. Nam *Amontonſius* iam illius facit mentionem Memoriis Acad. Reg. Pariſ. ad annum 1699. et *Muſchenbroekius* ſimile quid obſeruauit, atque deſcripſit in Eſſai de Phyſique §. 962. Sed vterque obiter tantum huius phaenomeni meminerunt, neque adcurate ſatis deſcripſerunt, et expoſuerunt; ab hoc tempore vsque ad *Richmannum*, nulla, quod ſciam, huius phaenomeni in vllo libro mentio facta fuit, quamvis notatu digniſſimum illud in phyſicis eſſe nemo harum rerum peritus negare, aut dubitare queat. Non igitur mirandum eſt, hac ratione ſaepius egregia inuenta in obliuionem venire poſſe, et ſaepius ſolere, quo ipſo fiat neceſſe eſt, vt alii inuentores ſe credant, dum vetera ignorant, et bona fide ſua tanquam noua inuenta aliis proponunt, quibus venia omnino danda eſt, dum aliena ſibi non ſcientes tribuunt; quis enim omnia legere poteſt, aut legendi occaſionem habet? neutiquam autem illis, qui ſcientes aliena arrogare ſibi nefario audent.

Sed haec hactenus de iuuenti hiſtoria, reuertendum eſt ad propoſitum. Quum obſeruaui phaenomenum frigoris extraordinarii et paradoxi in aliis oriri, in aliis non; nouis experimentis in phaenomena eiusmodi inquirere operae pretium eſſe exiſtimaui. Conſpexi videlicet frigoris nihil produci, ſi ex oleis eſſentialibus extrahatur thermometrum, et quamuis nonnunquam differentia $\frac{1}{2}$ aut 1°. videretur: tamen aliunde pendere illud cognoui, dum omnia non aequaliter calebant, e. g. conclaue paullo minus, quam reliqua. Cepi igitur porro olea expreſſa, nominatim Oleum Cannabinum, Lini, Oliuarum, Amygdalarum, et alia, quibus immerſi thermometrum, ita vt cautiones ſupra indicatas quam adcuratiſſime obſeruarem, et nullam caloris mutationem, nullam frigoris productionem, in vllo dictorum oleorum conſpicere potui.

Porro ſpiritus acidos ſumſi explorandos, videlicet ſpiritum nitri et aquam fortem, ſpiritum ſalis, ſpiritum ſulphuris, et thermometrum ex hiſce extractum omnibus phaenomenon frigoris dicti non, vel parum monſtrabat, ſenſibilis mutatio caloris orta non conſpiciebatur. Probabile videbatur Oleum Vitrioli eodem modo ſe habiturum eſſe, ſed nihil minus. Nam plane contrarium accidit. Quam primum enim extraxi thermometrum, quod illi immerſum erat; animaduerti, mercurium in eo adſcendere incepiſſe, et ad 5. 6. et plures gradus caloris produxiſſe. Hoc phaenomenum, productionem ſcilicet caloris nouam aeque paradoxam, ac productionem frigoris nouam cenſendam eſſe, quis non videt? In ſolo oleo vitrioli hoc mihi eſt obſeruatum.

vatum. Nam ſpiritus vitrioli dulcis, vt alii dulcificati, 9° frigoris produxerunt. Deſcendit ſcilicet mercurius a gradu 130, qui erat conclauis, ad 139. intra 5 minuta, ad eundem gradum quoque intra dictum tempus, vt alias, deſcendit quoque mercurius in thermometro ex Liquore *de la Motte*, vel potius *Beſtuſchefii*, extracto. In aliis autem liquoribus omnibus, quos exploraui, frigus ortum vidi, hac tamen cum differentia, vt in aliis maius, in aliis minus, conſpiceretur. Explorauimus autem praeterea vina omnis generis, cereuiſias, lac bubulum et liquores ſpirituoſos, vt ſpiritum Vini gallicum, et alios viliores, et pretioſiores, vt *l'Eau de la Bergamotte*, vbi mercurius in extracto thermometro deſcendit a 129. ad 137, adeoque 8°. frigus productum, in *l'Eau de la Lavande* immerſum et extractum thermometrum monſtrauit productum frigus 6°. deſcenderat enim mercurius a 132. ad 138; in ſpiritu Vini gallico conſpiciendum ſe frigus oſtendit 7°. Nam hydrargyrus deſcenderat a 132. ad 139. intra dictum tempus 5. minutorum fere etc. Vt vno conſpectu differentia diminutionis et auctionis caloris pro diuerſitate liquorum et temporis ſpectari poſſit; potiores tanquam in tabula repraeſentabimus ſequenti modo:

1.) Olea expreſſa omnia, vt Lini, Cannabis, Nucum, Amygdalarum, Papaueris etc. produxerunt frigus - - - - - - - - -	= 0.
Nam thermometrum ex hiſce oleis extractum mutationem caloris nullam monſtrauit in conclaui aeque calenti.	.

2.) Olea plantarum eſſentialia, et alia deſtillata mutationem caloris ſenſibilem vix monſtrarunt, adeoque haberi quoque poteſt frigoris productio - - - - = 0

3.) Spiritus acidi diuerſi diuerſo ſe habuere modo.

Spiritus nitri fortior interdum ½. interdum 1°, ſaepius nil diminutionis caloris monſtrauit in therm. extracto, ita vt mutatio omnino reputari queat quoque - - - - - - - - - - - - - = 0.

De ſpiritu ſalis idem valet - - - - - = 0.

Spiritus ſulphuris frigus contra monſtrauit = 2. et 3.

Spiritus aceti - - - - - - - - - - = 4. et 5.

Acidum Citri et Acetum vini - - = 4. et 5.

Oleum vitrioli, loco diminutionis, auctionem caloris monſtrauit - - = 8. 9. et 10.

Porro ſpiritus ſalis ammoniaci frigus produxit = 4 et 5.

Spiritus Cornu cerui - - - - - - - = 4. et 5.

Spiritus vini rectificatiſſ. - - - - - = 8. et 9.

Spiritus vini gall. - - - - - - - - - = 7.

Spiritus Vitrioli dulcis - - - - - - = 9.

Liquor *de la Motte*, ſ. *Beſtuſchefii* - = 9.

L'eau de la Bergamotte - - - - - = [illegible]

L'eau de la Lavande - - - - - - = 6.

Cereuiſia ordin. - - - - - - - - - = 4. et 5.

Lac - - - - - - - - - - - - - - = 4. et 5.

Vinum gall. - - - - - - - - - - - = 5. et 6.

Miſtum ex partibus aequalibus vini et Spir. V. Gall. - - - - - - - - 7.

Aqua

Aqua pura - - - - - - - - - - - 6. et $6\frac{1}{8}$.
Solutiones ſalium per aquam, vt ſalis comm. Vitrioli, Aluminis, Nitri etc. circiter - - - - - - - - - = 6.

Ex comparatione harum differentiarum ſequentia pateſcunt:

1) In plerisque experimentis, extracto thermometro, frigus, ſeu diminutio caloris, eſt obſeruata.

2) Exceptionem facit oleum vitrioli, dum phaenomenum plane contrarium detexi, ſcilicet loco diminutionis, auctionem caloris.

3) Exceptionem porro faciunt olea tam expreſſa, quam deſtillata, quippe quae, extracto thermometro, neque diminutionem, neque auctionem monſtrant. Item ſpiritus acidi Nitri et Salis.

4) Termini inter frigus ſunt inter 1. et 9. vel ad ſummum 10. qui omnino vltimus et ſummus videtur. Idem de productione caloris ab oleo Vitr. valet. Adſcenſum mercurii in thermometro inde extracto vltra hunc terminum 10° nunquam vidi. Omnia haec experimenta facta ſunt in muſeo, calore temperato ab 128. ad 133. vnico thermometro.

Hactenus de phaenomenis, nunc ad explicationem eorum eſt veniendum. Difficiles haec phaenomena habere explicatus, nemo negabit, qui iſta adcuratius conſideret. Nam ſunt re vera paradoxa, eaque ſibi contraria. Producitur frigus, deſcendit hydrargyrus in thermometro, quum tamen, vel adſcendere, vel ſubſiſtere debeat Contra ea adſcendit mercurius, quum tamen, vel deſcendere, vel ſubſiſtere

eum

eum oporteat. Repugnant igitur legibus ordinariis phyſicis phaenomena propoſita, dum caloris diminutio et auctio oritur, vbi nulla ſecundum leges phyſicas ſtabilitas oriri debet. Eſtne igitur forſitan nonnunquam natura in operationibus ſuis ſibimet contraria, et vna eadem cauſſa contrarios effectus producere poteſt? Minime gentium. Sequitur natura leges conſtantiſſimas, ſibi ſemper conſentit, quamuis interdum repugnantia inter operationes iſtius adeſſe videatur. Repugnantia igitur tantum adparens etiam in phaenomenis noſtris adeſſe debet, quam in ſequentibus detegere ſtudebimus.

Ante omnia autem indagandum eſt, vtrum haec frigoris et caloris productio extraordinaria ſit vera et realis, an adparens? Quodſi enim cognitum fuerit, in noſtris phaenomenis veram hydrargyri contractionem et dilatationem adeſſe; de vera diminutione caloris et auctione dubitari nequit. Sin deſcenſus et adſcenſus mercurii aliunde, ac a contractione et dilatatione illius, pendet; certum eſt, eiusmodi frigus et calorem eſſe tantum adparentem. Nam fieri poteſt, et ſolet, vt dilatatio, vel expanſio, ſubito in vitro oriatur per calorem externum, antequam ipſe mercurius in thermometro ab iſto calore affici et dilatari queat, quo caſu non poteſt non deſcenſus mercurii ſequi, et frigus paradoxum, ſed tantum adparens. Luculentiſſimum eiusmodi frigoris adparentis producti exemplum praebet illud experimentum, quo, interueniente ipſo igne, aqua frigidior, ſed tantum adparenter, reddi poteſt. Scilicet ſi in phiolam aqua plenam thermometrum inſeritur, et phiola cum thermometro vaſi alii aqua pleno

no immittitur, et, eadem in phiolae aqua et vaſis eam continentis, temperie orta, iniicitur ſubitò copia prunarum: obſeruabitur hydrargyrum ſubito in thermometro deſcendere, quod ſatis paradoxum videtur, quum á calore carbonum candentium iniectorum mercurius non deſcendere, ſed adſcendere debeat, adeoque calorem, non frigus monſtrare. Sed hoc frigus eſt tantum adparens, non verum, non reale, pendet enim non a contractione mercurii in thermometro contento, ſed a dilatatione vitri mercurium continentis ſubita, antequam mercurius a calore affici et dilatari poteſt; nam communicato calore ſtatim mercurius adſcendere incipit.

Pari modo calor adparens oriri poteſt à ſubita vitri mercurium continentis contractione, dum, vt hoc potiſſimum vtamur, thermometrum ex aqua feruente et bulliente ſubito in loco frigidiore extrahitur. Adſcendit ſubito in extracto thermometro mercurius, ſeu ſaltus ſubitus oritur, quo facto ſtatim, vt debet, rurſum deſcendere incipit.

Eſtne igitur forſitan in noſtris phaenomenis talis caloris diminutio et auctio a dilatatione et contractione vitri thermometrici ſolum pendens, adeoque frigus et calor tantum adparens? De frigore, ſiue diminutione caloris, primum videamus, dein de calore, qui in thermometro ex oleo vitrioli extracto oritur. Si animum attendamus ad circumſtantias, ſub quibus deſcenſus mercurii contingere ſolet; facile conſpicietur, hunc mercurii deſcenſum, hanc caloris diminutionem, ſeu frigoris productionem, adparentem eſſe non poſſe,

 ſed

ſed veram et realem. Nam deſcendit mercurius, ſi aer ambiens vel aequalis caloris eſt cum liquore, vel paullo maioris.

Sed haec exigua temperiei differentia, vel plane nulla, quomodo dilatationem vitri thermometrici ſolum efficere poteſt? fieri hoc nullo modo poteſt. Idem cenſendum erit de phaenomeno contrario, de auctione caloris in extracto ex oleo vitrioli thermometro, ſi aer ambiens eſt vel aequalis caloris, vel paullo frigidior. Nulla vitri thermometrici contractio, adeoque caloris productio adparens cogitari et hic poteſt. Quid igitur relinquitur? nil niſi hoc, veram mercurii ipſius contractionem, et dilatationem fieri, adeoque veram caloris diminutionem et auctionem in phaenomenis et experimentis noſtris.

Sed vnde haec caloris diminutio, ſeu frigus verum, oriri poteſt (hoc enim primum conſiderabimus) quum aer ambiens ſit vel aequalis, vel paullo maioris caloris? Hic duo potiſſimum modi cogitari poſſunt. Vel enim hoc frigus a materia quadam frigefaciente, in aere ambiente verſante, vel a reſolutione fluidi adhaerentis bulbo thermometri in vapores, tanquam ſolutione frigida, pendeat neceſſe eſt. Prius placuit quondam reſpectu aquae *Richmanno* in tentamine explicationis huius phaenomeni. Verum eſt, aerem atmoſphaericum ambientem variis particularum generibus, oleoſis, ſalinis, ſpirituoſis, etc. abundare, ex quibus forſitan ſalina principia, fluido bulbo adhaerenti vnita,

ad

ad breue tempus frigus producere queant. At enim vero exigua adhaerentis liquoris copia frigus 6. 7. 9. non videtur producere poſſe, vnita cum principio ſalino, deinde in aqua alia quoque aperta, hoc frigus oriri debebat, quod tamen fieri non ſolet. Tacemus alia, hanc ſententiam minus probabilem reddentia, inprimis, quod phaenomenis minus ſatisfacere videtur, quam altera, quae omnino phaenomenis ita conueniens eſt, vt eorum reſolutio inde omnino petenda videatur. A ſiccatione bulbi thermometri deſcenſus mercurii, adeoque productio frigoris, ſiue diminutio caloris, pendere, inde patere videtur, quod phaenomenum cum initio exſiccationis incipit, et cum fine illius deſinit. Quid vero ſiccatio aliud eſt, niſi fluidi vel liquoris ſolutio in vapores? et prouti haec reſolutio celerius tardiusue pro natura liquorum fieri ſolet, ita ſiccatio rerum humidarum et madefactarum celerior tardiorque ſuccedere cernitur. Sua ſponte hinc fluere videtur explicatio phaenomenorum oleorum, tam expreſſorum, quam deſtillatorum, quae omnia nihil aut parum frigoris oſtendunt. Ratio enim omnino inde repetenda eſt, quoniam horum liquorum reſolutio in vapores, vel plane nulla, vel admodum exigua eſt, niſi eſt violenta. Nam et propriis experimentis edocti ſumus, olea expreſſa nihil; ſtillatitia autem pleraque parum aut nihil omnino euaporare. Quid igitur mirandum, in his nullum produci frigus in aere ambiente, quum olei adhaerentis vel nulla vel vix ſenſibilis fiat reſolutio in vapores, et ſiccatio. Semper euaporatio naturalis,

 quae

quae fit in temperie temperata, a violenta ope ignis et caloris maioris eſt diſtinguenda, illa, non haec, hic intelligitur.

Quum plerique reliqui liquores, in quibus capta ſint experimenta, talis ſint naturae, vt reſolui in vavapores facile poſſint et ſoleant; frigus quoque in aere aperto ambiente oriatur neceſſe eſt. Differentia diminutionis caloris maioris et minoris igitur deducenda erit a perfectiore et minus perfecta reſolutione liquoris bulbo adhaerentis. Hinc ſpiritus vini maius videmus frigus producere, quam reliquos liquores, quod facile et p'ene in vapores reſolui ſoleant. Interim, quamuis liquores ſpirituoſi ocyus quoque reſoluuntur in vapores, tamen haec celeritas in hac ſiccatione tam breuis temporis, non fit ſenſibilis, quocirca quoque tempus ſiccationis fere aequale, ſcilicet 5 minutorum, reperitur, licet et pro ratione tempeſtatis differentiae quaedam, ſed exiguae, occurrere ſoleant; pront ſcilicet aer humidior et ſiccior eſt, ita ſiccatio tardius citiusque euenit, et minus maiusque frigus oriatur neceſſe eſt in vno eodemque liquore, diuerſo tempore. Superfluum ducimus hanc theoriam ad ſingula experimenta hic accommodare, quum ſua ſponte phaenomena conſideranti pateat; potius hanc legem generalem inde deducemus. Quidquid liquoris in aere ambiente facile ſiccari, adeoque in vapores reſolui poteſt, id verum frigus producere ſolet, et eo maius, quo perfectior liquoris eſt reſolutio, niſi impedimentum obſtet, de quo in ſequenti-

quentibus agemus. Solent in aulis, tempeſtate calidiore, fontes ſalientes adhibere ad refrigeranda conclauia, maior refrigeratio igitur obtineretur ſine dubio, ſi liquores ſpirituoſi adhiberentur, niſi nimis eſſet pretioſum. Homines alii humectare tantum ſolent pauimenta refrigerationis cauſſa. Vnde igitur refrigeratio, quae hiſce modis in vita communi obtinetur, niſi potiſſimum a reſolutione aquae in vapores. Hinc lintea madefacta refrigerare aquam aliosque liquores proxime eos ambientia, mirandum non eſt. Eſt igitur ſiccatio rerum humidarum et madefactarum, adeoque reſolutio aquae aliorumque liquorum in vapores, ad ſolutiones frigidas referenda, quales varii generis dari ſatis conſtat, quas idcirco hic in medium afferre non attinet, vt ſolutio ſalis in aqua eſt. etc. Sed quomodo haec theoria cum phaenomenis, quae in oleo vitrioli, et aliis quibusdam ſpiritibus acidis, ſpiritu Nitri et Salis, obſeruantur, conciliari poteſt? An hic nulla in vapores reſolutio eſt? Et tamen, vel nullum produci frigus vidimus, vel e contrario calorem inſignem, veluti in oleo vitrioli obſeruauimus. Siccatur bulbus thermometri oleo vitrioli immerſus, et inde extractus fere eodem tempore, quo reliqui liquores, qui frigus producere ſolent. Nam adſcendit mercurius etiam intra quinque et ſex minuta, vti eodem fere tempore deſcendere ſolet in liquoribus dictis. Quodſi igitur extrinſecus ex aere ambiente nihil accederet, quod deſcenſum impediret non ſolum, ſed e contrario adſcenſum produceret, fore exiſtimamus, vt aeque in oleo vitrioli, extracto thermometro, hydrargyrus de-

 ſcende-

ſcenderet in aere, ac in reliquis liquoribus, vt in ſpiritu vini etc. Sed quidnam ex aere atmoſphaerico, variis partibus heterogeneis conſtante, accedere poteſt, et cur illud prae caeteris? Oleum vitrioli imbibere humores et attrahere, experientia ſatis docuit; hinc loco hygrometri adhiberi poſſe hoc oleum multi aſſerere non dubitarunt; quod quidem recte fieri poſſe omnino cenſendum eſſet, ſi modo humores aeque dimitteret ac adſumeret. Dubitandum igitur non videtur, humores, vapores aqueos ex aere atmoſphaerico, ad bulbum thermometri oleo vitrioli humectatum accedere. Sed poſſuntne etiam particulae aqueae ex aere atmoſphaerico attractae calorem producere?

Oſtendimus experimentis multis in diſſertatione noſtra de congelatione mercurii, oleum vitrioli omnium liquorum, qui aquam calefacere ſolent, maxime hunc effectum praeſtare, et repetiimus hoc experimentum nunc duplici modo. Primum particulas aqueas inſtillauimus in oleum vitrioli, et continuo obſeruauimus calorem productum, maiorem minoremue, pro diuerſa guttularum copia inſtillatarum. Deinde linteum tantum aqua humectauimus, et bulbo thermometri admouimus, ita, vt vix attingeret bulbum oleo vitrioli humectatum, et confeſtim quoque mercurius adſcendere coepit, et quum propius admoueremus, adſcendere perrexit ad 100°. et amplius, quin hinc inde partes lintei, vti igne ſolet aperto, ſunt combuſtae. Cauſſa igitur idonea,

et ratio adeſt, cur oleum vitrioli potius calorem, quam frigus, in aere, extracto inde thermometro, producere, adeoque phaenomenum contrarium poſſit et debeat.

Phaenomeno hoc explicato, reliquorum, quae exceptionem adhuc faciunt, rationem facile reddi poſſe arbitramur, ſcilicet cur ſpiritus nitri fortior, et ſalis, parum aut nihil omnino frigoris producere ſoleant, quum tamen aeque facile, ac illi, qui frigus producant, quin facilius in vapores reſolui ſolent. Spiritum nitri et ſpiritum ſalis ad eos pertinere quoque liquores, qui aquae mixti calorem producant, conſtat. Hinc, eandem et hic rationem obtinere, adfirmare non dubitamus, quae in oleo vitrioli. Scilicet exiſtimamus, et hic attractos ex aere atmoſphaerico humores in cauſſa eſſe, cur mercurius non deſcendat. Minor ſcilicet in ſpiritu nitri et ſpiritu ſalis attractio humorum eſt, quam in oleo vitrioli. Ex quo efficitur, vt mercurius non, vti in oleo vitrioli, adſcendere, ſed tantum gradum ſiſtere poſſit et debeat. A maiore vel minore copia acidi contenti hoc pendere, ex experimentis euidens eſſe videtur. Nam ex ſpiritu nitri fumante mercurius in thermometro inde extracto plane non deprimitur, ex aqua forti ſaepius vnum gradum, ex ſpiritu nitri 3°. et 4°. An hi liquores aliter inter ſe differunt, niſi copia acidi contenti? Addi quidem alia maioris illuſtrationis et confirmationis cauſſa poſſent, ſpeciatim quae ad vſum in refrigerandis corporibus ſpectant, quae

vero

vero, vt nunc video, a *Hanouio* V. C. fuſius iſta ſunt expoſita, quemque in theoria ratione frigoris generali quoque mecum conſentire cognoſco. Sed quia haec in praeſenti ſufficere pro ſcopo noſtro poſſe exiſtimamus, et ne longiores ſimus, filum abrumpendum hic putamus.

PISCIVM

PISCIVM RARIORVM E MVS. PETROP. EXCEPTORVM DESCRIPTIONES CONTINVATAE.

Auctore

I. T. KOELREVTER.

X.

Lophius, oſſiculo frontis tentaculis carnoſis, centralibus, terminato.

DESCRIPTIO.

Corpus maxima ex parte ventricoſum, craſſum, dorſum verſus et circa caudam cathetoplateum. Tab. VIII. Fig. 1. Color abdominis albicans, immaculatus, laterum vero, capitis, dorſi, caudae, omniumque fere pinnarum e luteo albicans, lituris latiuſculis, irregularibus, hinc et inde confluentibus, maculisque, e bruno ferrugineis variegatus. Liturarum iſtarum ſex ſeptemue ab oculo, tanquam ex communi centro, deorſum ac latera verſus procedunt radiorum flexuoſorum ſub forma; reliquae, in lateribus ac dorſo conſpiciendae, maxima ex parte transuerſam et obliquum nonnihil ſequuntur ductum. Liturae pinnarum, caeteris longe ſaturiores, ſiue obſcuriores, macularum potius nomen merentur: oblongae enim partim, partim ſubrotundae, plus minusue regulares nec raro caudatae, ſunt. His vtraque pinnae

dorſi, ani et caudae facies picta eſt, in pinnis ventralibus vero ac pectoralibus poſticam tantum occupant, antica facie immaculata fere ac albicante. Squamarum loco, quibus penitus caret piſcis, verrucis ſcabris, maioribus ac rarioribus, inſtructa, papilliſque denticulatis, biſetis, minoribus, innumeris obſita eſt cutis; hinc ſcabra et ad tactum aſpera omnis corporis ſuperficies, excepta areola iſta modice concaua, inter corniculi capitis et dorſualis baſin, plane laeui, papillis verrucisue omnino deſtituta. Illarum, (ſc. verrucarum) maxima ſeries, lineam quaſi longitudinalem efformans, a fronte incipit arcuato ſupra oculum ductu, inde iuxta corniculum dorſuale flexu illi contrario pergit, ductuque denuo arcuato, longo, inter dorſum et latus ventricoſum verſus ani pinnam deſcendit, toto fere itinere dorſo, quam abdomini, longe proprior. Numerus harum verrucarum ad 29–30 accedit, earumque magnitudo, a primis ad vltimas, ſenſim decreſcit. Extra harum ſeriem quatuor vel quinque inter oculum et corniculi dorſualis baſin occurrunt. Nonnullae etiam circa maxillarum ambitum et in lateribus capitis conſpiciendae, quarum hae tres quatuorue ſeries minores, arcuatas, aequali fere ſpatio a ſe inuicem remotas efformant, arcus conuexitate abdomen, concauitate oculum reſpiciente. Singula autem omnium harum verrucarum, microſcopii ope viſa, e duabus laminis ſcabris, denticulatis et oblique conniuentibus eſt conſtructa. Papillarum ſupra memoratarum ſingula duobus denticulis ſiue ſetis, rectis, auctis et diuergentibus inſtructa eſt. Quae caput, dorſum et latera occupant, breuiſſimo licet,

licet, longiori tamen interuallo a ſe inuicem diſtant, maioribusque et rigidioribus praeditae ſunt denticulis, quam eae, quae in immaculata, albicante corporis parte, ſc. in pectore et abdomine, occurrunt. Praeter has verrucas ac papillas barbulae, ſiue cirri cuticuloſi, a baſi apices verſus ſenſim attenuati ac flexiles, etiam notandi, qui circa os, caput, dorſum, latera, dorſi pinnam, poſticamque pinnarum pectoralium faciem hinc et inde obuiam veniunt, quorumque maximi dimidium pollicem, minimi lineam circiter, exaequant, in piſce, liquori immerſo, longe melius, quam extra illum, conſpiciendi. Caput cathetoplateum, corpori quaſi immerſum, eodemque anguſtius. Os clauſum ſitu perpendiculare, ſemicirculare ambitu ac ſimum. Rictus oris ſat amplus. Maxillae, ore clauſo, aequales; aperto autem eodem, quantum licet, inferior recta antrorſum et horizontaliter producta, prae ſuperiore valde eminet. Vtraque maxilla, vt in Gadis et Vranoſcopis lamina inſtructa eſt oſſea, in medietate latiore ſepto diuiſa, denticulis ſubcylindricis, tenuibus, nec admodum acutis, plurimis, retrorſum ſpectantibus, introrſumque etiam mobilibus, obſita. Lamina maxillae inferioris, reſpectu ambitus, magis elliptica, quam ſemicircularis. Margo vtriusque laminae interior membrana lata, introrſum expanſa, terminatus. Harum inferiori linguae extremitas reſpondet, lata, obtuſa, albicans et cartilaginea, ſuperiori vero vtrinque laminae oſſeae, denticulatae, duae, valde ellipticae, ſibique contiguae. Omnes quatuor in palato anteriori ſemicirculariter diſtributae. Dorſum linguae griſeum, ab extremitate ſinu diſtinctum, tuberculis-

culisque ſuperficiariis, albis praeditum. Pone hoc laminae offeae, denticulatae, duae, ex oblongo acuminatae, latiori extremo ſibi contiguae, in arcum diſpoſitae, illis, quae palatum anterius occupant, maiores, ſituque paulo poſteriores. Omnia harum laminarum genera ſubſtantia et denticulorum forma inter ſe conveniunt. Denique in palato poſteriori vtrinque puluilli duo, offei, ſubrotundi, conuexi, denticulati, protuberantes, et ad baſin cute laxius obueſtiti, quorum anterior poſteriore minor. Infra hos faucis amplioris latera carnoſa, et extra haec arcus tres offei, branchias ſuſtinentes, in conſpectum veniunt introſpicienti. Foramen vtrinque ſub pinnae pectoralis baſi, ad branchias patens, vnicum, ſubrotundum, diametri $1\frac{1}{2}$ lin. Ad hoc conſtituendum ex infimo modo dictae pinnae margine productus eſt tubulus cuticuloſus, $1\frac{1}{2}$ lin. longus, retrorſum ſpectans, plus quam dimidio ipſius ambitu, eoque interiori, corpori adnatus, exteriori liber. Oculi, reſpectu corporis, parui, in ſummis capitis lateribus perpendiculariter fere ſiti, ac cuticula capitis pellucida obtecti. Nares nullae. Medio ac extremo maxillae ſuperioris margini innititur oſſiculum compreſſum, laeue, ſuperius latius, baſin verſus tenuius, antrorſum incuruatum, inque corniculum contiguum reclinatum. Extremitas huius oſciculi inferior, ſiue baſis, condyloidea, cute craſſiore, ſcabra obducta, maxima ambitus parte libera, facie poſtica corniculi contigui baſi, articulo mediante, iuncta, cuius ope reponi, erigi, et ad angulum cum maxilla obtuſum vsque antrorſum moueri poteſt; ſuperior autem tentaculis centralibus

tralibus octo, rubellis, carnoſis, e baſi craſſiore verſus apicem ſenſim attenuatis terminata eſt; hinc polypum apprime refert hoc inſtrumentum, oſſiculo ſc. cum ventre, ſiue corpore, tentaculis cum polypi pedibus comparatis. Tentacula iſta et longitudine et craſſitie parum inter ſe diuerſa. Corniculum mediae fronti adnatum, reclinatum, oſſiculo, tentacula ſuſtinenti, contiguum, eodemque craſſius, denticulis biſetis vndique ſcabrum, ſubcylindricum, obtuſum, dorſum verſus modice incuruatum, maculoſum, et extremitatem verſus cirris haud paucis, cuticuloſis, ſatis longis inſtructum. Ad initium dorſi, e regione, pinnis pectoralibus oppoſita, aliud corniculum, priori per omnia ſimile. Horum vtrumque poſtico, eoque inferiore, margine, cuti, e corpore productae ac lituris pictae, late cohaeret, quae, freni inſtar, nimiam eorum erectionem valde coercet. Corniculi capitis extremitas poſticum areolae concauae, glabrae, marginem tantum lambit, nec corniculi dorſualis baſin attingit. Pone hoc ſuperficiarium ſinum exhibet dorſum, hinc vero ſuam verſus pinnam denuo aſcendit coarctatum. Cauda, reſpectu ad inſignem corporis molem habito, breuis, anguſta, et vtrinque valde compreſſa. Inter anum et pinnae ani baſin ſinus, ſiue carina concaua. Anus ipſe, 3 lin. ante pinnam modo dictam, patulus, leuiterque prominens. Pinnae omnes, ſi caudae pinnam excipias, ad baſin carnoſae, et tunica ſatis craſſa obveſtitae. Pinna dorſi vnica, radiorum duodecim, baſin prae omnibus reliquis pinnis latiſſimam habet, papillis denticulatis, biſetis, vtrinque obſita, excepta

membrana tenuiore, radios ſcabros, vt in caeteris pinnis, connectente. Radii hi ſimplices omnes, excepto penultimo, bipartito, a primo ad ſextum ex ordine longiores, a ſexto ad duodecimum vero ex ordine breuiores. Pinnae ventrales duae, ſibi mutuo vicinae, paruulae, pectoralibus ſitu longe anteriores, pauloque inferiores, in regione ori aperto circiter oppoſita, radiorum quinque, carnoſorum, quorum quatuor ſuperiores ſimplices, infimus bipartitus, intermediique lateralibus, et praeſertim ſupremo, parum longiores. Margo horum radiorum poſticus denticulis minimis rarioribus obſitus; reliqua pinnarum omnia glabra. Pinnae pectorales, ſiue potius laterales, duae, ventralibus multo maiores, inter latera et abdomen ſitae, directe fere infra corniculi dorſualis baſin, perpendiculares, longo latoque a ſe inuicem abdominis interuallo diſtant, radiisque vndecim ſunt inſtructae, carnoſis, mollibus, ſimplicibus, vtrinque ab extimo ad intimum ex ordine longioribus. Facies harum pinnarum poſtica omnis denticulis biſetis obſita, antica maxima ex parte, eaque exteriore, glabra. Pinna ani prope caudam, extremae pinnae dorſualis parti directe oppoſita, vnica, ab vtraque ſuperficie ſcabra, pectoralibus paulo minor, radiorum ſeptem, bipartitorum, vtrinque ab extimo ad intimum ex ordine longiorum. Pinna caudae, vt videtur, indiuiſa, e radiis nouem, ſcabris, bipartitis, vtrinque ab extimo ad intimum ex ordine longioribus, conſtructa.

Menſura.

Menſura.

	Poll. Pariſ.	Lin.
Longitudo tota, ſc. ab oris extremo ad apices radiorum pinnae caudae longiorum - -	5	5
A maxillae ſuperioris medio ad oculi medium -	—	7
- - - - - - - - - - - - - - - oſſiculi capitis baſin - - -	—	2
- - - - - - - - - - - - - - - corniculi dorſualis baſin - -	1	
- - - - - - - - - - - - - - - primi pinnae dorſualis radii baſin	2	2
Ab angulo oris ad ſupremi pinnae pectoralis radii baſin - -	1	8
- - - - - - - - - - - - - - - ventralis radii baſin - -	1	3
Longitudo oſſiculi capitis - - - - - - - - -	—	6
- - - - tentaculorum eiusdem oſſiculi longiorum - - - - - - - - - - -	—	7
- - - - corniculi capitis - - - - - - - -	—	6½
- - - - - - - - - - dorſualis - - - - - - - -	—	8½
- - - - pinnarum pectoralium - - - - - -	—	11
- - - - - - - - - - ventralium - - - - - -	—	4½
- - - - pinnae dorſi ad baſin - - - - - -	1	7
- - - - - - - - - ani - - - - - - - - - - -	—	8
- - - - - - - - - caudae - - - - - - - - - -	1	1
Diameter pupillae - - - - - - - - - - - - - -	—	⅔
Amplitudo rictus oris transuerſa - - - - - -	—	10
Diſtantia inter oculos - - - - - - - - - - - -	—	8

Diſtan-

	Poll.	Lin. pariſ.
Diſtantia inter membranae corniculi dorſualis et primi pinnae dorſi radii baſin - - - -	—	8
- - - - infimorum pinnarum ventralium radiorum baſin - - - - - - - - -	—	7
- - - - anum et pinnae ani initium - - -	—	3
- - - - pinnam ani et pinnam caudae - -	—	$5\frac{1}{2}$
Latitudo horizontalis per oculorum axes - - -	1	4
- - - - - - - - - - pinnarum pectoralium baſin - - - - -	2	6
- - - - - - - - - - pinnae ani initium -	—	7
- - - - - - - - - - - - - - - dorſi finem -	—	$3\frac{1}{2}$
Latitudo perpendicularis per oculum - - - -	2	9
- - - - - - - - - - - - pinnam pectoralem	2	10
- - - - - - - - - - - - initium pinnae dorſi	2	6
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - ani -	1	8
- - - - - - - - - - - - - pinnae ani dorſique finem - - - -	—	$7\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - - - - pinnae caudae initium - - - -	—	$6\frac{1}{2}$

* * *

XI.

Mola aculeata, limbo abdominis producto, attenuato, carnoſo.

DESCRIPTIO.

Corpus cathetoplateum, ac circumſcriptione ouatum: extremitate ſuperiore, dorſo nempe, latiore, inferiore, ſine abdomine, paulo anguſtiore, illaque plus, hac minus elliptica; hinc, quum latitudo eius longitudinem ſuperet, non integrum piſcem, ſed caput tantum quoddam detruncatum eſſe, facile ſibi perſuaderet, qui obiter illud inſpexerit. Facies piſcis antica, inter os atque dorſi initium, depreſſa, poſtica, inter pinnam dorſualem ac pinnam ani, decliuis valde, et, in linea recta ac perpendiculari fere, detruncata quaſi, ita, vt hac plane excludatur cauda, quam re vera nullam habet piſcis. (In alio indiuiduo, tria iſta, quae poſſidemus, minora magnitudine longe ſuperante, ſc. 1. poll. 10. lin. lato, ac 1. poll. 6. lin. longo, poſtica corporis facies limbo aucta eſt anguſto, carnoſo, ad marginem crenis acutis inciſo, quarum apices tenuiſſimis aliquot filamentis inſtructi ſunt.) Latera corporis ſubconuexa. Squamae nullae, ſed cutis papillata et aculeata. Papillae per vniuerſam corporis ſuperficiem diſperſae, minimae, innumerae, ſubrotundae, ſtriatae, hisque interſtratae, hinc et inde nonnullae aliae maiores, magisque prominentes. Color, in ſpiritu vini ſine dubio valde mutatus, dorſum verſus in fuſcum, abdomen verſus in albicantem vergit. Aculei in toto corpore circiter viginti ſex,

Tab. VIII. Fig. 2.

Fig. 3.

(variant enim numero et in diuerſis indiuiduis, et in vno eodemque, ſcil. reſpectu huius vel illius lateris) magnitudinis diuerſae, coloris bruni, e lata fixaque baſi ſubito in acutum apicem terminati, ſtriiſque ab imo ad ſummum longitudinalibus exarati. Horum vnus in ima fronte inter oculos, paruus; duo vtrinque ad ſuperiorem orbitae marginem, mediae magnitudinis; tres in contractiore ac crenato dorſi margine, quorum anterior paruus, intermedius mediae magnitudinis, poſterior maximus; ad latera dorſi duo, quorum poſticus maximus; porro quinque alii vtrinque, inter dorſum et abdomen, in recta fere ac longitudinali ſerie diſpoſiti, variae magnitudinis; infra hos minorum vnus alterue; denique in extremo limbi abdominis attenuati margine tres, ſatis validi, quorum intermedius antico paulo propior, quam poſtico. Caput ab ipſo corpore minus diſtinctum, eidemque penitus quaſi immerſum; hinc totum piſcem caput eſſe, facile dixeris. Verticis et frontis regio planiuſcula; ambitus autem circa maxillam ſuperiorem conuexus. Os paruulum, horizontale, perparum prominens, roſtratum potius quam dentatum dicendum: vtraque enim maxilla ſolida nudaque lamina eſt, ſubſtantiae oſſeae, exterius conuexa, interius concaua, marginibusque ſecantibus praedita. Maxilla ſuperior, clauſo ore, ſuper inferiorem obtuſam deflexa, adunca. Labia oris nulla. Narium foramina vtrinque duo, contigua, in antico orbitae margine ſita. Oculi, reſpectu ad integri piſcis magnitudinem habito, magni, perpendiculares, tenui cutis communis propagine obtecti: iridibus argenteis.

Rima

Rima vtrinque vnica, ſemilunaris, perpendicularis, ſub membrana, retrorſum expanſa ad branchias patet, proxime ante pinnae pectoralis baſin. Margo totius abdominis, ab iugulo ad anum vsque, limbo ſemilunari, producto, craſſiuſculo, papillato, ac ſubſtantia cum pinna ſic dicta adipoſa Truttarum fere conueniente, auctus eſt. Extremus huius limbi ac dorſi margo in piſce minore, inter aculeos, glaber, in maiore vero denticulatus. Linea longitudinalis nulla. Anus inter limbi mox dicti finem et pinnam ani huic proximam, Pinnae tantum quatuor, duae nempe pectorales, vnica dorſi, et ani vna, diſpoſitae ita, vt, linea recta ab vna ad alteram ducta, aream vtrinque includant triangularem. Pinna pectoralis in medio fere corpore, ori directe oppoſita, baſi oblique deorſum ac retrorſum ſpectans, radiorum tredecim, a primo ad quartum ex ordine longiorum, et ab hoc ad vltimum ex ordine ſenſim breuiorum. Pinna dorſualis in marginis corporis poſtici ſummitate oblique ſita, proxime ad tertium dorſi aculeum, radiorum ad minimum quindecim, quorum intermedii lateralibus longiores ac filiformes. Pinna ani, dorſuali ſimilis, eidemque directe ſubiacens, ſitu obliquo in marginis corporis poſtici imo, radiorum ad minimum ſedecim, intermediis longioribus filiformibus. Pinna caudae, vt ipſa cauda, nulla.

Menſura.

	Lin. Parſ.
Longitudo tota, ſc. ab oris extremo ad poſticum corporis marginem — — — — — — — — —	$7\frac{1}{4}$

	Lin.
Ab adunco maxillae ſuperioris apice ad oculi medium	$2\frac{1}{3}$
— — — — — — — — — — — — — — — pinnae pector. baſin —	4
— — — — — — — — — — — — — — — pinnae dorſualis baſin —	7
— — — — — — — — — — — — — — — pinnae ani baſin —	7
Diameter oculi — — — — — — — — — — — — — —	2
— — — pupillae — — — — — — — — — — — — —	$\frac{1}{2}$
Ab vno oris angulo ad alterum — — — — — —	1
Diſtantia inter anticum oculorum marginem — —	$1\frac{2}{3}$
— — — — — — vltimi pinnae dorſ. et pinnae ani radii baſin — — — — — — — — — — — — —	$2\frac{2}{3}$
Latitudo horizontalis per dorſi medium — — —	$3\frac{1}{2}$
— — — perpendicularis per pupillae medium —	7
— — — — — — — — — — — rimam branchiarum	$8\frac{2}{3}$
— — — limbi abdominis in medio — — — —	$1\frac{1}{4}$

XII.

Percis pinnae dorſualis radiis XI. ſpinoſis, XIV. mollibus; faſciis duabus latis, albicantibus.

An? Sciaena lineis obliquis lacteis in vtroque latere. *Gronou. Muſ. Ichth.* 1. p. 38. no. 91.

DESCRIPTIO.

Tab VIII. Fig. 4. Color piſcis pallide ſpadiceus, faſciis duabus latis, albicantibus, transuerſis, quarum vna per caput, altera per

per truncum ducta eſt, interiectis. Capitis faſcia, circa occiput, et potiſſimum circa dorſi initium, lato ac leviter arcuato orta principio, iuxta poſticum oculi marginem ſuper operculum branchiarum deflectitur, ac, anguſtior ſenſim facta, in inferiore huius margine terminatur.

Margo huius faſciae anterior, praeprimis inter oculum ac inferiorem operculi marginem, rectus, poſterior pinnam pectoralem et praecipue dorſum verſus ſubconuexo ſub ductu modice arcuatus. Trunci faſcia, priore latior, a ſummo dorſo, inter nonum ſpinoſorum ſextumque mollium radium ſatis largo orta principio, ſub ductu parum obliquo ac antrorſum vergente, ad imi abdominis marginem vſque deſcendit, inter pinnarum ventralium extremitates ac anum terminata. Margo huius faſciae anterior ab initio ſuo ſenſim fit conuexus, ad anteriora tendens, maxima vero ex parte, eaque inferiore rectus fere ac perpendicularis eſt; poſterior totus rectus, aſt a ſummo ad imum oblique antrorſum vergens. Maxima eiusdem faſciae latitudo paulo ſupra ipſius medietatem, media circa principium, minima circa finem. Corpus ex ouato-oblongum, cathetoplateum, ab anterioribus poſteriora verſus craſſitie ſenſim decreſcens.

A prona capitis parte, latiuscula, ſubconuexa ac modice decliui, dorſum mox mediocri ſub arcu aſcendit vſque ad tertium pinnae dorſualis radium ſpinoſum, abhinc ſecundum lineam fere rectam ſenſim ſenſimque deſcendit ad pinnae modo dictae finem vſque, et ab hoc recta fere in pinnae caudae principium abit. Inferior corporis margo in pectore ſubarcuato

 deſcen-

deſcendit, in abdomine rectus ac horizontalis fere eſt; ſecundum ani pinnam adſcendit, indeque in pinnae caudae principium recta fere excurrit. Dorſum pectore et abdomine contractius. Caput obtuſum, vtrinque compreſſum, ac prona parte laeue. Operculum branchiarum, laminaque vtriusque lateris intermedia ſquamis inſtructa. Margo illius poſterior duabus diſtinctis ſpinarum prominentium ac inter ſe diuergentium ſeriebus eſt armatus. Os obtuſum, parum ſurſum ſpectans, ſitu oculis inferius, arcuatum ac latus vtrumque verſus deflexum. Labia oris dentes vix tegentia. Maxillae, ore clauſo, fere aequales, aperto autem, inferior ſuperiore paulo longior. Harum ſingula vnica tantum dentium conicorum, breuium ac obtuſiuſculorum ſerie inſtructa. Oculi ad latera capitis, magni verſus anteriora ſpectantes, ac ob frontem latiuſculam a ſe inuicem ſatis remoti. Nares oculis, quam ori, paulo propiores. Aperturae branchiarum pone ac ſubtus largo hiatu patentes. Membrana branchioſtega ſub inferiore operculi parte recondita, contractior, tribusque tantum oſſiculis ſuffulta. Squamae denſe arcteque congeſtae, magnitudine mediocres. Linea longitudinalis, ex angulo operculi branchiarum ſuperiore prodiens, verſus dorſum primo oblique adſcendit, inde, e regione quarto pinnae dorſualis radio ſpinoſo oppoſita, inflexa ſenſim, ad eiusdem pinnae finem vsque, curſu rectiori et cum huius baſi parallelo, deſcendit, tandemque breui, aſt recta fere via, in ſuperius pinnae caudae principium excurrit, toto ſuo itinere ſuperiori, quam inferiori, corporis margini longe propior. Anus inter pinnarum

ventralium compoſitarum apices et pinnae ani principium. Pinna dorſi vnica, e regione, pinnae pectoralis baſi fere oppoſita, initium capiens, habito ad ipſius baſin reſpectu, longa, in medio ſinuoſa, continua tamen, ex duplici radiorum genere, vno ſc. ſpinoſorum, altero mollium, ſiue inermium, conſtructa. Illorum ſunt vndecim, ſubincurui; a primo ad quartum ex ordine longiores, et ab hoc ad vndecimum ex ordine breuiores. Horum, ſc. inermium, quatuordecim ſunt, ſpinoſos longitudine ſuperantes, ſubramoſi, a primo ad nonum ex ordine longiores, ab hoc vero ad decimum quartum ex ordine breuiores.

Pinnae pectorales duae: vtrinque vnica, obtuſa, radiorum nouendecim, ramoſorum, exceptis duobus exterioribus, tam ſuperioribus, quam inferioribus, ſimplicibus. Pinnae ventrales, binae, contiguae, in anteriore abdominis margine ſub pinnis pectoralibus ſitae, lanceolatae, ſubfuſcae, radiorum ſex, quorum exterior ſimplex, rigidus et ſpinoſus, caeteri inermes, ac ramoſi. Pinna ani mox poſt anum, e regione pinnae dorſualis radiorum inermium ſita, radiorum quatuordecim; horum primus rigidus, ſpinoſus, omniumque breuiſſimus, ſecundus priori ſimilis, aſt longior, caeteri omnes inermes, ſubramoſi, ac longitudine inter ſe fere aequales. Caeterum finis huius pinnae fini pinnae dorſi exacte reſpondet. Pinna caudae integra, aequalis, circa baſin ſquamis veſtita, radiorum octodecim, praeter laterales aliquot minores; extimis vtriusque lateris ſimplicibus, breuioribus; caeteris, iisdemque plurimis, maioribus, ramoſis, ac longitudine aequalibus.

Menſura.

Menſura.

	Poll. Pariſ.	Lin.
Longitudo tota, ſc. ab oris extremo ad longiorum pinnae caudae radiorum apices	3	4
— — — ab oris extremo ad extremitatem corporis ſquamoſam — — — — — — — —	2	9
Ab oris extremo ad oculi medium — — — — —	—	$3\frac{1}{4}$
— — — — — — angulum operc. br. ſuperiorem — — — — — — — — — — — —	—	$8\frac{1}{2}$
— — — — — — principium pinnae dorſi — —	1	
— — — — — — — — — — pinn. pectoralium	—	11
— — — — — — — — — — — — — ventralium	—	11
— — — — — — — — — — — — pinnae ani — —	1	9
— — — — — — — — — — — — — — — caudae —	2	$7\frac{1}{2}$
Longitudo pinnae dorſi, ad baſin — — — — —	1	$5\frac{3}{4}$
— — — — — — — — radiorum mollium longiorum — — — — — — — — — —	—	$5\frac{3}{4}$
— — — pinnarum pectoralium — — — — —	—	$7\frac{2}{3}$
— — — — — — ventralium — — — — — —	—	$7\frac{1}{2}$
— — — pinnae ani, ad baſin — — — — — —	—	9
— — — — — — — — radiorum longiorum — —	—	$3\frac{1}{2}$
— — — — — — caudae, ſc. a primis radiis, ſeu ab eius principio ad longiorum radiorum apices — — — — — — — — — —	—	9
Extremitas corporis ſquamoſa in caudae pinnam extenſa ad — — — — — — — — —	—	2
Diameter oculi — — — — — — — — — — —	—	$2\frac{3}{4}$

Diſtantia

dente et aequalis vbique latitudinis, arcuata pariter, ita, vt ipſius conuexitas capiti, concauus margo pinnae caudae reſpondeat, ac vtroque extremo vtrique pinnae modo dictae principio inſiſtat. Corpus oblongum, cathetoplateum. A prona capitis parte, latiuſcula, planiuſcula ac modice decliui dorſum conuexum mox mediocri ſub arcu aſcendit vsque ad tertium quartumue pinnae dorſualis radium ſpinoſum, abhinc contractum magis vtrinque planiori ſub arcu ſenſim ſenſimque deſcendit ad pinnae modo memoratae finem vsque, et ab hoc ſub angulo valde obtuſo in pinnae caudae principium abit. Inferior corporis margo in pectore perparum arcuato deſcendit, in abdomine rectus ac horizontalis fere eſt, ſecundum ani pinnam adſcendit, indeque ſub angulo valde obtuſo in pinnae caudae principium excurrit. Caput ſubtriangulare, vtrinque compreſſum, ac prona parte laeue. Operculum branchiarum ſubconuexum, nudum, glabrum, adeoque diaphanum, vt branchiarum pars, maximae illius laminae ſubiacens, transpareat. Secunda operculi lamina in leuem eminentiam, vna alteraue crena minuta inciſam, producta. Margo operculi membrana terminatur. Lamina oſſea, regioni capitis laterali, muſculoſae, ſquamigerae et operculo interiecta nuda, glabra, margineque poſtico dentata.

Malae os (quod etiam inferiorem poſteriorem-que orbitae partem efformat) nudum, ſuperficiei inaequalis ac ſinuoſae, duabus inſtructum eſt ſpinis, quarum ſuperior, ex inferiore eademque poſtica orbitae parte prodiens, 5 lin. longa, compreſſa, retrorſumque

 ducta,

ducta, inferior, priore longe minor, ac obtuſior, iuxta oris angulum ſita, retrorſum ac paulo deorſum ſpectans. Apex ſpinae longae zonam primam, per operculum ductam, paulo tranſcendit. Vtraque ſpina regioni muſculoſae laterali, ſquamigerae, arcte eſt adpreſſa, hinc in carne, quatenus ab eadem tangitur, ſinus impreſſi origo. Os ſitu oculis inferius, ſemilunare, vtrinque perparum deflexum. Oſtia mucifera in maxillae inferioris ambitu decem. Labia oris ſatis craſſa. Maxillae, ore clauſo, aequales, aperto autem, inferior prae ſuperiore parum eminens: vtraque vnica tantum dentium conicorum, breuium, valdeque obtuſorum ſerie inſtructa. Oculi ſubrotundi, in ſummis capitis lateribus, verſus anteriora nonnihil ſpectantes, ac ob latiuſculum ſyncipur a ſe inuicem ſatis remoti. Nares ſimplices, vnico ſc. vtrinque foramine peruiae, labio maxillae ſuperioris propiores, quam oculis. Aperturae branchiarum pone ac ſubtus largo hiatu patentes. Membrana branchioſtega ſub inferiore operculi parte latens, contractior, tribusque tantum oſſiculis ſuffulta. Squamae denſe arcteque congeſtae, mediae magnitudinis, tenues, laeues, pellucidae, lineis albicantibus, cuti propriis, plurimis, totamque corporis longitudinem percurrentibus, per ſeries ſuperſtratae. Linea longitudinalis ab angulo operculi branchiarum ſuperiore verſus dorſum modice arcuato ſub ductu aſcendit, inde cum pinnae dorſualis baſi parallela, ad decimum radium mollem vsque excurrit, inque huius regione perſiſtit penitus obliterata, toto decurſu ſuperiori, quam inferiori, corporis margini longe propior. Anus ante pinna-

pinnarum ventralium compoſitarum apices. Pinna dorſi vnica, e regione, angulo operculi branchiarum ſuperiori oppoſita, initium capiens, habito ad ipſius baſin reſpectu, longa, in medio ſinuoſa, continua tamen, ex duplici radiorum genere, vno ſc. ſpinoſorum, altero mollium, ſiue inermium, conſtructa. Illorum ſunt nouem, ſubincurui, quorum primus 6½ lin. longus, ſecundus primo, tertiusque ſecundo paulo longior; his quartus, quintus et ſextus ex ordine breuiores, hoc vero ſeptimus, octauus et nonus, ex ordine longiores. Inermium octodecim ſunt, ſpinoſos longitudine ſuperantes, ſubramoſi, a primo ad decimum tertium circiter ex ordine longiores, ab hoc vero ad decimum octauum ex ordine breuiores. Pinnae pectorales duae: vtrinque vnica, oualis, radiorum ſeptendecim, ramoſorum, exceptis exterioribus, tam ſuperiore, quam inferiore, ſimplicibus. Pinnae ventrales binae, contiguae, in anteriore abdominis margine ſub pinnis pectoralibus ſitae, lanceolatae, radiorum ſex, quorum exterior ſimplex, rigidus et ſpinoſus, caeteri inermes ac ramoſi; intimus vtriusque pinnae, membrana mediante, ſecundum dimidiam ipſius longitudinem, abdomini cohaeret; caeterum extremitates harum pinnarum faſciam ſecundam iuxta pinnae ani initium tranſcendunt. Pinna ani e regione pinnae dorſualis radiorum inermium ſita, radiorum ſedecim: primus horum rigidus, ſpinoſus, duas lineas longus, ſecundus priori ſimilis, longitudine quinque linearum, caeteri omnes inermes, ſubramoſi, ac longitudine inter ſe non multum diuerſi. Finis huius pinnae fini pinnae dorſi exacte reſpondet, vtraque

etiam harum pinnarum circa baſin carnoſa et ſquamoſa eſt. Pinna caudae integra, ad extremum rotundata, ſquamisque circa baſin veſtita, radiorum circiter octodecim, maxima ex parte ramoſorum, ab extimis vtriusque lateris ſimplicibus ad intimos ex ordine longiorum.

Menſura.

	Poll.	Lin. Pariſ.
Longitudo tota, ſc. ab oris extremo ad longiorum pinnae caudae radiorum apices	4	6
— — ab oris extremo ad extremitatem corporis ſquamoſam	3	9
Ab oris extremo ad oculi medium	—	$5\frac{1}{2}$
— — — — angulum operc. br. ſuperiorem	1	
— — — — principium pinnae dorſi	1	3
— — — — — — — pinnarum pect.	1	3
— — — — — — — pinnarum ventral.	1	6
— — — — — — — pinnae ani	2	3
— — — — — — — — — caudae	3	6
Longitudo pinnae dorſi, ad baſin	2	3
— — — — — radiorum mollium, longiorum	—	10
— — pinnarum pectoralium	—	11
— — — — ventralium	—	10
— — pinnae ani, ad baſin	1	$1\frac{1}{3}$

Lon-

	poll.	lin.
Longitudo pinnae ani radiorum longiorum -	-	8
- - - - caudae, ſc. a primis radiis, ſeu ab eius principio, ad longiorum radior. apices	1	
Extremitas corporis ſquamoſa in caudae pinnam extenſa ad - - - - - - - -	-	2
Diameter oculi - - - - - - - - - -	-	$2\frac{2}{3}$
Diſtantia inter primi pinn. dorſ. primique pinnae pect. radii baſin - - - - -	1	
- - - - vltimi pinn. dorſ. primique pinn. caudae radii baſin - - -	-	$4\frac{1}{2}$
- - - - infimi pinn. pect. primique pinnae ventralis radii baſin - -	-	3
- - - - pinnarum ventralium baſin et pinnae ani principium - -	-	$9\frac{1}{2}$
- - - - vltimi pinnae ani radii baſin et primum pinnae caudae radium	-	$4\frac{1}{2}$
Latitudo horizontalis per oculorum axes - - -	-	6
- - - - - - poſticum operc. br. marginem - - - -	-	8
- - - - - - pinnae ani principium	-	6
- - - - - - - - - finem -	-	$2\frac{1}{2}$
- - - - - - - caudae principium	-	$1\frac{1}{2}$
Latitudo perpendicularis per oculi medium - -	-	$10\frac{1}{3}$
- - - - - - - dorſi initium - - -	1	
- - - - - - - princip. pinn. dorſi	1	$5\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - ani	1	8
- - - - - - - pinnae ani finem -	-	7
- - - - - - - princ. pinn. caudae	-	$7\frac{1}{4}$

DENTALII
AMERICANI, INGENTIS MAGNITVDINIS, DESCRIPTIO.

Auctore
I. T. KOELREVTER.

Quum portentoſiſſimum obiectum, circa quod verſatur noſtra diſſertatio, in Gazophylacio rerum naturalium Petropolitano non ſine ſumma admiratione primum videremus, ex forma eius, qua tubulis marinis, quos Dentalia vocant, ſimillimum eſt, vermis cuiusdam marini habitaculum illud ſtatim pronunciare non dubitauimus; et, ecce! effato conſentanea omnino erat relatio; ſciſcitantes enim, cuius eſſet originis, vermis marini Americani domicilium, a nauta quodam ex America Archangelopolin aduectum, indeque a D. D. *Areskin*, PETRI MAGNI olim Archiatro, tunc temporis in maritima, hac ciuitate commorante, Petropolin ad rerum naturalium Theſaurum eſſe transmiſſum, comperimus.

Quod inter quadrupedia Elephas, inter aues Struthio, inter amphibia Crocodilus, inter piſces Balaena, inſecta inter Scarabeus *Hercules*, hic Vermis vermes inter profecto eſt; monſtrum ſane horrendum, aſt, quod dolemus, a nobis non viſum: inane tantum eſt domicilium, quo habitatoris magnitudinem metimur, et vaſtitate et ſtructura ſua ſingulari inſigne, nec ad alia ſui quidem generis comparandum.

Subſtan-

Quum ab ipſo animali nequeamus, a domicilio nomen ſpecificum deſumere nobis liceat, et vocare illud:

Dentalium arcuatum, ſpongioſum, fuſcum; ſuperficie tuberculis contiguis exaſperata.

Deſcriptio.

Longitudo ab vna ad alteram extremitatem, ſecundum lineam rectam, 4 ped. 2 poll. Pariſ. ſecundum curuaturae arcum vero menſurata, 4 ped. 5 poll. Latitudo ad extremitatem inferiorem, ſeu radicem, 1 poll. ad ſuperiorem 3 poll. 5 lin. Diameter luminis circularis circa radicem 3 lin. alterius extremi vero 2. poll. 6 lin. exaequat. Craſſities ſubſtantiae vbique fere eadem, ſcil. 5 circiter linearum, nec, niſi extremitatem verſus ampliorem, ſenſim attenuata. Tab. IX. Fig. 1.

Forma buccini quoddam genus, quo bubulci in nonnullis Germaniae tractibus boues conuocare ſolent, optime refert; ex radice ſcil. leuiſſime dilatata, tenuique ortum principio, alterum verſus extremum ſub arcuato flexu ſenſim ſenſimque ampliatur.

Extremitas iſta inferior Madreporae cuiusdam fruſto, ex lamellis parallelis, lapideis, diaphragmatum ope inter ſe coniunctis, conſtanti, arcte inhaeret, et e largiori eiusdem corporis baſi et amplexu vi auulſa eſſe videtur. Fig. 2. a. a.

Subſtantia fibrarum, corneae duritiei, ramoſiſſimarum, ſibi inuicem implicitarum, inque plexum denſiſſimum, digiti impreſſioni non cedentem, diſpoſitarum, multiplex et rigidum rete eſt.

Interior huius ſuperficies, domicilii cauitati obverſa, complanata, maculas, in Dentalii longitudinem diductas, ellipticas, hisque interſperſa aequali fere et aliquot linearum ſpatio inter ſe inuicem remota foraminula, maculis ipſis maiora, et facile ab iis diſtinguenda, vndique exhibet.

Fig. 1, 2 et 3. Exterior e contrario ſuperficies inaequabilis, tuberculisque prominulis, contiguis, tota exaſperata eſt.

Color e ruſo-fuſcus ab interiore exteriorem verſus ſuperficiem ſenſim mutatur in fuſcum, ſaturatiorem, quo etiam tubercula, a reliqua ſubſtantiae textura maxime ſe diſtinguunt.

Tubercula autem circumſcriptione ſubrotunda, vel oblonga, tres quatuorue lineas lata, plus minusue elevata, fibrae efformant horizontaliter compreſſae, ſiue tot quaſi laminulae anguſtae, ſitu perpendiculares, a peripheria verſus commune centrum excurrentes, ac in decurſu ſuo, inconſtante lege, hinc et inde confluentes; hinc omnis horum tuberculorum facies incondite radiata apparet. Accedit etiam, quod gluten quoddam concretum, quod plurimorum ſubiit interſtitia, eandem paulo reddat deformiorem.

E centro nonnullorum, modo dictorum, tuberculorum patulo, tentacula emergunt fibroſa, irregulariter ramoſa, ſibi inuicem implicata, eiusdem cum ſub-

ſtrato

ſtrato plexu; cuius vere ac ſine dubio animatae ſunt propagines, ſubſtantiae ac coloris, hinc a tuberculis ipſis, ſaturatiore tinctis, facile diſtinguenda. Aſt plurimorum tuberculorum centra clauſa penitus ſunt, nec tentacula ſua, retracta et abſcondita, conſpicienda praebent.

Teſtae quoque paraſiticae, ſcyphiformes, quadri-vel quinque-laterae, inuerſo-conicae, e fundo ſcil. planiuſculo ſenſim ampliatae, patentes, ſubſtantiae calcariae, albicantis, intus ſtriis ſeu ſulcis longitudinalibus exaratae, in ſuperficie paſſim in conſpectum veniunt, ipſi Dentalii ſubſtantiae ad 2 circiter linearum profunditatem totae immerſae, eidemque firmiter agglutinatae, nec absque fracturae periculo extrahendae.

Denique puſilli etiam Dentalii, ex adulti baſi propullulantis, facienda eſt mentio: conicae id figurae eſt, 1 poll. longum, 8 lin. ad baſin, quam, pariter vt adultum, clauſam habet, latum, luminis 3 linearum, textus ex altera parte craſſioris, ex altera tenuioris, vniformis, ac tuberculis prorſus deſtituti. Fig. 1. *b.* et Fig. 2. *c.*

* * *

Alterum, quod ad manus habemus, indiuidium, ſecundum curuaturae arcum menſuratum 3 ped. 8 poll. longum, inconditum et irregulare magis eſt, coloreque pallidiore, e ruſo-fuſco tinctum. Non omnis enim huius ſuperficies in tubercula eleuata eſt, ſed aequales etiam, vniformes, nec ab ipſo ſubſtantiae textu

 diſcre-

diſcrepantes eius occurrunt regiones, et, quae tuberculis donatae ſunt aliae, ea partim regularia, quaſi ſtellata, partim irregularia, luxuriantia, valdeque prominentia, nec ab ipſo ſubſtantiae textu, vel colore, vel ſtructura, diuerſa habent.

Longe pluribus quoque hoc obſeſſum eſt teſtis ſupra memoratis, quam prius, earumque plurimae per anguſtiorem, vel inferiorem, Dentalii extremitatem ſunt diſperſae.

Baſi gaudet integra, patente, lumine 3. lin. diametri; his notis a priore potiſſimum differt, caeterum textura, forma, ſubſtantia, duritie, ac internae ſuperficiei conformatione, illi ſimillimum.

OBSER-

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE POTIORES ANNI MDCCLIX. PETROBVRGI FACTAE, ET IN EAS CONSIDERATIONES.

Auctore

I. A. BRAVN.

Quum huius anni 1759. obſeruationes meteorologicae iisdem inſtrumentis factae ſint, et eadem elaboratae methodo, ac antecedentes: parum aut nihil omnino praemonendum eſſe videtur. Sunt ſcilicet barometricae factae eodem barometro ſimplici in altitudine 12 circiter pedum ſupra mare Balticum. Altitudines ſecundum pollices Pariſienſes ſunt notatae, et eorum partes centeſimas, ita vt numerus ante punctum pollices, numerus autem poſt punctum partes pollicis dicti centeſimas indicet. Altitudinum barometricarum ſummae et infimae cum differentiis per omnes anni menſes ſunt et hic nobis enotatae. Ad obſeruationes thermometricas quod attinet, et hae thermometro ſcalae Delilianae ſunt factae, vbi ciphra calorem aquae bullientis, et numerus 150 punctum congelationis notat, quo aqua in glaciem abire ſolet. Tempus, quo hae obſeruationes ſunt notatae, fuit ordinarie ſub ortum ſolis, et hora ſecunda, vel inter ſecun-

dam et tertiam poſt meridiem, quoniam illo tempore calor minimus, hoc autem maximus, caeteris paribus, et hic Petroburgi eſſe ſolet. Vbi vero ſub ortum ſolis obſeruationem commode inſtituere non potuimus, ob ſolis ortum tempore aeſtiuo nimis matutinum; poſt horam vndecimam poſt meridiem vtplurimum obſeruationem fecimus, ad calorem minimum conſignandum, quum caloris inter hoc tempus et tempus ortus ſolis tempore aeſtiuo vtplurimum differentiae parum aut nihil eſſe hic ſoleat. Caeterum et in obſeruationibus thermometricis ſummi et infimi caloris gradus ſingulorum anni menſium cum differentiis ſunt enotati.

In impetu ventorum tantum quatuor gradus cum aliis diſtinguere ſolemus, ita, vt gradus quartus procellam notet, alios et octo gradus vehementiae ventorum diſtinguere conſtat.

Quantitas pluuiae tantum menſibus aeſtiuis nunc eſt notata, quia horum menſium pluuiae praecipue in fertilitatem et infertilitatem anni influunt, et quantitas niuium mihi commode notari non potuit; quoties autem ninxit, adnotauimus, vti et reliqua meteora nobis quolibet menſe obſeruata.

Denique, quae ex hisce obſeruatis concludi potiſſimum eorum comparatione proxime poſſunt, indicauimus, animaduerſionesque, vbi e re videbantur, adiecimus. En ipſas obſeruationes et quidem primum barometricas:

Altitudo

Altitudo Barometri.

Menſis	Maxima	Minima	Differentia
Ianuarii 16.	28. 45	27. 00 d. 24 et 26	1. 45
Februarii 5.	28. 68	27. 59 d 13	1. 09
Martii 31.	28. 53	27. 05 d. 6	1. 48
Aprilis 30.	28. 19	27. 60 d. 3	0. 59
Maii 31.	28. 25	27. 25 d. 15	1. 00
Iunii 30.	28. 50	27. 55 d. 24	0 95
Iulii 1.	28. 50	27. 60 d. 15	0. 90
Auguſti 17.	28. 42	27. 40 d. 31	1. 02
Sept. 17.	28 67	27. 55 d. 1	1, 12
Oct. 13.22.31.	28. 35	27. 15 d. 6	1. 20
Nouemb. 9.	28. 82	27. 27 d. 1	1. 55
December 15.	28. 17	27. 65 d 22	1. 05

Confectaria, quae ex collatione hac ſummarum et infimarum altitudinum barometricarum fluunt, ad ſequentia capita redeunt:

1.) Summa hoc anno altitudo barometri fuit 28. 82; infima 27. 00. Ergo maxima differentia 1. 82.

Quodſi haec maxima altitudo barometrica comparatur, cum ſumma omnium adhuc obſeruatarum Petroburgi, quae eſt ſecundum obſeruationes antecedentes anni 1757. 29. 12. adparet, eam eſſe minorem hac $\frac{30}{100}$ ſiue fere $3\frac{1}{2}$. lin. pollicis Pariſ.

Contra altitudo barometri infima huius anni eſt maior minima 26. 41. ad hoc vsque tempus hic obſeruata $\frac{59}{100}$ poll. Pariſ. ſiue fere 7. lin. eiusdem pollicis.

Eſt igitur differentia maxima altitudinum barometricarum huius anni aequalis pollici vni et 82. partibus eius centeſimis, ſiue 1″. 10‴. fere, adeoque minor

minor ſumma variatione ſiue differentia, quae huc vsque eſt 2.71. minor $\frac{85}{100}$ ſiue 10$\frac{1}{5}$. lin. et quod excedit. Quodſi medium arithmeticum ſumatur, vti ſemper ſumſit *Kraftius* in ſuis obſeruationibus meteorologicis, media huius anni altitudo prodit hoc ſenſu 27.91. Alias per mediam altitudinem proprie eam intelligi, conſtat, quae reſultat, ſi per numerum obſeruationum ſumma. Earum diuidatur eadem reſultat, ſi ſumma maximae et minimae altitudinis per 2. diuidatur, vt alias ſolet.

Caeterum maxima altitudo barometrica obſeruata eſt Nouembris 9. ſub ſequentibus circumſtantiis. A Nouembris 1, quo altitudo barometrica fuit 27.27. vsque ad diem 9. perpetuo Mercurius adſcendit, donec dicto die ſummam nactus ſit altitudinem. H. 10. p. m. iam ad 28.70. deſcenderat, et perrexit ad d. 12. quo 27.75. rurſus altitudo eſt obſeruata. Ventus diebus hisce fuit admodum debilis S 1. plerumque, ſaepe nullus, vti quoque die antecedenti, et hoc ipſo die fuit nullus, ſequente vento O. et SO2. Thermometrum mane fuit 180. quod maximum hoc menſe fuit frigus, excepto die 30, quo fuit nocte 183. et p. m. 172. Tempeſtas erat ſerena, vti quoque diebus aliquot antecedentibus, ſequentibus autem diebus coelum fuit nubilum et niuoſum.

Minima altitudo 27.00. contigit Ian. 24. h. 8. a. m. Deſcendere coepit Mercurius ab altitudine 28.15, quae d. 21. h. 8. a. m. eſt obſeruata, et die ſequenti 25. rurſus ad 27.43. adſcendit, ſed d. 26. denuo ad 27.00. deſcendit, poſtea vero adſcendere perrexit ad diem 28. vsque, quo h. 11. p. m. altitudo 27.86. fuit notata. Thermometrum monſtrabat d. 24. 148. et d. 26. 151. diebus

diebus proxime antecedentibus altitudo thermometrica fuit 150 et 148, ſequentibus autem duobus poſt d. 26. inter 171 et 158 variabatur. Dies aliquot antecedentes fuere nubili et niuoſi, et ſequentes quoque ad d. 27, quo et die ſequenti tempeſtas fuit ſerena, quo 5. maculas in ſole obſeruaui, quae neque reſpectu qualitatis neque quantitatis aliquid peculiare et extraordinarii habebant. Hoc tamen forſan adnotare conuenit generatim, me omni die ſereno ſolem obſeruaſſe, et nullo eum ſine maculis hoc anno vidiſſe.

Numerus macularum fuit diuerſus et a 2. ad 11. variatus; diuerſae magnitudinis, vt ſolent, fuere, earum maximam tamen triplo, quin quadruplo maiorem aeſtimaui, quam Mercurius ſolem tranſiens ſolet adparere. Micrometrum adcuratius nunc defuit, quo exactius magnitudinem determinare licuiſſet.

Secundum obſeruationes thermometricas variationes caloris fuere hoc anno ſequentes, per ſingulos menſes.

	Calor	Minimus.	Maximus.	Differentia.
Ian.	21	- 179	- 145 d. 11	- 34
Febr.	15	- 187	- 139 d. 28	- 48
Mart.	8	- 165	- 130 d. 25	- 35
April.	6	- 157	- 122 d 30	- 35
Maii	13	- 149	- 104 d. 26	- 45
		in Sole	82	
Iunii	10 et 11	- 141	- 107 d. 2	- 34
		in Sole	97	

	Calor	Minimus.		Maximus.		Differentia.
Iul.	18 et 19	- 131	-	104 d. 2	-	27
				in Sole 93		
Auguſt. 30		- 141	-	108 d. 5 et 6	-	33
				in Sole 92		
Sept.	29	- 158	-	126 d. 8	-	32
Octobr. 21		- 161	-	126 d. 2	-	35
Nou.	30	- 183	-	147 d. 2	-	36
Dec.	26	- 212	-	150 d. 2	-	62

Quodſi has variationes caloris et frigoris, maximos ſcilicet et minimos caloris gradus, per ſingulos menſes comparamus, pateſcit frigus maximum fuiſſe 212. et calorem maximum in vmbra 104; in Sole vero 82. Fuit igitur differentia annua 108, qua maior annua ad hoc tempus non eſt obſeruata, vti quoque tantus frigoris gradus hic Petroburgi nunquam adhuc eſt notatus, maximum enim frigus ad hoc vsque tempus obſeruatum fuit 201, ſecundum *Kraftii* obſeruationes, et meas duodecim annorum, *Delilius* tamen in vno thermometro 104. et in altero 103. notauit vti in memoriis ſuis adnotauit. Calor vero hoc anno maximus minor eſt maximo alio tempore obſeruato per antecedentes obſeruationes, ſcilicet 97. 1757. et 1758. mihi notato. Manet igitur hic gradus 97. ſummus caloris gradus et ſpatium variationum thermometricarum erit nunc = 115, ſcilicet a 97. ad 212.

Frigus ſummum hoc anno contigit Decembris 26. h. 10. a. m.; h. 8 erat 210 et h. 3. p. m. 208. Diebus duobus antecedentibus variabatur a 185 ad 201 et

et duobus ſequentibus a 206 ad 173. Notari hic conuenit die antecedenti 25 per totum diem gradum 212 eſſe obſeruatum Archangelopoli, ita vt videatur inde ad nos profectum frigus. Reliquae circumſtantiae, ſub quibus hoc frigus contigit, huc redeunt: Ventus erat nullus per totum diem; duobus diebus antecedentibus O 1. et ſequentibus o o. Dies 26. erat ſerenus, vti quoque duo dies antecedentes; dies ſequens fere fuit ſerenus, reliqui proxime ſequentes fuerunt mixti, ex parte ſcilicet ſereni, ex parte nubili et niuoſi. Barometrum d. 26. fuit 28. 40 per totum diem a die 22, quo erat 27. 70 adſcendebat paullatim ad dictam altitudinem, ſequenti die 27 deſcendere coepit, et perrexit ad diem 28, quo altitudo 28. 18 eſt notata, et pauca nix cecidit. Non alienum erit, hic alios inſigniores frigoris gradus adnotare, qui menſibus Nouembri et Decembri huius anni ſunt obſeruati.

Nouembris	8 - 170	altit.	barometri	reſpondens		28. 78
	9 - 180	-	-	-	-	28. 82
	28 - 175	-	-	-	-	27. 44
	29 - 178	-	-	-	-	27. 58
	30 - 183	-	-	-	-	28. 18
Decembris	1 - 179	-	-	-	-	28. 25
	5 - 174	-	-	-	-	28. 21
	6 - 178	-	-	-	-	28. 12
	7 et 8 - 189	-	-	-	-	28. 20
	12 - 195	-	-	-	-	28. 18
	13 - 191	-	-	-	-	28. 21
	14 - 200	-	-	-	-	28. 31
	15 - 201	-	-	-	-	28. 65

Decembris 17 - 203	-	-	-	-	28. 35
27 - 207	-	-	-	-	28. 35
28 - 185	-	-	-	-	28. 22
29 - 187	-	-	-	-	28. 33
31 - 190	-	-	-	-	28. 60

Die 14, quo hic loci gradus 200 eſt obſeruatus, Archangelopoli 213½ eſt notatus.

Regiomonti Decembris 26. gradus frigoris 4 infra o coelo ſereno, vento O, eſt notatus ſecundum thermometrum *Fahrenheitianum*, qui aequalis 181 ſcalae noſtrae, qui maximus quoque omnium Regiomonti obſeruatorum fuit hoc anno.

Frigus hoc ſaeuum circa finem Decembris in terram pollices 30 pedis Londinenſis penetrauerat.

Glacies Neuae fluminis craſſiſſima vbi fuit, adaequabat 29 poll. pedis Lond. quae fere ordinaria craſſities eſſe ſolet, quin maior interdum hieme mitiore eſt deprehenſa, id quod inde eſſe videtur, quod hac hieme aqua rariſſime ita alta fuit, vt glaciem Neuae fluminis transgrederetur, id quod aliis annis frequenter fieri conſueuit.

Calor maximus Maii 26. contigit ſub ſequentibus circumſtantiis: Dies 26 fuit ſerenus, vti quoque dies antecedentes a 22, et ſequentes quoque ad Iunii 6. Ventus erat S 1, et aliquot diebus ſequentibus continuauit, dein verſus in O. Diebus antecedentibus a 22 S et O alternabant, qui leniter ſpirabant.

Barometri altitudo erat 28. 12. die antecedenti 28. 01. et ſequenti 28. 15.

Cae-

Caeterum gradus caloris praeter hunc inſigniores fuere ſequentes: Maii 23. 113, in ſole 98. d. 24. 108, in ſole 95 d. 25. 107 d. 27. 106, in ſole 92 d. 28. 106, in ſole 92 d. 29 et 30. 110.

Iunii 1. 109 d. 2. 107 d. 29. 110 d. 30. 111. Reliqui intermedii minus calidi fuere, ita vt thermometrum ſaepe monſtraret 133. 136. 140 et 141.

Iulii 1. 108. d. 21. 112 d. 24. 111. d. 25. 106, in ſole 98. d. 30. 112. in ſole 96. d. 31. 112, in ſole 96.

Auguſti 1. 111, in ſole 103. d. 2. 110, in ſole 96. et 109, in ſole 92. d. 3. 111. d. 4. 110. d. 7. 111. d. 8. 111. d. 9. 110. d. 10. 111, in ſole 102. d. 11. 109, in ſole 104. d. 13. 112. d. 14. 112. ſequuti ſunt dein dies minus calidi.

Meteora potiora hoc anno huc ſere redeunt:

1) Venti vehementiores contigere Ianuarii 15 et 16, ſeu potius nocte inter 15 et 16 W 4 d. 10 et 11 W 4 et 3 d. 18. W 3 d. 20 et 21 *S* 3. Nocte inter 23 et 24. W 3 Februarii 9. W. 3 d. 11. W 3 d. 13. W 4. Martii 4 et 5 SW 3 et 4 d. 12. W 3 d. 21 W 3 et 4. Aprilis 30. S 3. Maii 4. S 3 d. 16 W 3 et 4. Iunii 27. W 3. Iulii 10. W 3 d. 13 W 3 d. 15. W 3 d. 18. W 4 d. 21 et 22. W 3 d. 25. S 3. Auguſti 10 et 11 S 3 et 4. Septembri nullus vehementior ventus. Octobris 6. W et S W 3 d. 9. W 3 et 4. Menſe Novembri ventus vehementior nullus. Decembris 2. W 3 et 4. d. 3. W 3.

2) Altitudines pluuiae per menſes aeſtiuos, ſiue a Maio ad Octobrem, fuerunt, quae ſequuntur.

Pluuiae altitudo Menſe Maio $=16\frac{1}{2}$ *Lin.* Iunio, 19. Iulio 14. Auguſto 42. Septembri $9\frac{1}{2}$. Octobri 31. Altitudines hae lineis Pariſienſibus ſunt expreſſae, ex quarum comparatione patet, maximam pluuiae altitudinem fuiſſe menſe Aug. 42; minimam Septembri $9\frac{1}{2}$. Summa igitur pluuiae delapſae per hos ſex menſes aequalis eſt lineis 132. ſiue pollicibus 11.

3) Meteora ignea, fulmina cum tonitru, ſequentia contigere hoc anno.

Primum tonitru ſolito citius hoc anno contigit Martii 25, ſed ſemel tantum mihi auditum. Accidit h. 11. p. m. et fulmen ſatis viuidum eſt conſpectum. Thermometrum erat 137 et Barometrum 28.25. Ventus S 1 et coelum tantum nubibus tenuibus obductum. Circa h. 8. p. m. thermometrum monſtrabat 125. h. 3. p. m. 130. Porro Aprilis 30 ab h. 5 ad ſeptimam tonitrua ingentia cum fulminibus viuidiſſimis ſunt audita. Obſeruaui hic ſemel motum fulminis in linea ſpirali, quod videre mihi nondum contigerat. Maii 20 inter h. 1 et 2. p. m. tonitrua vehementia cum fulminibus et vento vehementiſſimo et pluuia larga, durauit fere 1 horam D. 28. tonitru tantum e longinquo auditum eſt aliquoties. Iunii 6 inter h 6 et 7. p. m. tonitru ſed tantum e longinquo, Iulii 4 tonitru cum vento vorticoſo, et pluuia mediocri. D. 3. tonitru comitatum vento vehementiore W. Porro d. 5 mane et nocte tonuit, item d. 25 et 28. Auguſti

Auguſti 20 et 21 vltima tonitrua ſunt audita. Tonuit igitur menſe Martio ſemel, Aprili ſemel, Maio bis, Iunio ſemel, Iulio quinquies, Auguſto bis. Ergo per totum hunc annum tonitrua fuere 12 diebus. Quamvis ſub altitudine barometri maiore, ſcilicet vltra 28 poll. non facile tonet; tamen ex recenſitis adparet, vltra hanc altitudinem tamen contigiſſe tonitrua, ſed tantum e longinquo.

4) Meteora emphatica:

Februarii 26 et 28. halo pallida circa lunam; Decembris 16. halo circa ſolem coloribus iridis conſpicua, item d. 9. h. 7. p. m. halo pallida circa lunam; d. 24 rurſus eiusmodi halo circa ſolem colorata et nocte halo pallida circa lunam cum duabus paraſelenis; d. 22 quoque halo circa lunam ſed pallidiſſima.

5) Aurorae boreales:

Martii 7. Aurora borealis placida ſine motu.

Aprilis 11. Lux borealis ſine motu, item d. 14. et 18.

Octobris 20. Lucis borealis veſtigia.

Nouembris 30. Dec. 3 et 14. lux borealis placida.

Caeterum notandum adhuc eſt, glaciem Neuae fluminis eſſe fractam Aprilis 10. h. 9. a. m. et conſtitiſſe glacie Nouembri menſe nocte inter 8 et 9.

Congelatio vltima fuit Apr. 22. Primum rurſus congelari coepit Septembris 22. Si igitur quis huius anni aeſtatem ab vltima congelatione ad primam computare velit; illa erit adcurate 5 menſium, breuior autem alias eſſe ſolet. Ceterum aeſtas ſat fertilis fuit.

Obſerua-

Obſeruationes acus magneticae circa eius declinationem mediam fere nihil variationis monſtrarunt. Eſt quidem et hic declinatio variabilis per dies, maior ſcilicet et minor, ſed tam parua, vt vix aliquot minutorum primorum ſit differentia inter maximam et minimam.

Notatu vero dignior eſt motus vibratorius acus magneticae, quem obſeruaui tempeſtate fulminea imminente, vel tantum coelo nubibus obducto, qui omnino effectus electricitatis aeris videtur, de quo in ſequentibus agam pluribus; monendum tamen hic eſt, acum mobiliſſimam eſſe debere. Nam ordinariae monſtrare non ſolent hunc motum.

OBSER-

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE ANNI MDCCLX. FACTAE PETROBVRGI.

Auctore

I. A. BRAVN.

Communicamus rurſus hic obſeruationum meteorologicarum potiora momenta, vt in antecedentibus a nobis factum eſt. Nimirum altitudines barometri ſummas et infimas, quae quolibet anni menſe contigere, pariter maximos frigoris gradus et minimos cuiuslibet anni menſis, et denique ipſa meteora potiora. Ex antecedentibus obſeruationibus iam ſatis conſtat, in barometri altitudinibus notatis numeros ante punctum poſitos denotare pollices pedis Pariſienſis, poſt punctum autem eiusdem pollicis partes centeſimas. Gradus thermometri et hic ſecundum ſcalam Delilianam ſunt adnotati, vbi o calorem aquae ebullientis, et numerus 150. punctum congelationis aquae indicat.

Altitudines barometricae ſummae et infimae per ſingulos anni menſes in altitudine 15 pedum circiter ſupra mare Balticum obſeruatae, cum differentiis fuere ſequentes:

Altitudines Barometricae

St. V.		Maxima.		Minima.		Differ.
Ianuar.	1 et 24	28.50	- -	26.97	d. 15	1.53
Februar.	12	28.43	- -	27.10	7	1.33
Martii	13 et 15	28.45	- -	27.33	19	1.12

Aprilis	25	28.40	27.60	5	0.80
Maii	19	28.40	27.65	11	0.65
Iunii	19	28.26	27.62	4	0.64
Iulii	3 et 4	28.25	27.55	12	0.70
Auguſti	30	28.56	27.53	5	1.03
Septembr.	2	28 58	27.50	28	1.08
Octobr.	21	28.52	26.74	7	1.78
Nouembr.	19	28.35	26.95	22	1.40
Decembr.	27	28 53	27.18	15	1.35

Ex comparatione harum barometri altitudinum conſpicitur primum, maximam totius anni fuiſſe 28.58, et minimam 26.74. Quum altitudo huius anni maxima minor ſit altitudine 1757 mihi obſeruata, ſcilicet 29.12; manet haec omnium adhuc hic obſeruatarum maxima.

Altitudo minima huius anni, quoniam maior eſt minima, alias hic obſeruata, 26.41; patet, et hanc omnium hic loci obſeruatarum manere minimam, adeoque ſpatium variationum barometricarum manere inuariatum 2.71, ſiue 2'' 9''' — $\frac{1}{100}$. Porro adparet, altitudinem maximam hoc anno accidiſſe menſe Septembri, minimam autem menſe Octobri.

Maxima ſub ſequentibus obſeruata eſt circumſtantiis: Thermometrum monſtrabat mane h. 6. 138, et h. 2. p. m. 124. Ventus erat OO, vti quoque die antecedenti fuit et ſequenti. Coelum ſerenum erat, vti aliquot diebus antecedentibus et conſequentibus. Effectus electricitatis aeris in acu magnetica diebus aliquot antecedentibus et conſequentibus admodum ſenſibiles fuere.

Alti-

Altitudo minima comitata his circumſtantiis fuit: Thermometrum monſtrabat 146. Ventus ex occidente ſpirabat vehementia 3, quae dein aucta eſt. Die antecedenti ventus erat S 3, et ſequenti ad meridiem vsque NW 3, ſequente veſperi et nocte tranquillitate, ſeu V. 00.

Coelum erat pluuioſum, vti quoque die antecedenti. Pluuia delapſa erat = poll. 1. lin. 1. Pariſ. Poſt meridiem pluuia niui mixta cecidit. Circa h. 4 p. m. Neuae aquae altiores fieri coepere, id quod ad mediam noctem continuauit. Dies ſequens poſt meridiem ſerenus factus eſt. Barometrum ab hac altitudine parua celerrime adſcendere coepit, ita vt ab h. 7. a. m. ad h. $3\frac{1}{2}$ p. m. ad 27.00. et vsque ad h. 7. ſequentis diei 27.35, et hinc tempore 24 horarum $\frac{61}{100}$ = lin. $7\frac{1}{3}$ fere. Solet vtplurimum poſt tempeſtatem et exiguam altitudinem barometricam eiusmodi adſcenſus celerior et aeris tranquillitas ſequi.

Ad differentias altitudinum barometri menſtruas quod attinet, facile conſpicitur, et hoc anno legem illam ſeruari, ſecundum quam variationes barometricae primis et vltimis, quam mediis, menſibus maiores eſſe ſolent. Maxima variatio menſtrua contigit menſe Octobri 1.78, minima $\frac{64}{100}$ menſe Iunio. Variatio annua eſt = 1.84. parum diuerſa a menſtrua menſis Octobris, ſcilicet tantum maior $\frac{6}{100}$. Quum variatio barometrica omnium maxima hic loci ſit 2.71. ſuperat haec variationem huius anni $\frac{87}{100}$. adeoque manet adhuc omnium hic loci maxima, ſeu ſpatium variationum barometricarum maximum. Haec hactenus de obſeruationibus

barometricis; ſequitur vt ad obſeruationes thermometricas recenſendas progrediamur, quae caloris maximos et minimos gradus cum differentiis cuiuslibet huius anni menſis ſecundum thermometri ſcalam Delilianam complectuntur.

En ipſas obſeruationes:

Caloris Gradus.

		Minimi.	Maximi.	Differ.
Ian.	13	206	- 147 d. 19	- 53
Febr.	11 et 28	185	- 147 - 3	- 38
Martii	15	176	- 145 - 19	- 31
April.	2	168	- 132 - 11	- 36
Maii	2	154	- 109 - 16 et 17	- 45
Iunii	1 et 6	138	- 110 - 20	- 28
Iulii	27	138	- 113 - 21	- 25
Auguſt.	20 et 28	142	- 111 - 14	- 31
Sept.	30	157	- 122 - 13	- 35
Octobr.	5	165	- 141 - 30	- 24
Nou.	24	176	- 137 - 2	- 39
Dec.	6	186	- 147 - 18 et 30	- 39

Si hi frigoris et caloris gradus inter ſe conferantur; adparet primum, frigus maximum fuiſſe 206 graduum. Notatum hoc mihi eſt Ianuarii 13. h. 11. p. m. ſub ſequentibus circumſtantiis. Die antecedenti 12. h. 11. p. m. thermometrum notabat 200. Die ipſo 13. mane h. 8. 204. die ſequenti mane h. 7. 196.

Barometrum notabat tempore obſeruationis 27.76. mane h. 8. 27.90. die ſequenti 27.32. Coelum erat ſereniſſimum, vti quoque die antecedenti et ſequenti.

Ventus

Ventus erat nullus, antecedente W 2, et ſequente WgS3. Die antecedenti circa meridiem obſeruaui halonem circa Solem cum tribus pareliis, quod phaenomenum occidente ſole rurſus adparuit, ſed non tam diſtincte, quam antea. Quum hic gradus frigoris maximus 206. huius anni ſit minor gradu 212, anno antecedenti notato; manere hunc maximum omnium hic loci obſeruatorum, patet.

Caeterum gradus frigoris inſigniores hoc anno fuere, mihi notati Ianuarii 8. 189, d. 12. h. 3. p. m. 196, d. 14. 192. Februarii 9. 180, d. 10, 181. Menſe Martio d. 13. et 14. 172, d. 24, 170, d. 29. 174.

Gelu in terram penetrauerat 30. poll. menſe Ianuario. Maxima glaciei craſſities = 29″. Lond. mihi reperta eſt. Calor maximus igitur hoc anno fuit 109. Notaui hunc die Maii 16. et 17. h 2½. p. m. Circa meridiem thermometrum monſtrabat 112. d. 16. et 112. die 17. mane h. 8. Altitudo barometri d. 16. erat 28. 27, die 17, 28. 30. Ventus et d. 16. et 17. vix erat ſenſibilis W. Dies 16. fere ſerenus, dies 17. autem perfecte ſerenus erat. Die 16. inter h. 4. et 5, primum tonitru, ſed e longinquo, auditum eſt. Quum calor huius anni maximus ſuperetur multum a calore maximo 1757. mihi obſeruato, ſcilicet 97; manet adhuc omnium hic obſeruatorum maximus caloris gradus 1757. mihi adnotatus. Notatu dignum eſt calorem maximum incidiſſe in menſem Maium, qaod raro accidit, frequentius menſe Iunio vel Iulio ille obſeruari ſolet.

Gradus maiores caloris hoc anno praeterea fuerunt Maii 18. 114, Iunii 9. 114, d. 10. 112, in ſole 93. d. 11. 114, d. 19. 113, in ſole 103, d. 20. 110, d. 26. 114. Iulii 4. et 6. 115, d. 21. 113. Auguſti 14. 111, d. 13. 113.

Ex comparatione differentiarum, ſiue variationum, caloris porro conſpicitur, maximum variationis caloris ſpatium hoc anno fuiſſe 97 graduum, quod quum minus ſit ſpatio in antecedentibus obſeruationibus ſtabilito, ſcilicet 115; manet hoc adhuc hic loci ſummum. Caeterum minima variatio fuit menſe Iulio et Octobri graduum 25 et 24, et maxima menſtrua 53 menſe Ianuario et Maio 45.

Vti hiems igitur ſatis gelida, ita aeſtas contra minus calida erit cenſenda per obſeruationes thermometricas recenſitas. Nam neque maximus caloris gradus fuit inſignis, neque caloris gradus maiores fuerunt continui.

Reſtant Meteora potiora, quae per ſingulos huius anni menſes mihi ſunt obſeruata, et huc redeunt.

Menſe Ianuario venti vehementiores fuere ſequentes d. 1. W 3, d. 3. W 3, d. 11. O 3, d. 26. S 3, d. 29. W 3, d 30. S 3, d. 31. NW 3. Nulla igitur procella hoc menſe contigit. Caeterum W regnauit.

Dies plerique fuere nubili et niuoſi, vti ſolet, hoc menſe, ita vt vix ſeptem claros et ſerenos numerare licuerit; noctes ſerenae paullo plures.

Veſtigia lucis borealis d. 6. notaui, nulla autem lux borealis inſignior et perfecta adparuit, mihi ſaltem conſpecta, hoc menſe.

Phae-

Phaenomenum ſolare obſeruaui circa meridiem d. 12. Scilicet halo cum tribus pareliis adparuit. Bina parelia ad latus Solis poſita erant horizontaliter more conſueto, tertius parelius Zenith verſus conſpiciebatur, vti figura monſtrat. Pars inferior ob coelum nebuloſius ibi videri non potuit. Idem phaenomenum circa ſolem occidentem denuo ſpectandum ſe praebuit, cum hac tantum differentia, quod parelii horizontales minus diſtincte, tertius vero verticalis maior illis adparuerit, et nunc pars inferior halonis ob nubes ſpectari non potuit, et mox occidentem ſolem. Tab. X. Fig. 1.

Portiones quaedam halonis, vbi coelum vaporoſius erat, coloribus iridis ſuperbiebant. Caeterum coelum erat toto die ſereno-vaporoſum, thermometrum h. 3. 196. et h. 11. p. m. 200. Barometrum autem h. 3. p. m. 27.80. et h. 11. 27 85. Ventus O 2.

Menſe Februario venti vehementiores fuere W 3 d. 1. S 3. d. 3. caeteri leniores ex variis plagis ſpirarunt.

Dies ſereni fuere 10; reliqui nubili et niuoſi. Nebula ſpiſſa d. 19. mane, ſequente ſerenitate poſt meridiem, barometro monſtrante 28.35 et thermometro 165.

Menſe Martio venti vehementiores contigere d. 18 W 4, d. 3. S 3, d 19 et 20. W 3, ſequente, vti vtplurimum ſolet, tranquillitate aeris, caeterum potiſſimum regnauit O.

Plurimi huius menſis dies fuere ſereni. Nam decem tantum erant nubili et niuoſi.

Lux borealis placida d. 22. 28. 29.

Nebula

Nebula craſſa d. 31. mane ab h. 7. ad 9. durauit, vento W vix ſenſibili, barometro 27.78. h. 11. p. m. 28.00, ſequente ſerenitate. Thermometrum erat 163.

Tab. X. Fig. 2. Halo circa ſolem d. 2. inter h. 3 et 4 p. m. adparuit cum pareliis. Halo erat duplex cum arcu duplici inuerſo. Parelius nullus diſtincte conſpiciebatur, vid. Fig. ita ſcilicet, vt diſcus eorum rotundus bene que terminatus eſſet.

Menſe Aprili venti vehementiores mihi ſunt notati ſequentes. D. 12. W 3. d. 22. W 3.

Dies 14. fuere ſereni.

Nebula d. 10 mane ſequente ſerenitate p. m.

Veſtigia lucis borealis d. 7. d. 1 et 12. Lux borealis debilis.

Menſe Maio venti vehementiores d. 2. 3 et 4 W 3 et 4. ſequente aeris tranquillitate. D. 20. W 3 d. 30. O 3. W regnauit.

Dies 16. erant ſereni, reliqui nubili et pluuioſi.

Pluuia delapſa hoc menſe = poll. 2.

Tonitru primum et vnicum hoc menſe contigit d. 16. p. m. inter h. 4 et 5. Barometro 28.27 deſcendere incipiente. Veniebat ex S et durauit $1\frac{1}{2}$ h. Thermometro h. $2\frac{1}{2}$ monſtrante 109. E longinquo tantum tonitru eſt auditum.

Nebulae d. 9 et 14. vento vix ſenſibili vel debili, vt ſolet.

Iris duplex adparuit d. 9. h. 7. p. m. ſub altitudine ſolis 10°. Altera erat ordinaria, altera tantum ſegmentum, quod columnam rectam repraeſentabat, ſitu

ſitu colorum, vt in priore. Orientem verſus columna conſpiciebatur.

Menſe Iunio ventus vehementior d. 3. S4. cum tonitru e longinquo breuis durationis, d. 16. O, dein mutatus in S3 et 4 cum tonitru, rurſus breuis durationis. Nullus ventus praecipue regnauit.

Dies ſereni fuere 18.

Pluuiae hoc menſe altitudo = lin. 29½ = poll. 2. lin. 5½.

Tonitrua d. 3. 16. 17. Quod d. 3. contigit, prope ad nos non acceſſit, neque illud d. 17. multo propius, ſed illud d. 16 fuit vehementiſſimum cum pluvia largiſſima. Coepit circa h. 1. p. m. et circa h. 3. ceſſauit. Thermometrum h. 12. monſtrabat 111. in ſole 105, barometrum 28.05, quod ad h. 3 adſcendit ad 108, et mox ad 105 deſcendere rurſus coepit. Omnes tempeſtates hae ex S venere.

Menſe Iulio contigere venti vehementiores d. 6. 7. W et NW4. d. 31 SW4.

Dies ſereni tantum fuerunt 11.

Pluuiae altitudo hoc menſe adſcendit ad lin. 50 = poll. 4. lin. 2.

Tonitrua d. 19. ex O, horam fere durans, d. 22. ex S profectum. In acu magnetica vibrationes inſignes conſpiciebantur, quae tempeſtate praeterita ceſſabant. Durante tempeſtate fulminea S4. flauit. Barometrum monſtrabat 27. 86. deſcendens a 27. 88. Thermometrum 124.

Menſe Auguſto venti vehementiores d. 10. W 3 d. 14. W 3. ſequente malacia.

Dies ſereni 16.

Pluuiae altitudo lin. 36 = 3 poll.

Tonitrua d. 6. barometro 27.70 adſcendente, thermometro 127. monſtrantibus. Acus magnetica inſignes oſcillationes conſpiciendas praebebat. D. 13. tonitru e longinquo bis auditum h. 6. p. m. barometro 28.18 deſcendente, thermometro 113 monſtrante h. 3. p. m.

Nebula d. 23.

Lux borealis d. 3 et 12. Prior inſignis cum motu radiorum ad Zenith fere vſque, poſterior radios quidem vel columnas ad Zenith extenſas habebat, ſed ſine motu ſenſibili. Halo circa ſolem mihi conſpecta eſt d. 4. h. 8. mane, quae durauit ad h. 2. p. m. Halo haec ellipticam habebat figuram verticem verſus. Menſus ſum ſemidiametrum halonis a ſolis centro ad partem eius ſuperiorem, et aequalem reperi 21°. Semidiameter contra a centro ſolis ad partem inferiorem horizontalem erat = 25°. Ab initio in parte ſuperiore Zenith verſus duae quaſi anſae adparebant, quae vero diu non durarunt. Colores iridis ſaepius exhibebat, ita vt limbus exterior coeruleos, interior vero rubros monſtraret. Coelum erat ſereno-vaporoſum. Barometrum ab h. 6. ad 2. deſcendit a 27.85. ad 27.78. thermometrum monſtrabat 122 in vmbra, in ſole 110. Ventus S 1 et 2, dein vehemens ad tempus factus.

Tab. IX. Fig. 3.

Menſe Septembri venti omnes ex omnibus plagis varie ſpirarunt, et fuere leniores.

Dies

Dies ſereni fuere 10.

Altitudo pluuiae = lin. 13.

Nebula d. 8.

Aeris electrici effectus ſaepius in acu magnetica ſe conſpiciendos praebuere, et coelo ſereno et nubilo, maxime vero nubilo et fulmineo.

Congelatio prima d. 15. et pruina, et d. 29. nix 1. pollicem alta cecidit primum.

Menſe Octobri venti vehementiores d. 8. NW 3 et 4. d. 16. O 3. d. 17. SW 3. caeterum venti potiores S et W flauère.

Dies ſereni 7.

Pluuiae altitudo lin. 44½ = poll. 3. lin. 8½.

Aqua Neuae altior d. 8. vento W 3.

Glacies in Neua flumine copioſa d. 17. quae die ſequenti rurſus ceſſauit.

Grando mediocris cecidit d. 16. h. 2. p. m. vento O 3 et 4.

Nebula denſa d. 11. h. 8. a. m. vento vix ſenſibili, ſequente coelo mixto p. m.

Aurora borealis inſignis et perfecta d. 21. h. 9. p. m. incepit, et totum hemiſphaerium coeli boreale occupauit, quod flammans et fulgurans adparuit. Electricitatis effectus nulli in acu magnetica conſpiciebantur; ventus vix ſenſibilis erat, quod vtplurimum fit.

Menſe Nouembri venti vehementiores d. 7. W 3. d. 10. SW 3. d. 8. S 3. d. 20. W 3. et 4.

Dies ſereni 3 tantum, d. 19 24. 25. Nox autem d. 26. ſereniſſima.

Nebula d. 12. h. 7. a. m.

 Halo

Halo pallida circa lunam d. 8. h. 8. p. m coelo nebuloſo, vento S 1. barometro 27.67. thermometro 157.

Menſe Decembri venti vehementiores d. 4. primum S dein W 3. veſperi d. 25. S 3. nocte d. 28. W 3. d 29. nocte W 3 et 4. caeterum plerique ex W et S. ſpirauere.

Dies ſereni 4.

Nix ſingularis ad inſtar paruorum ſpiculorum circa meridiem d. 10 cecidit, thermometro 154, barometro 27.30 adſcendente.

Altitudo niuis ad altitudinem aquae liquefactae vt plurimum ſe habebat vt 11. ad 1, ſi nempe recens lapſa et rarior erat, alias diuerſae rationes obtinent.

Altitudo igitur aquae pluuiae interuallo ſex menſium, a menſe Maio ad menſem Octobrem, fuit = 16. poll. 5. lin. Menſe Iulio maxima, et Septembri minima pluuiae copia cecidit.

Dies ſereni aut maiorem partem ſereni erant 134. adeoque plures quam tertia anni pars.

Venti vehementiores 32. et tonitrua 9. obſervabantur. Numerus ventorum vehementiorum maximus erat menſe Ianuario, Septembri autem nullus.

Aurorae boreales 7, quarum tres perfectae et inſignes erant, notabantur.

Halones circa ſolem cum pareliis ſunt 3, et vna halo circa lunam adnotatae.

HISTO-

HISTORIA ET EXAMEN CHYMICVM LAPIDIS NEPHRITICI.

Auctore

D. I. G. LEHMANNO.

§. 1.

Hiſtoriam naturalem et inprimis regni mineralis, innumeris adhuc ſcatere tenebris, amphiboliis, praeiudiciis et fictionibus, nemo eſt quem fugiat, qui vel extremis, quod aiunt labiis, hoc ſtudii genus deguſtauit. Fundamentum omnium horum errorum diuerſis rationibus innititur, quarum nonnullas hic enumerare, non abs re fore, mihi equidem videtur.

Primam ſuppeditat praeiudicium auctoritatis, cui complures ita ſunt addicti, vt non pro vitio tantum, verum pro peccato habeant, de effatis veterum dubitare, nedum eis contradicere. Rationis ſufficientis omni exceptione maioris locum tenet: „*Sic iubet diuinus Plato, ſic Ariſtoteles, Plinius, Cordus, Aldrouandus etc.*„ et quis, ſecundum eorum ſententiam, audeat de tantorum virorum fide dubitare, aut eorum effata in ambiguum vocare. Conſentientes veterumque opiniones approbantes, ſi quoque recentiores magnique nominis viros reperiant, quae illis fiducia cauſae? cui inſiſtunt.

 Aut

Aut ſi dura ſilex aut ſit marbeſia cautes.

Secundam admiſſorum in hiſtoria naturali errorum rationem praebet, defectus experimentorum. Complures abhorrent ab experimentis inſtituendis, timent microſcopia, ne oculi quid detrimenti capiant, vitant ignem, ne vapores venenati pulmones afficiant, carbonumque puluis niueos denigret manus. Suauiter de obiectis hiſtoriae naturalis ſomniant, et ficta ſibimet ipſis pro viſis renunciant. Nonnulli ſudant in myriadibus experimentorum inſtituendis, ſed non ſatis obſeruant, neque phaenomena, neque producta; Satis illis eſt innumera, idque breui temporis ſpatio, coaceruaſſe experimenta. Hemerodromi, vel venatores curſorii Chymici (Chymiſche par force Jäger) dici merentur. Eſt et aliud Chymicorum genus, quid pro quo in laboribus ſuis admittentes. Parum ſollicitis de puritate obiectorum ſuorum, ſufficit ea ſub hoc vel illo nomine ipſis oblata eſſe.

Producta, ſi eorum praeconceptae opinioni minus reſpondeant, vel abiiciuntur, vel ſilentio praetermittuntur. De hiſtoria ſubiecti, de loco natali, de eius ſpeciebus, de concomitantibus corporibus heterogeneis, ne muſſitant quidem, et ſic plerumque dato vno abſurdo ſequuntur plura.

Tertiam errorum matrem non raro ſynonymia format. In vulgus notum eſt, quot diuerſis nominibus non pauca hiſtoriae naturalis ſubiecta inſigniantur. Praeprimis vero id in Mineralogia accidere ſolet. Sic e. g. nomine Aſteriae nunc Aſtroitae, nunc oculus felis, vel Pſeudoopalus, falſo decorantur. Cum tamen vera Aſteria *Plinii* Lib. 37. Cap. 19. Hiſtor. natur. gemma plane ſit ſingularis, vti in Actis Academiae Regiae Bero-

Berolinenſis Tomo X. pag. 67. vberrime demonſtraui. Natron nunc Aphronitrum, nunc ſal alcali minerale, nunc terram ſale alcalino minerale refertam, nunc boracem crudam apud auctores denotat, vt ne quid addam, cum innumera huius theſeos teſtimonia vbiuis exiſtant.

Accedit *quarto* diuerſa vnius rei ab auctoribus communicata deſcriptio. Exempli loco ſit Malachites, quo nomine nunc minerae cupri virides ſtriatae, ſtriis ex centro verſus peripheriam excurrentibus, polituram admittentes, nunc Iaſpidis genus, nunc Chryſocollae nonnullae veneunt. A nonnulis hic lapis nunc diaphanus, nunc opacus, nunc ſemidiaphanus, perhibetur, cum tamen verus lapis Malachites nihil ſit, quam ſpathum nunc ſeleniticum, nunc calcareum, viride montano, vel Chryſocolla tinctum. Alia huiuscemodi exempla lubens praetereo.

Multa praeiudicia inſuper induxerunt *quinto* veterum medicorum ſomnia, qui iuxta tritum illud: in verbis, herbis et lapidibus multa vis eſt, lapidibus ingentes virtutes in medicandis corporum animalium morbis, absque omni ratione, omnique fundamento deſtituti, tribuerunt. Quae veſania certe non paucas praeconceptas opiniones introduxit, multosque non infimae ſortis viros ſeduxit, falſasque hypotheſes produxit.

Ex hoc labyrintho nullus exitus ſperari vnquam poterit, niſi filum Ariadneum in ſubſidium vocetur, quod Chymia nobis offert. Chymicis inquam opus eſt examinibus, iisque ſtudioſiſſimis et iteratis, ad cognoſcendam veram corporum naturam. Aſt quo labore, quibus impenſis, quanto tempore opus erit, antequam hoc Augiae ſtabulum mundificetur, cum obiectorum innumera

mera ſit quantitas, et in dies plura non ab exteris tantum aduehantur, verum etiam ante noſtros fere pedes detegantur. Herculeus labor requiritur. Interim

—— tentanda via eſt —— —— ——

et Hercules admota manu implorandus, i. e. ſuſcipiendus eſt labor, et corpora ſingula cum Deo et die ſenſim ſenſimque examinanda ſunt. Laborem multorum ſaeculorum hic indigito, verum eſt, ſed idem

—— —— —— labor improbus omnia vincit, et vis vnita fortior. Hoc enim modo cum tempore ad penitiorem naturae eiusque corporum cognitionem peruenire, penetrare poterimus. Aſt quid multis lectorem moror? Rem ipſam, de qua dicturus ſum, aggrediar.

§. 2.

Inter complura lapidum genera non vltimum ea occupant locum, quae plerumque ſub titulo apyrorum comprehenduntur. Huc pertinent exempli gratia Amianthus, Asbeſtus, Talcum, Mica etc. De Amiantho et Asbeſto eorumque natura vberrime in Academia Regia Berolinenſi locutus ſum. De talco et mica aliorum quoque extant ſcripta. Interim alii huius generis lapides adhuc ſuperſunt, inter quos *Lapis nephriticus* non vltimo recenſendus mihi quidem videtur. Dignum ideo cenſui, qui vlterius examinaretur, idque eo magis, quoniam praeter *Caſparum Bartholinum* neminem norim, qui ex inſtituto de eo egerit, ita tamen, vt plus ad eius in arte medica vſum, quam ad eius naturam chymice examinatam reſpexerit. Accedit ingens de hoc lapide auctorum diſſenſus, quem in ſubſequentibus vlterius exponendum mihi ſumam.

Nomen

Nomen lapidis noſtri quod attinet, ideo nephriticus a maioribus noſtris dictus eſt, quoniam morbis renum praeprimis mederi hunc lapidem, falſo ſibi perſuaſerunt. Antiquiſſimis hiſtoriae naturalis ſcrutatoribus plane incognitus fuiſſe videtur, quippe neque nomen, neque vlla eius deſcriptio, in eorum ſcriptis habetur. Quamuis inficias ire non poſſim, Comenſem *Plinii* lapidem apprime cum nephritico noſtro conuenire (vid. *Plin.* Hiſt. natur. Lib. XXXVI. Cap. 22.) cum non tantum viridi gaudeat colore, verum etiam tornatoris manum admittat, ſeque caelari patiatur, et elegantiſſimam excipiat polituram. Accedit, quod ſaeculo elapſo primum ficta eius vis medicamentoſa et antinephritica medicorum animos obrepſerit. Sufficit, neque a *Plinio*, neque ab *Agricola*, *Fabricio*, *Matthesio*, *Albino*, *Kentmanno*, *Barba*, *Cardano*, eius mentionem fieri. Quin et *Mynſichtius* in Armamentario Chymico, inter innumera fere medicamenta nephritica, diuretica, lithontriptica, quorum compoſitionem ad nauſeam vsque communicauit, de lapide noſtro ne muſſitat quidem, ex quo ſatis apparet, nephriticum lapidem famam ſuam virtutis diureticae et lithontripticae nouiſſimis temporibus primum adeptum eſſe. Supereſt auctor tractatus cuiusdam de lapidibus Bezoardicis et medicamentoſis *Iohannes Wittichius* de anno 1589. qui pag. 83. tractatus ſui Cap. V. lapidem nephriticum Indiae occidentalis allegat, mirificasque ei virtutes tribuit. Sed tantum abeſt, vt noſtrum cognouerit lapidem, vt potius de lapide Amazonum, vel Gallorum Iade, locutum eſſe, quilibet facile perſpiciat. Tribuit lapidi ſuo colorem viridiusculum

 ſtriis

ſtriis lacteis intermixtum; optimumque perhibet pretium; ſuccum ſpinae ceruinae aemulantem, variasque ex eo in India caelatas et formatas piſcium, pſittacorum et coralliorum figuras allegat, perforatas, vt pro amuletis geſtari poſſint. Audiamus vero et celeberrimos Americae auſtralis metatores, *Condaminium*, *Bougerium et Barrerium* dico, qui in itinerario per Guianam, Peruuianam et Amazonum, vel Marannon fluvium, adiacentem regionem, occaſione nationis Galibum et Tapuyum, horum lapidum amplam ſatis mentionem faciunt, dicentes: *Varias ex huiusmodi lapidibus formari figuras, perforatas omnes, duritie ſumma praeditas, nec non niſi puluere adamantino ſcindendas, perforandas, poliendas*. Quae omnia cum lapide noſtro nephritico, lapide molle et tenero, nullatenus conueniunt, quamuis eaedem vires huic lapidi Amazonum adſcribantur, quae lapidi noſtro ab auctoribus tributa reperimus. Vt reliqua, quae de hoc Amazonum lapide eiusque origine referuntur, tanquam ſuperuacanea praetercam. Multo minus ad lapides, nedum noſtros, alius a *Witticbio* l. c. p. 25. allegatus lapis nephriticus pertinet, quippe qui potius ad oſſa Tricheci *Linnaei*, vel Manati *Artedi*, referri debet. *Ferrandus Imperatus* in Hiſtoria naturali Lib. xxv. Cap. 8. Laconicum quendam viridem commemorat lapidem, quem et ſerpentinis annumerat, cuius deſcriptio plurima ex parte cum nephritico noſtro conuenire videtur, ita vt fere mihi perſuaſum habeam, vnum eundemque cum noſtro eſſe, idque eo magis, quoniam nephritici lapidis nullam alias iniecit mentionem. *Boetius de Boot* in Hiſtoria gem-

gemmarum Lib. 2. Cap. 60. lapidem nephriticum prò Smaragdopraſio habet, ambiguus tamen eſt, annon potius cum lapide Amazonum et Chlorite *Plinii* vnus idemque ſit. Reliquum ipſi complures medicamentoſas vires tribuit. Cap. 108. Iaſpide duriorem nullamque polituram admittentem, perhibet, et Cap. 109. eius patriam Americam, Hiſpaniam, Bohemiam aliasquè regiones afferit. Ex quo conſtat, vt mihi equidem perſuadeo, lapidem noſtrum nunquam ab eo viſum fuiſſe. *Lemery* in Dictionaire de Drogues p. 295. lapidem nephriticum ex America et Bohemia ad nos afferri refert, multisque laudibus eius vires effert, lapidemque vere diuinum, Gallis *pierre divine*, eſſe, certiſſime credit. Aſt quis non videt, virum Celeberrimum lapidem Amazonum, Iadè, quem Galli nominè *pierre divine* inſigniunt, cum noſtrò confundere, nullum enim vnquam verum nephriticum ex America allatum audiui, aut ab auctoribus relatum legi. *Pomet* in Hiſtoire de Drogues Parte 3. pag. 104. lapidem nephriticum gryſeum appellat ſubcoeruleumque, et ex noua Hiſpania allatum, figuramque capitis auiculae referentem. *Valentinus* in Muſeò Muſeorum p. 44. multas virtutes huic lapidi tribuit, inſimulque monet, ne quis ſibi loco nephritici lapidis Malachitem ſubſtitui patiatur. Sed hac admonitione facile ſuperſedere poterat; tantum enim Malachitem inter et lapidem nephriticum intereſt diſcrimen, vt non niſi imperito imponi poſſit, vti §. 1. iamiam expoſui, et ante triennium Academiae Electorali Moguntinae in diſſertatione de Molochite *Plinii* et generatione minerarum ſtriata-

 rum

rum et radiatarum vberius explanaui. *Olaus Wormius* in Muſeo pag. 95. quatuor ſpecies lapidis nephritici allegat: 1) obſcure viridem, pinguem, oleoſum, qui verſus ſolem aut candelam detentus, maculas virides obſcuriores in albo aut ſub luteo corpore exhibet 2) Nephriticum lapidem colore melleo vel ex viride ſubflauo. 3) Alium colore magis virideſcente punctulis albis variegatum. 4) Viridem flauum, album, purpureum nigricantem. Omnes hos lapides ex America allatos fatetur, quin immo ex Amazonum regione aducctos iactat, vtque huic ſuo aſſerto maior habeatur fides, *Geſnerum* allegat, qui huius generis lapides Oripendulas appellat, ideo quod nationes flumen *Marannon* adiacentes ex eo figuras diuerſi generis perforatas conficiunt, et confectas perforatis inferiorum labrorum foraminibus indunt, non exiguum decoris accrementum ex hoc ornamento ſibi ſomniantes. *Carthauſerus* in Mineralogia recte quidem lapidem nephriticum ad Smectitis genus refert, cum quo et *Wolterſsdorfius* in Syſtemate minerali concordat. *Cramerus* in Docimaſia P. I. §. 50. dubius de hoc noſtro lapide videtur, et mox viridem ſilicem, mox marmoris fruſta, quin immo talcum, ſub hoc nomine vendi perhibet. Miror vero, quo fundamento nixus vir Experientiſſimus l. c. Malachitem eundem eſſe lapidem cenſeat, quem germanice Schreckſtein vocamus, cum tamen in vulgus notum, hoc nomen proprie lapidi nephritico in fruſtula diſſecto et polito tribui, ideo quod amuleti loco infantibus a ſuperſtitioſis appendi contra terrorem ſoleat. *De Juſti* in Mineralogia merito lapidem noſtrum

ſtrum ſerpentinis annumerat; quae vero de orientalibus ſuſpicatur, nullo nituntur fundamento; ſub nomine enim orientalium ordinarie vel Amazonum lapides, vel Malachites, vel Iaſpides virides orientales, exhibentur. *Henckelius* in ſcriptis ſuis minoribus edit. *Zimmermann.* p. 616. lapidem, de quo dicturus ſum, pro vero nephritico habet, et orientales cum maioribus ad Jaſpidum genus relegat. Quo vero iure Clariſſimus *Wallerius* lapidem nephriticum lapidibus gypſeis annumeret, perſpicere nequeo, quas enim allegat rationes, nullatenus in lapidem verum nephriticum quadrant; 1) enim nunquam filamentoſum et ſcabrum offendi, lamelloſum fere ſemper. 2) Polituram melius, quamuis difficilius, admittit, quam gypſum. 3) Pinguior eſt tactu, quam quoduis gypſum. 4) Quoad texturam ſuam neque ab igne, neque a ſuccis vegetabilium, ullo modo mutatur. Veriſimile igitur mihi videtur, ſpeciem, cuius *Wormius* mentionem facit, non ad lapides nephriticos pertinere, quin immo ab igne noſter durior euadit, cum coloris tamen iactura, id quod multo aliter fit in lapide gypſeo. Miror propterea, quomodo *Pottius* eum in numerum lapidum calcareorum olim recipere potuerit, id quod tamen parte ſecunda Lithogeognoſiae p. 51. publice reuocauit, ſibique cum lapide ſuppoſititio rem fuiſſe confeſſus eſt. 5) Calcinatus cum puluere carbonum nullum hepati ſulphuris analogum magma conſtituit. 6) Calcinatus, et ad modum lapidis Bononienſis tractatus, nunquam lumen ab alio lumine attrahit. 7) A nullo acido ſoluitur, ſed tantum particulae quaedam martiales extrahuntur. 8) Per deſtillationem nul-

 lum

ſum Oleum foetidum, ſed liquorem tantum alcalinum, nactus ſum. 9) Calcinatus aqua non molleſcit, vt gypſum. 10) In aqua nullo modo, nec coquendo quidem, ſoluitur, id quod tamen in ſelenite ex parte fieri conſueuit. Plura ſigna diagnoſtica lapidis noſtri a gypſo, parte ſecunda huius diſſertationis experimenta, cum eo inſtituta continente, ſe manifeſtabunt. Optime et quaſi acu rem tetigit, mea quidem ſententia, Clariſſimus *Cronſtedt*, nunc director minerarum Suecicarum, qui in Mineralogia §. 81. ſub titulo, Argillae ſolidae partibus maioribus. vel lapidis ſerpentini, primam ſpeciem conſtituit lapidem fibroſum ſerpentinum, ſequentem addens deſcriptionem: *Lapis ſerpentinus fibroſus meris conſtat fibris, ita vt facile pro asbeſto haberi deberet, niſi fibrae ita eſſent contiguae, vt ne vix quidem in ſcindendo et poliendo obſeruari poſſent.* Inter huius generis lapides iuxta viri Clariſſimi ſententiam primas tenet: *Lapis nephriticus colore obſcure viridi*, quem ex loco incognito Germaniae ſibi allatum refert. Reliquorum de hoc lapide auctorum ſententias e. g. *Neumanni*, *Koenigii*, *Marbodaei*, *Aurelii Gimmae*, *Aldrouandi etc.* lubens praetereo, ne nauſeam lectoribus in enumerandis multorum virorum innumeris erroribus moueam. Propius ad metam mihi ipſi propoſitam accedo, et quae ad hiſtoriam huius lapidis pertinere cenſeo, vlterius exponam.

§. 3.

Lapis nephriticus eſt lapis lamelloſo-fibroſus, laeuis, compactus, mediocriter durus, in igne indureſcens, menſtruis acidis et alcalinis ſumme reſiſtens, caeterum vero

ro

polituram admittens, *coloris plus vel minus viridis et plerumque ex parte diaphanus.* Itali hunc lapidem Oſioda, vel Sciatica, Galli Sciadre, vel pierre nefretique, Belgae Kallsbeê appellant. Germani vocant Nieren-ſtein, Schrôckſtein, cuius vltimi nominis rationem §. praecedente reddidi. De nomine latino non eſt quod reddam, cum in vulgus notum ſit, quid νεφρος ſignificet. Reliqua Synonyma, ſi quae ſunt, plurima ex parte falſa, minusque lapidi noſtro conuenientia, obſeruantur, e. g. Iade, lapis Amazonum, Malachites, Iaſpis, et id genus alia, quae quo minus materiae noſtrae conueniunt, eo minus vel expoſitionem, vel refutationem merentur.

§. 4.

Locus natalis lapidis noſtri, quantum ego quidem ſcio, eſt Saxonia, Bohemia, Italia, Hungaria, Sileſia, et, niſi me omnia fallunt, etiam Hiſpania. An in noſtris regionibus crebro quoque inueniatur, adhuc ignoro, nullus tamen dubito, cum Amianthus et Asbeſtus in ſatis larga quantitate in Sibiria et prope Oloneтz effodiantur; ex quo vltimo loco elegantiſſima quoque lapidis noſtri fragmenta poſſideo, et ſi lapidem nephriticum congenerum his lapidibus declarare licet, aliis quoque in locis obventurum, cum certiſſimis credo. Quis autem ſcrutatus eſt? Ad minimum ſub hoc titulo varia huius lapidis exemplaria elegantiſſima et viridiſſima vidi, quae ex Sibiria allata dicebantur. Ille, quem *Saxonia* porrigit, praeprimis Zoeblicii prope Mariaebergam vna cum lapide ſerpentino effoditur, cuius comes et nonnunquam cruſta (das Saalband) eſſe ſolet. Nec minus etiam in aliis *Hermundurorum* montibus reperitur, et quamuis

Steine-

Steinbachius in Chronico Zoeblicenſi nullam huius lapidis faciat mentionem, nihilominus ex variis exemplaribus, quae in exiguo meo rerum naturalium et inprimis mineralium gazophylacio ſeruo, conſtat, lapidem noſtrum ſaepiſſime ibi locorum occurrere. Foſſores et lapicidae lapidis ſerpentini eum plerumque corticem venae horizontalis lapidis ſerpentini (ein Saalband, eine Flötzſchaale.) appellant, quamuis negare non poſſim, hoc nomen et aliis lapidibus cum lapide ſerpentino effractis ſaepe tribui, e. g. Talco, Amiantho, Asbeſto etc. Vt paucis multa complectar, hoc hominum genus omnes lapides hoc nomine inſignire ſolet, qui non eandem cum lapide ſerpentino duritiem in tornando, poliendo et excauando monſtrant, cum tamen certo certius ſit, lapidem noſtrum nephriticum puriſſimum iisdem vſibus aptiſſimum eſſe, quibus ſerpentinus deſtinatur. Ex eo fit, quod nonnullae ſpecies lapidis nephritici pro lapide ſerpentino vendantur, ſi modo ad vaſa et vtenſilia ex eis paranda, ſint idonea. Huius generis eſt 1) ea ſpecies, quae melleum oſtendit colorem, lineis, maculis et punctis obſcure viridibus diſtinctum ex fodina Zoeblicenſi, quae ex mola aſſeres ſcindente nomen habet, (dem Brethmühlenbruche). 2) Alia ſpecies obſcure nigra lineis et punctis pallide virentibus et flauis ornata ex ſic dicto Hartenhahnbruche. 3) Oliuaſcens lapis obſcure viridibus et albicantibus lineis ſuperbiens ex fodina kleinen Seebruch. 4) Obſcure nigricans lapis nephriticus venis obſcuriſſimis nigris et paucis mellei coloris praegnans, ex fodina altgrünen Bruche. Huc pertinet 5) lapis ſubfuſcus punctis liuidis et nigricantibus

inter

intertextus, ex ſic dicto Wieſenbruche. 6) Lapis flaueſcens punctis obſcure nigris refertus, ex ſic dicto Leichenbruche. 7) Lapis obſcure brunus maculis liueſcentibus et ſumme poroſus, ex ſic dicto Königlichem rothen Bruche. 8) Nephriticus lapis flauus venis obſcure viridibus et punctis eiusdem coloris ornatus, ex ſupra dicto Brethmühlenbruche. 9) Lapis obſcure viridis lineis albis et dilute viridibus nec non particulis talcoſis refertus ex durſtigen Brüderbruche. 10) Lapis obſcure viridis lineis flauis et talco intermixtus ex hartem Hahnbruche. 11) Lapis coloris pallide ſulphurei talcoſi punctis et lineis obſcure viridibus intermixtus ex Seebruche. 12) Lapis pallide ſulphureus nigricantibus et pallide viridibus maculis diſtinctus ex Gartenbruche. Omnes hi lapides ex fodinis Zoeblicenſibus deſumti plurima ex parte in examine Chymico lapidem nephriticum oſtendunt. Sed ſatis ſit de lapide nephritico Hermundurorum dictum, plura eius generis ſpecimina allegare ſuperuacaneum foret. *Italici* plerumque ſub nomine lapidis lebetum viridis, vel lapidis Comenſis viridis, noti ſunt, ideo quod prope vrbem Comenſem effodiuntur. In *Vngaria* vna cum lapide Amiantho et Asbeſto reperiuntur. In *Bohemia* raro, et non niſi in quibusdam fodinis ſtanni, quantum ego quidem ſcio, e. g. Plattae, in valle *Ioachimica*, *Hengſtae*, et impuri minusque ſolidi reperiuntur. Ex *Hiſpania* Bielſenſes ex Arragonia vidi, ſed lapide calcareo intermixtos, ideoque cum acido ex parte efferueſcentes et impuros. *Sileſiaci* variae ſunt indolis, et miror *Völckmannum* in Sileſia ſubterranea,

Hennelium ab *Henneſeld* in Sileſiographia, *Curaeum* in Chronico Sileſiaco et *Swencſeldium* nullam eorum mentionem inieciſſe. Praeprimis vero duae huius generis ſpecies reperi, quarum prior ex monte Zobten in Ducatu Swidnicenſi, perfecte viridis punctis albicantibus intermixtus, cum acidis non efferueſcens, ſatis durus et elegantiſſimam polituram admittens. Ab incolis pro marmore habetur, et rex Boruſſorum ex hoc ſic dicto marmore non pauca ſibi ſuoque palatio Potstampienſi et horto ſuo *Sans Souçi*, fieri fecit, ornamenta. Poſterior in Ducatu Monſterbergenſi occurrit, et quidem in fodinis prope Reichenſtein, in fodina **reicher Troſt Iſraels**, et in cuniculis **Ludwigs** et **tiefer Fürſtenſtollen**, et **goldner Eſel**. Mirum in modum delectatus ſum, cum ante octo et quod excurrit annos has fodinas viſitarem, et ſimul obſeruarem, ſub humo 1) occurrere lapidem calcareum album, quem ex imperitia metalliſoſſores eius loci Quartzum appellant. Hunc excipit 2) lapis corneus niger cum pyrite albo arſenicali arbuſculorum modo intertextus, cui ſimul Amianthus et lapis nephriticus adhaeret. Sub hoc ſequitur 3) pyrites albus ſolidus purus arſenicalis. Agmen claudit 4) lapis ſubfuſcus durus pyrite ſulphureo interſperſus, interdum auri natiui miculas oculo armato exhibens. Haec de loco natali lapidis noſtri ſufficiant.

§. 5.

Supereſt, vt de reliquis qualitatibus externis lapidis nephritici nonnulla in medium proferam.

1) Figura gaudet irregulari in ſtatu naturali, et nunc in maioribus nunc minoribus craſſioribus aut tenuioribus fruſtis occurrit.

2) Textura vt plurimum gaudet lamelloſa, lamellis nunc parallelis vtplurimum, nonnunquam transverſis, ſibi inuicem incumbentibus, et in eo ab Asbeſti cuiusdam viridis ſpecie differt, qui ex meris fibris et filamentis contextus eſt, caeterum polituram admittens.

3) Colore omnes gaudent viridi, nunc obſcuriore, nunc dilutiore, interdum ad flauum inclinante. Quo puriores, eo viridiores.

4) Diaphanos nunquam videre mihi contigit. Semidiaphanos plerosque obſeruaui, ſi in tenues ſcindantur lamellas et poliantur.

5) Contuſi, in puluerem gryſeum abeunt.

6) Igne magis indureſcunt, et colore ſuo priuantur.

7) Tactu ſunt pingues et lubrici ſteatitis inſtar.

8) Linguae nullum imprimunt guſtum.

9) In menſtruis aquoſis, oleoſis, ſpirituoſis, acidis, alcalinis, neque molleſcunt, neque ſoluuntur.

10) Ad vtenſilia ex eis varia conficienda aptiſſimi obſeruantur, et in hoc lapidi ſerpentino parum cedunt.

11) Metalli, praeter partes martiales, quibus colorem ſuum debent, nihil continent, ſi puri ſint.

12) Plerumque Lapis ſerpentinus, Amianthus, Asbeſtus, Talcum quin et Granathi inter ſe proximi ſunt vicini, id quod de eorum homogeneitate, ſi ita loqui fas eſt, teſtimonium non exiguum exhibet. Quod reliquum eſt, in experimentis nunc enumerandis, lapide nephritico Saxonico, Sibirico, Sileſiaco, Bohemico vſus ſum, ita tamen, vt ſemper puriſſima ſelegerim fruſta, et ſic haec omnia et ſingula ratione loci natalis diuerſa exemplaria, vnius eiusdemque naturae eſſe, cognoui, paucis circumſtantiis exceptis, ſi experimentis Chymicis exponantur. Et haec lectorem ſcire volui. Sequitur examen chymicum.

§. 6.

In examinando lapide noſtro nephriticio, ſequente vſus ſum methodo, vt

1) Menſtrua fluida
2) Salia ſicca
3) Corpora varia mixta

in ſubſidium laborum meorum vocauerim, et ne quid erroris committerem, non crudum tantum lapidem, verum etiam calcinatum, examini ſubmiſi, et propemodum eosdem euentus laborum meorum in ambobus expertus ſum. In praecedenti §. iamiam monui, me tantum puriſſima fruſta adhibuiſſe, tantum enim abeſt, vt ſemper purus hic lapis obueniat, vt potius plerumque nunc talco, nunc amiantho, nunc asbeſto, quin immo interdum pyrite arſenicali non minus quam ſulphureo, et lapide corneo varii generis inquinatus et remixtus occur-

occurrat. Duplici autem methodo in *Calcinatione* lapidis vſus ſum. Primo lapidem, in ſubtiliſſimum puluerem redactum, crucibulo recenti impoſui, quod leuiter tantum operculo obtexi Secundo lapidem meum tenuiſſime puluerifatum crucibulo commiſi, quod cum operculo non ſolum clauſi, verum etiam luto in igne perſiſtente accuratiſſime obliniui, ne quid pulueris carbonum vel flammae immediate accedere poſſet. Ambo crucibula furno anemio impoſui, quem carbonibus extinctis repletum in ſuperficie prius caleſeci, et per gradus ignem ad ſummum vsque gradum augendo, per horas duas in ſummo feruore conſeruaui. Igne tandem per ſe extincto, omnibusque refrigeratis, crucibula mea integra reperi, pondere lapidis parum imminuto; vnciae enim duae vix ac ne vix quidem ſcrupulum vnum cum granis duobus perdiderant. Color lapidis erat ex albo ſubluteus, conſiſtentia dura, crudo multo durior. Repetii idem experimentum cum integris fruſtis lapidis noſtri puriſſimi. Euentus praecedenti erat plane ſimilis, cum chalybe tamen percuſſa nullas ſcintillas edebant, in eo naturam lapidis crudi plane aemulantia, qui ſi purus nulloque quartzo mixtus fuerit, hoc in paſſu nunquam lapidem corneum affectat. Structura erat magis lamelloſa et fiſſa, i. e lamellae ſibi inuicem ſuperincumbentes magis inter ſe diſtantes obſeruabantur. Eodem modo etiam mediante deſtillatione ex retorta terrea igne aperto calcinatio lapidis noſtri inſtitui poteſt. Sub hac operatione libra eius dimidia ſcrupulum circiter vnum liquoris cuiusdam fundit, qui cum acidis leviter efferueſcit, et ſal alcali quoddam volatile in ſe fouet.

 §. 7.

quidem nubeculam exiguam ex albo flaueſcentem obſeruare potui, et cum ſale alcali volatili plane nihil fundum petebat. Sed ne quis miretur, quod nullum fere ſub hac operatione praecipitatum apparuerit, ſcitu erit opportunum, lixiuium ſanguinis bouini cum ſale alcali fixo calcinati, vel minutiſſimas martis partes manifeſtare, quae alias vix ac ne vix quidem detegi poſſunt.

Notum inſuper eſt *Zincum*, martem in acidis ſolutum, in forma metallica praecipitare, vt igitur nihil intentatum relinquerem, et hoc experimentum, quamvis fruſtra, in ſubſidium vocaui, ex quo ſatis conſtat, acido vitriolico non niſi parum efficaciae in lapidem noſtrum tribui poſſe.

§. 9.

Acidum ſalis communis optime rectificatum lapidi crudo pulueriſato affuſum cum ebullitione quadam, eum aggrediebatur, et plus quam acidum vitrioli extrahebat, ita tamen, vt plurima ex parte intactum relinqueret; drachmae enim duae lapidis repetitis vicibus cum hoc acido infuſae, poſtea vero rite edulcoratae et ſiccatae, non niſi grana ſex ponderis ſui amiſerant. Extractio erat coloris flaui, et cum Oleo tartari per deliquium confuſa, flauum exhibebat praecipitatum. Cum lixiuio autem ſanguinis bouini elegantiſſimum coeruleum praeceps ibat, quoad colorem ſaturatius eo, quod §. praecedente commemoraui. Lapis calcinatus cum hoc acido tentabatur, neque tamen cum hoc acido ebulliebat, neque alia ſolutionis indicia edebat, interim tamen nonnullas partes martiales extraxerat, id quod praecipitatum pallide coeru-

coeruleum ab affuſo ſanguinis bouini lixiuio ortum, luculenter demonſtrabat. Cum ſale alcali fixo nulla fere praecipitatio oriebatur, et vix tenuis nubecula apparebat.

§. 10.

Lapis noſter tam crudus, quam calcinatus, in ſubtiliſſimum puluerem redactus, *acido nitri puriſſimo immerſus*, paucas eructat bullulas, et parum ex eo extrahitur, cum Ol. tart. p. del. tamen non minus quam cum ſpiritu ſalis ammon. aquoſo ochraceum, cum lixiuio ſanguinis bouini coeruleum offert praecipitatum.

§. 11.

Aqua regis ex partibus vij. acidi nitri puriſſimi et parte vna ſalis Ammon. depur. parata, tam ex crudo, quam ex calcinato lapide, absque tamen effervescentia, plus quam omnia acida praedicta extrahit, ita vt proinde alcali fixum et volatile multum ochrae, lixiuium autem ſanguinis bouini praecipitatum ex flauo fuſcum deiiciat. *Acet. deſtill.* neque in crudum, neque in calcinatum egit lapidem.

§. 12.

Menſtrua alcalina tam fixa, quam volatilia, nullam in lapidem noſtram vim exercuerunt, luculentiſſimo indicio, colorem huius lapidis viridem non a partibus venereis dependere; hoc enim ſi foret, ſpiritus vrinoſus, vt ſolet, coeruleum, vel ad minimum coeruleſcentem, extraxiſſet tincturam, quamuis non pauci hiſtoriae natu-

 ralis

ralis ſcriptores et Chymici, iique non vltimi nominis, cuprum in lapide noſtro latere, firmiter ſibi aliisque perſuadeant.

§. 13.

Haec de actione ſalium in formam fluidam redactorum, quam in lapidem noſtrum exercent, ſufficiant. Supereſt, vt

II. *Phaenomena recenſeam, quae ſalia in forma ſicca adhibita producunt.* Hic primum Salia media in ſubſidium vocabantur, et varium in modum tentabantur, ita vt

α) calcinando

β) deſtillando et ſublimando

γ) fundendo

vires ſuas in lapide noſtro experiri poſſent.

α) *Partes anaticae lapidis noſtri et nitri depurati* crucibulo candenti committebantur, et per horam dimidiam in fuſione detinebantur. Inter ingerendum in crucibulum parum tantum detonabat nitrum, ſed continuato igne mirum in modum mixtum intumeſcebat, in fine vero denuo ſubſidebat, et in maſſam pultaceam abibat, quae calida elegantem pallide viridem colorem (*Celadon* vocant) monſtrabat, qui tamen color poſt refrigerationem euaneſcebat, et ex luteo gryſeum exhibebat. Notandum inſuper, durante fuſione per ſubtiliſſimos crucibuli poros nonnihil mixti huius verſus exteriorem vaſis ſuperficiem et pediſtaculum, cui inſidebat, extrauaſaſſe. Extrauaſatum colorem pallidum roſeum, dum adhuc calebat, prae ſe ferebat, et breui temporis ſpatio aeri liberio-

beriori expoſitum, in liquorem ſpiſſum, plurima ex parte alcalinum, deliqueſcebat. Maſſam in crucibulo hac methodo fuſam, et aqua deſtillata calida ſolutam, per filtrum, quantum fieri potuit, traieci, et in eo integrum pondus lapidis mei pulueriſati reperi. Liquor filtratus plurima ex parte poſt euaporationem nitrum exhibuit, ita tamen, vt in fine lixiuium quoddam alcalinum remaneret, quod omnino a debili detonatione nitri ortum ſuum ducebat. Notatu hac occaſione erit opportunum, plurimos ſic dictos lapides apyros cum nitro, quin immo cum puriſſimo ſale alcali fixo vegetabili, tractatos colorem viridem, et accedente Phlogiſto rubentem, exhibere colorem. Obſeruauit iam hocce phaenomenon Excellentiſſimus Dominus Director *Marggrafius* in diſſertatione de *Platina del Pinto* §. 20 et 21. Quin et ego in Diſſertatione de Amiantho eandem communicaui obſeruationem.

Lapidis noſtri et Salis commun. depurati partes anaticae eodem modo tractatae, vti in praecedenti de nitro dictum eſt, pauciſſimos tantum de ſe ſpargebant fumos, reliqua in maſſam ſatis duram poſt refrigerationem crucibuli coaluerant, quae maſſa, in aqua deſtillata ſoluta et filtrata, poſt debitam euaporationem, ſal commune reddebat. Lapis pulueriſatus in filtro remanens, neque reſpectu ponderis, neque coloris, mutationem quandam paſſus erat. Lapis nephriticus, cum *Sale tartari puriſſimo* in proportione anatica calcinatus, eundem induerat colorem viridem, quem cum nitro nactus erat. Reliquum nullo modo mutatum obſeruaui. Supereſt, vt experimentum ſupra §. 2. allegatum prolixius exponam.

 Huic

Huic fini recepi ℨij. lapidis pulueriſati et ℨß. pulueris carbonum pini. Bene inuicem mixtas crucibulo indidi, quod conueniente operculo texi, iuncturisque probe lutatis, furno anemio per horas duas commiſi, per gradus fortiſſimum ſubminiſtrans ignem. Omnibus frigefactis, et ablato operculo, neque odorem hepati ſulphuris aemulum, neque aliam obſeruaui immutationem, id quod tamen neceſſario fieri debuiſſet, ſi lapis noſter ad lapides ſeleniticos pertineret, quippe qui igne clauſo cum carbonibus calcinati ſemper ſpeciem quandam hepatis ſulphuris exhibent. Sed ne quid intentatum relinquerem, lapidem nephriticum tam crudum, quam calcinatum, eodem modo tractaui, quo *Lemery*, *Mentzelius*, *Marſiglius et Marggrafius* in praeparatione phosphori ſic dicti Bononienſis vſi ſunt. Pulueriſatum nimirum lapidem cum mucilagine Tragacanthi in paſtam redegi, quam probe ſiccatam carbonibus impoſui, et more conſueto calcinaui. Sed nec hic quidem vllum veſtigium ſelenitis apparuit, neque lumen ab alio lumine attraxit.

§. 14.

β) Dicendum nunc erit de actione ſalium in lapidem noſtrum *per deſtillationem et ſublimationem*. Lapis tam crudus, quam calcinatus, cum aequali quantitate *nitri* depurati mixtus, et ex retorta vitrea probe loricata igne aperto deſtillatus, aliquot guttas acidi nitri in vas recipiens propulerat. Maſſa in fundo retortae remanens eodem modo ſe gerebat, ac illa, quam per calcinationem (§. anteced.) nactus fueram; id eſt, cum aqua

deſtil-

deſtillata ſoluta, filtrata, euaporata et ad cryſtalliſationem expoſita, nitrum adhibitum maxima ex parte refundebat.

Cum *ſale commune* mixtus lapis eundem edebat effectum, nonnullas acidi ſalis guttulas propellens. Reliqua maſſa ſal commune, praedictis enchiriſibus adhibitis, reddebat, lapis ipſe nullam mutationem ſubierat.

℥j. lapidis cum ℥iij. ſalis ammoniaci depurati mixta, et ex retorta vitrea loricata igne aperto deſtillata, parum ſalis alcali volatilis vrinoſi dederat. Reliquum ſal ammoniacum primo in forma florum puriſſimorum alborum, tandem vero aurantio colore ſublimabatur, luculentiſſimo indicio, in lapide noſtro ineſſe partes martiales. Puluis lapidis in fundo remanens, gryſeum nactus erat colorem, ex quo iterum apparet, colorem lapidis noſtri a partibus martialibus dependere.

ʒij lapidis noſtri crudi cum ℥ß mercurii ſublimati mixtae, et eodem modo, quo antecedentes ſublimationes, tractatae, colorem ex rubro flaueſcentem induerunt, ſublimato merc. ſublim. in forma ſolita alba ſplendeſcente, quoniam nullam paſſus erat deſtructionem. Immutatio coloris lapidis ex corroſione dependebat, quam acidum hoc ſalis concentratiſſimum in eo tentauerat.

Lapidis noſtri et mercur. ſublim. ℥j. ſalis ammon. ʒij. ex retorta vitrea loricata igne aperto deſtillatae, praeter flores pauciſſimos aurantios, parum pe-

culiaris exhibebant, ſal enim *Alembrot* colore et forma ſolita ſublimatum reperiebatur, et lapis nihil fere de pondere ſuo amiſerat. Color ipſi erat cinereus. Lapidis nephritici ℥ij. arſenic. albi cryſtallini puluerſati ℥j. ℈j. inuicem mixtae et ſublimatae, arſenicum album plurima ex parte refundebant. In fine laboris ſubſequebatur parum reguli arſenicalis in forma pulueris nigri, id quod plerumque in huiusmodi experimentis accidere ſolet, quando materiae cum arſenico tractatae phlogiſton quoddam continent.

§. 15.

γ) *Salia* in fundendis terrarum et lapidum generibus non minus, quam in fuſione metallorum, inſignem vim exerere, in vulgus notum eſt. Videamus in praeſentiarum, quid in lapidem noſtrum poſſint.

De nitro et ſale communi iam dictum eſt §. 13. Supereſt, vt de reliquis ſalibus magis mixtis et *compoſitis* ſermonem faciamus. Huius generis ſunt omnia ea ſalia, quae fuſioni, reductioni, ſcorificationi et vitrificationi, vel per ſe, vel cum aliis mineralibus vitreſcibilibus mixta, inſeruiunt. Antequam vero experimenta hunc in modum facta ſeparatim exponam, paucis tantum referam, quantum lapis noſter per ſe igni reſiſtat. *Vncia eius dimidia* puluerſata, crucibulo bene clauſo commiſſa, et igni fortiſſimo in furno noſtro *anemio*, qui praeſertim vitrificationibus duriſſimis inſeruit, (*Cerberum Henckelianum* plerumque ſalutant) per horas tres cum ſemiſſe expoſita, vix ac ne vix quidem coaluerat; digitis enim facili negotio in puluerem redigi poterat.

De

De pondere nihil deſecerat. Color erat ex flauo brunus. *Drachmae tres grana* 18. per horas duas furno commiſſae, in quem ventus per folles admittitur, eodem modo ſe habebant, et non niſi grana quatuor perdiderant, quamuis pediſtaculum non minus, quam fundus crucibuli, ex parte in vitrum abierant.

Lapis nephriticus, *cum dupla portione* ſalis tartari puriſſimi per horas duas in igne furni anemii fortiſſimo detentus, in maſſam quandam ſemiuitrificatam abit, colorem ex flauo viridefcentem prae ſe ferentem.

Drachma vna lapidis cum ℥iß. ſalis tartari et ℈j. boracis cocta, per horas duas in furno anemio fuſa, in vitrum elegans obſcure luteum coaluerat.

Lapidis nephritici ℥j. cum ℥ß. tartari vitriolati per horas 2½ in furno anemio detenta maſſam exhibebat ſpongioſam, ſatis firmiter cohaerentem, coloris pallide rubri. Sed per horas 3½ fuſum hoc mixtum, vitrum elegans viridefcens praebebat.

Cum experientia compertum habeam, *nitrum fixum arſenicale*, ex partibus anaticis nitri depurati et arſenici albi cryſtallini per fuſionem paratum, complura corpora, igni alias per longum temporis ſpatium reſiſtentia, breui tempore in fluxum redigere, ſequens inſtitui experimentum.

Miſcui nimirum ℥ß. huius nitri fixi cum ℥ij. lapidis noſtri, tam crudi, quam calcinati, et crucibulo commiſi,

miſi, quod per horam vnam et ſemiſſem igni expoſitum, poſt refrigerationem vitrum continebat viridescens. Inter fluendum, mixtum ſpumeſcebat, et ſe in crucibulo mirum in modum ſublenabat. Hoc experimentum eo maiore gaudio me affecit, quo magis ex eo conuenientia quaedam lapidis noſtri cum amiantho elucęſcebat, quippe qui eadem phaenomena, non tantum cum nitro hoc fixo, verum etiam cum Tartaro vitriolato, mihi exhibuerat.

Progredior nunc ad experimenta, cum ſic *dictis* fluoribus chymicis inſtituta. Hic primo loco *fluoris ſic dicti crudi* ℥j. cum ʒij. lapidis calcinati igni fuſorio per horam vnam expoſui, et omnibus refrigeratis ſcoriam adeptus ſum coloris obſcure nigri.

Fluor niger et lapis calcinatus, in praedicta quantitate iisdem encheiriſibus fuſioni expoſiti, idem dederunt productum.

Eodem pondere quoque in adhibendo fluore albo vſus ſum, et productum praecedenti ſimile obtinui.

Fluoris nigri ℥jß boracis coctae ʒj. lapidis calcinati ʒij. per integram horam fuſae elegantiſſimum praebebant vitrum nigrum, ſed nullum reguli cuiusdam veſtigium obſeruare licuit.

Lapidis calcinati ʒij. fluoris cuiusdam, quo in docimaſia minerarum martialium plerumque vtimur, ʒvj, eodem modo, vti antecedens, ſe gerebant. Hic fluor ex parti-

partibus tribus fluoris albi, parte vna vitri viridis pulueriſati, fellis vitri et pulueris carbonum aa. parte ß. conſtat, et ideo eum in ſubſidium vocaueram, vt experirer, an martiales particulae lapidi noſtro inhaerentes in forma regulina ſeparari poſſent, id quod tamen propter earum paucitatem non ſucceſſit. Et haec de actione ſalium in lapidem noſtrum ſufficiant.

§. 26.

III. Supereſt, vt tertio loco de effectu loquar, quem *varia alia corpora mixta in* lapidem noſtrum exerunt. Sub hoc capite varias aliorum mineralium cum lapide noſtro mixtiones et fuſiones comprehendo.

Partes anaticae argillae albae puriſſimae lotae Moſcouicae et lapidis noſtri tam calcinati quam crudi per horas duas in ſic dicto Cerbero noſtro detentae, vitrum obſcure fuſcum reddebant, durum ſemidiaphanum, cum chalybe percuſſum, ſcintillas edens. Idem mixtum follibus expoſitum, poſt horam vnam et dimidiam huiusmodi vitrum largitur.

Argillae praedictae ʒij. Lapidis nephritici ℥ß. igni, per folles per horas 2. perpetuo aucto, expoſitae, vitrum eiusdem naturae et coloris ſed non aeque diaphanum offerebant, cum chalybe tamen ſcintillas de ſe ſpargens.

Argillae ℥ß. lapidis noſtri tam crudi quam calcinati ʒij. poſt bihorium in furno anemio, parum tan-

tum cohaeſerant, neque igni per folles excitato, expoſitae, vitrum largiebantur, ſed in maſſam tantum coierant.

Terrae *Smectitis et lapidis nephritici* aa. ℥ß. per integras tres horas fuſioni in furno anemio expoſitae leviſſime tantum cohaeſerat. Idem mixtum follibus expoſitum poſt horam $1\frac{1}{2}$ eodem modo ſe habebat.

Lapidis nephritici et terrae Smectitis aa. ℥ß. *Argillae albae lotae* ʒj. per horam vnam et ſemiſſem follibus expoſitae, in vitrum obſcure fuſcum coierant.

Lapidis noſtri tam crudi quam calcinati, *boracis coctae* aa. ʒij. *lapidis ſelenitici puriſſimi calcinati* ʒj. per horam j. fundebantur, et ex hoc labore vitrum olivaceum emergebat.

Lapidis nephritici ʒj. *Quartzi albi puriſſimi cryſtallini calcinati et pulueriſati* ʒiij. *ſelenitis calcinati et pulueriſati* ʒj. *ſal. tartari* ʒv. poſt horam vnam in furno anemio in vitrum obſcure fuſcum mutabantur.

Lapidis nephritici ʒj. *Vitri ſaturni ex partibus* iv. *minii et parte j. ſilicis puriſſimi calcinati et pulueriſati, praeparati* ʒiij. *arſenici albi cryſtallini pulueriſati* ʒj. ℈j *Silicis praeparati* ʒv. Poſt fuſionem 2 horar. hoc mixtum neque in furno anemio neque coram follibus in vitrum abierat, ſed tantum modo ſatis firmiter coaluerat.

Lapidis nephritici crudi non minus quam calcinati ʒj. *Silicis praeparatae* ʒiij. *ſal. tartari* ʒß. poſt fuſio-

nem

non 24 horarum in igne fortiſſimo cerberi ſic dicti vitrum ex parte cinerioſum dederant, coloris ſubuiridis.

Lapis nephriticus tam crudus quam calcinatus *cum partibus* IV. *pyritis ſulphurei et vitriolici* puriſſimi, et partibus 2. ſilicis praeparatae, mixtus et fuſus maſſam ſemimetallicam dedit, quae Germanicis Stein appellatur; in qua non niſi pauciſſima lapidis veſtigia apparebant, quae priſtinam ſeruauerant figuram. Quoad metalla nobiliora in lapide noſtro reperiunda, nulla mihi vnquam ſpes affulſerat, cum tamen in Chymia plus experiri quam hariolari conueniat, etiam hic nihil intentatum relinquere volui, ℥j *igitur lapidis noſtri calcinati cum* ℥j. ʒij. *ſaturni granulati* ſub tegula coquebatur. Regulus in cineritio more conſueto depuratus, nil praeter granum exiguum argenti relinquebat, quod tamen non ex lapide nephritico ſed ex plumbo adhibito ortum ſuum traxerat, et in aqua forte ſolutum nihil ſolaris monſtrabat. Sed ne quis ſibi perſuadeat hoc experimentum ſuperuacaneum fuiſſe, ſcitu erit neceſſum, dari quoque ſpecies nonnullas quamuis rariſſimas, quae praeter ferrum etiam aliquid argenti quin et veſtigia auri continent, id quod immixtis et inſperſis horum metallorum mineris adſcribi debet.

§. 17.

Ex hoc vsque adductis experimentis luculentiſſime apparet.

1) Lapidem noſtrum ſummopere cum amiantho conuenire, ideo quod in plerisque cum eo inſtitutis

 expe-

experimentis, eadem producta eosdemque effectus produxerat, quae conuenientia ex laboribus cum amiantho a me inſtitutis et publici iuris factis cuiuis facile apparebit.

2) Haec experimenta nos docent vel exiguam quantitatem partium martialium, non tantum in vitrificatione, verum etiam in generatione lapidum, mirum in modum corpora terrea tingere poſſe.

3) Et quod in primis ponendum fuiſſet ex tractatione lapidis noſtri cum argilla diſcimus, quomodo facili negotio et absque multis impenſis minerae auri, argenti, cupri, plumbi, fundi poſſint, quando cum lapide nephritico, amiantho, et asbeſto tanquam lapidibus refractariis ſint permixtae, quam theoriam in arte fuſoria non exiguam allaturam fore vtilitatem certus ſpero.

DE
ENTROCHIS ET ASTERIIS
COLVMNARIBVS TROCHLEATIS
VVLGO
von Schraubenſteinen.
ACCEDIT PROBLEMA DE PETREFACTO INCOGNITO NOVITER INVENTO.

Auctore
D. I. G. LEHMANNO.

§. 1.

Quot capita tot ſenſus, eſt vetus adagium, cuius veritas quotidie adhuc confirmatur. Inprimis vero haec opinionum diuerſitas circa corpora mineralia non raro obſeruatur, idque varias ob cauſas, quarum nonnullas, quamuis in tranſitu tantum recenſere, opportunum erit. Sic ergo

1) Infinitus corporum foſſilium numerus ambiguas ſaepiſſime Phyſicorum reddit opiniones.

2) Defectus characterum ſpecificorum externorum, quippe qui nondum adeo determinati ſunt, vt certi quid de omnibus et ſingulis primo ſtatim intuitu aſſeuerare queamus.

3) Conuenientia formae, quae ſaepe, quamuis non ex toto, tamen ex parte, diuerſis ſubiectis familiaris eſſe ſolet.

4) Multitudo foſſilium nouorum, quae de die in diem adhuc deteguntur.

Praeſertim haec opinionum diuerſitas circa petrefacta verſatur, quorum non exiguus numerus Hiſtoriae naturalis ſcrutatores non parum torquet, qui ſaepenumero, viſis huiusmodi nouis petrefactis animo haerent, ad quam claſſem ea referre debeant. In praeſentiarum huius rei exemplum proponam, et quantum fieri poterit, rem in apricum deducam.

§. 2.

Verſantur adhuc dubia circa lapides figuratos cochleae figuram referentes, et opiniones auctorum de eis ſunt diuerſae. *Lapides cochleati* (Schraubenſteine) *ſunt lapides columnares cylindrici, vel pentagoni, nunc ſiliceae nunc calcareae, vtplurimum martialis indolis, ex lamellis per certas diſtantias a ſe inuicem plus minusue ſeiunctis, et axi per medium earum tranſeunti, adhaerentibus, conſtantes, et cochleae referentes figuram.*

Plotius (a) primum, quantum ego quidem ſcio, huius lapidis mentionem iniecit, ex quo poſtea *Luidius* (b) diuerſas ſpecies, quas in Lithophylacio ſuo ſervabat, allegauit. Ex eo tempore nemo fere iſtos lapides figuratos commemorauit, ſi vnicum excipiamus *Bruckmannum*, (c) *Ritterum* et *Harenbergium*, (d) qui de Wurtenber-

(a) Natural Hiſtory of Staffordshire Cap. 5.
(b) *Luidii* Lithophylacium Brittannicum p. m. 55.
(c) Epiſt. Itinerar. Cent. Ima Epiſt. 63.
(d) De Encrino.

[illegible]bergenſibus nouella obſeruauit. Interim neque *Wallerius*, neque *Linnaeus*, quidquam de eis ſcriptum reliquerant. Tandem inſurgebat Dom. Licent. *Lieberoth* (*e*) et lapides noſtros conchyliis petrefactis annumerabat. Hanc ſententiam iure meritoque reuellebat Dom. *Chriſtlob Mylius*, (*f*) eosque fragmentis capitis Meduſae petrefactis annumerabat. Haec refutatio Dom. *Lieberoth* male habuit, et ſatis acerbe ideo eum reuulſit; (*g*). Dom. *Chriſt. Frid. Schultzius* (*h*) ſententiam ſuam, vti ſolet, docte poſtea de his petrefactis diuulgauit.

Anno elapſo Clar. Dom. Prof. *Vogel* (*i*) in Mineralogia eorum mentionem fecit, et Clar. Dom. Prof. *Walchius* (*k*) ſententiam ſuam argute dixit. Clar. Dom. *Cramerus* (*l*) cochlithis eos annumerat.

§. 3.

Sententiae horum auctorum de ortu et origine horum lapidum ſunt diuerſiſſimae. *Plotius* iudicium ſuum

(*e*) Hamburg. Magazin 9ter Band S. 73.

(*f*) Phyſical. Beluſtigungen Tom. 2. p. 145. Errauit igitur Dom. *Lieberoth*, qui me in Hamb. Magazin Tom. XIV. p. 104. pro auctore huius refutationis habet, quamuis negare nequeam, me eandem de his lapidibus fouere ſententiam, quae a *Mylio* propoſita fuit, vti ex ſubſequentibus patebit.

(*g*) Hamburg. Magazin Tom. XIV. p. 104.

(*h*) Hamburg. Magazin Tom. XVI. Neue geſellſchaftliche Erzählungen p. 151. Von verſteinerten Seeſternen.

(*i*) Mineralſyſtem p. 236.

(*k*) Steinreich p. 81.

(*l*) Probierkunſt p. 46.

ſuum ſuſpendit, et praeter deſcriptionem parum de eorum origine pronunciauit. *Luidius* l. c. No. 1133. 1136. 1137. Entrochis eos annumerat. Pag. 103. in litteris, ad *Guilielmum Nicolſon* datis, partes Encrini eſſe Entrochos perhibet. Pag. 116. ſeqq. in Epiſt. ad D. *Archerum* ſcripta, ad ſtellas marinas eos relegat. *Bruckmannus* nihil certi de eis aſſerere auſus eſt. *Harenbergius* occaſione Encrinorum eorum mentionem iniecit. Dom. Lic. *Liebenroth* conchyliis petrefactis eos annumerat, quam ſententiam quoque Clar. Dom. Prof. *Vogel* ſecutus eſt. *Mylius* et *Schultzius* recte eos Entrochis et Aſteriis columnaribus accenſent. Clar. Dom. Prof. *Walchius* rem in ſuſpenſo relinquit, pronus tamen eſſe videtur ad ſententiam *Mylii* et *Schultzii* amplectendam. *Ego* in Mineralogia §. 65. inter Entrochos columnares eos collocaui, vt errorem, quem in tractatu de matricibus metallorum p. 249. commiſeram, corrigerem.

§. 4.

Affirmanti incumbit probatio. Huic legi et me obedire oportet. Eo fine argumenta mea et obſeruationes, a me ſedulo inſtitutas, in medium proferam. Antequam vero ad rem ipſam me accingam, primo pauciſſimis de Trochis, Aſteriis, Entrochis et Aſteriis columnaribus diſſeram.

Trochi appellantur lapilli rotundi, plani, nunc maiores, nunc minores, in centro mox perforati, mox vero ſolidi, in ſuperficie nunc figuram ſtellae, non raro floris pentapetali, vel hexapetali, regularis, multoties radios ex

centro

centro verſus periphaeriam excurrentes, nonnunquam circulos, referentes.

Entrochi ſunt columnae cylindricae, ex trochis ſibi inuicem incumbentibus compoſitae.

Aſteriae ſunt lapilli plerumque quinquangulares, interdum perforati, non raro vero ſolidi, in ſuperficie ſtellae, vel floris pentapetali, icone inſigniti.

Aſteriae columnares ſunt columnae, ex huiusmodi Aſteriis compoſitae.

Ex his praemiſſis definitionibus apparet, Entrochos et Aſterias non niſi forma externa a ſe inuicem differre, cum hae ſemper polyedrae, illae rotundae perpetuo obſeruentur.

Determinandum nunc erit vndenam ambo haec petrefacta originem traxerint, et ad quodnam genus referenda ſint. Paucis dicam, quae mea de eis ſit ſententia. Partes ſunt Encrinorum, Encrini vero ſpecies ſtellarum marinarum petrefactae, idque earum, quae petiolo innituntur. Pro hoc aſſerto dimicant

a) Encrini petrefacti et petiolo inſtructi, qui in minerophylacio locupletiſſimo S. R. M. Polon. Dresdae aſſeruantur, vbi non tantum rotunda, verum etiam pentagona petiola articulata, quin immo articulationes ipſae viſuntur, omni modo Entrochos et Aſterias columnares referentes. Mentionem horum exemplarium fecerunt Excellentiſſimus Dominus Conſiliarius metallicus et Inſpector Muſaei Regii Dresdenſis, *Eilenburg*, (*m*) et Cele-

(*m*) Deſcription du Cabinet Roïal de Dresde p. 27.

Celeberr. Dom. *Schulzius*, (*) quin et ego repetitis vicibus ipſa vidi.

b) Accedit nitidiſſimum et maximum illud exemplar Encrini, quod Celeberr. Dom. Prof. *Langius* Halae ſeruat, vbi non tantum petiolum rotundum, verum etiam eius articulationes in conſpectum veniunt, exacte Trochos et Entrochos repraeſentantes.

Tab. XI. Fig. 1. *c*) Exhibeo Tab. XI. Fig. 1. Encrinum in matrice, nempe in lapide albo calcareo ſpataceo, vbi *a*. Encrinum ipſum ſuperiorem, vel radios huius ſtellae marinae contractos, *b*. baſin, vulgo den Gelenckſtein, quae Encrinum cum petiolo connectit, *c*. Articulationes radiatas petioli inſtar Entrochorum, *d*. vero baſes diffractas aliorum Encrinorum monſtrat. Inueni hunc lapidem in fodina lapidis calcarei prope Dardesheim, in principatu Halberſtadienſi. Delineatio magnitudinem veram oſtendit.

Fig. 2 *d*) Offero iconem fig. 2. Encrini ibidem reperti calcareo-ſpatacei pallide cinerei, vbi *a*. radios Encrini, *b*. baſin eorum, *c*. fruſtum petioli et in eo *d*. ſtellam pentagonam exhibet. Ex hoc exemplari apparet, vt mihi equidem veriſimile videtur, Entrochos et Trochos, Aſterias et Aſterias columnares, iure meritoque ad partes Encrinorum pertinere. Veram magnitudinem delineatio monſtrat. De articulationibus infra loquemur.

§. 5.

(*) Von verſteinerten Seeſternen. p. 28.

§. 5.

His nunc praeſuppoſitis, et, vti ſpero, ſufficienter comprobatis, progredior nunc ad Examen lapidum cochleatorum ipſum. Definitionem horum lapidum §. 2. dedi. Patria ipſis eſt Anglia, Germania et in ea inprimis Weſtphalia, Saxonia, regiones Hercyniam ſyluam adiacentes, Sileſia, Ducatus Würtenbergenſis et complures aliae prouinciae Sueuiae, Franconia, aliaeque regiones. Praeprimis vero ii magnam ſibi famam acquiſiuerunt, qui in principatu Blankenburgenſi ex ferrifodinis Huttenrodanis eruuntur. Secundum ſibi locum vindicant, qui Goslariam inter et Clausthalum prope aedes Venatorias, *Auerhahn* dictas, eruuntur. Color eorum varius eſſe ſolet, nunc enim cinereus, nunc ochraceus, interdum et roſeus obſeruatur. Supereſt, vt demonſtrem, eos vere ad Entrochos et Aſterias pertinere.

Omnes et ſinguli huius generis lapides trochleati ſunt vel

1) cylindrici, vel

2) polyedri.

1) Cylindrici ex omni parte cum Entrochis columnaribus conueniunt, ſi ſolas inciſuras excipiamus, quippe quae profundiores in noſtris ſunt lapidibus, quam in Entrochis, cuius phaenomeni cauſam infra videbimus. Conueniunt, inquam, quoad reliqua cum Entrochis, et quidem reſpectu

α) Formae, quae, vti in Entrochis et Aſteriis columnaribus, nunc rotunda, nunc polygona eſt.

β) Ratione figurarum, quas in ſuperficiebus oſtendunt, quae in lapidibus noſtris cochleatis eaedem, quae
Tab XII. in Entrochis et Aſteriis ſunt. Sic e. g. Tab. XII.
Fig. 1. fig. 1. *a.* lapidem exhibet trochleatum cylindricum, cuius lamellae ex centro verſus peripheriam radiatae ſunt. *b* ſunt tres lamellae circa axem verſatiles. *c.* eſt Ectypus lamellae ſtellatae, in cuius medio axis adhuc prominet. Lapis ipſe eſt albus calcareus, prope
Fig. 2. aedes venatorias, *Auerbahn* dictas, erutus. Fig. 2. eſt lapis aeque calcareus albus, in quo *a.* axem ab omnibus lamellis denudatam, in medio cauitatis conſtitutam, monſtrat, fundus et pars ſuperior vacui typum Entrochi radiati monſtrat. *b.* repraeſentat vacuum rotundum priori ſimile, excepto, quod non niſi pars exigua axis diffractae in centro eius ſit conſtituta *c.* monſtat typos Entrochorum radiatorum cum axibus ex parte promi-
Fig. 3. nulis. *d.* diuerſa conchylia petrefacta exhibet. Fig. 3. eſt minera martis ex parte ſilicea Huttenrodenſis, in
Fig. 4. qua trochlea *a.* octo conſtans Entrochis radiatis. Fig. 4. eiusdem indolis mineram monſtrat, vbi *a. a.* duas trochleas; *b. b.* duos typolithos eiusdem generis cum partibus axium ſuarum diffractarum; *c.* typolithum ſine axe; *d.* axem integram, in cuius medio particula
Fig. 5. exigua entrochi radiati eroſi *e.* haeret, offerunt. Fig. 5. trochleam ferrugineam Huttenrodanam monſtrat 66. lamellis compoſitam, magnitudinem et craſſitiem icon exhibet. *a.* igitur eſt trochlea ipſa; *b.* ſunt quaſi columellae perpendiculares et parallelae numero quinque; *c.* eſt figura ſtellae quinquangularis ſiliceae albae, halone quaſi quodam ochraceo circumdata, qui cylindricam

huic

huic trochleae conciliabat figuram. Non raro caſui inventionem veritatis debemus, id quod et in hoc lapide accidit. Integrum ipſe inueneram, et neque in ſuperiore, neque in inferiore parte eius, ſtella apparebat. Cum locum mutarem et Petropolin peterem, vna cum reliquis mineralibus hanc trochleam quoque deportabam. Caſu in itinere diffringebatur. Dolebam primam iacturam, quam feceram, quae mihi eo maior videbatur, quo rarius huius magnitudinis exemplaria occurrunt. Diffractam interim cum conſiderarem, ſtellam elegantiſſimam quinquedram obſeruabam, qualem complures Entrochi monſtrare ſolent. In bina adhuc diffregi fruſtula, elegantiſſimum hoc exemplar curioſitati meae, vel potius veritati, ſacrificans, et ecce vbique eadem ſtellae figura ob oculos veniebat. Columellae *b* perpendiculariter deſcendentes, vt mihi quidem videtur, ab angulis huius ſtellae dependent. Plura de eis infra dicam.

§. 6.

Pluribus forſitan exemplis ſuperſedere poſſem, aſt ne quid intactum relinquam, quod ſententiam meam confirmare poſſit, nonnulla alia exempla ſuppeditabo. Fig. 6. ſiſtit marmor egregie ex vno latere politum, viride, trochleis coloris incarnati et Entrochis eiusdem coloris condecoratum. Hoc marmor vna duntaxat vice prope Suckow in Marchia Vkerana repertum fuit. Icon veram magnitudinem eius monſtrat. Hic igitur *a*. trochleas petrefactas et perpendiculariter diſſectas offert, quarum lamellae incarnatae, interſtitia viridia ſunt. *b*. ſunt trochleae horizontaliter diſſectae; *c*. eſt Entro- Tab XII. Fig. 6.

chius magis oualis. Partem auerſam, ſed non politam, exhibet Tab. XI. fig. 3. vbi *a*. Entrochos ſic dictos ramoſos, *b*. complures vulgares monſtrat. Hos icones Tab. XII. fig. 6. *a*. veras trochleas, et non Entrochos vulgares eſſe, ex earum ſtructura apparet, quoniam lamellae, vel trochi, ſatis late a ſe inuicem diſtant, et ſpatia intermedia lapide diuerſi coloris ſunt repleta. Vnum adhuc addam, nempe exemplum Tab. XII. fig. 7. delineatum, in quo *a*. fruſtum trochleae diffractae repraeſentat, nempe in fundo ectypus Entrochi radiati cernitur, in cuius centro axis, cui adhuc lamellis, ſed circum circa eroſa, adhaeret, *b*. ſunt ectypi Entrochorum radiatorum cum prominentibus axibus effractis, *c*. monſtrat partem exiguam trochleae duabus tantum lamellis conſtantem, *d*. vero vacuum rotundum, cui trochlea inſederat, quod ex parte axis adhuc inhaerente apparet. Lapis ipſe eſt calcareus coloris cinerei cum adhaerente Quartzo cryſtallino *e*. et prope Clausthalium in ſylua Hercynia eſt repertus.

Tab. XI. Fig. 3.

Tab. XII. Fig. 7.

§. 7.

2. *Polyedri* lapides trochleati cum aſteriis columnaribus omni modo conueniunt, niſi quod articulationes latius ab inuicem diſtent. Hoc genus quamuis cylindricis ſit rarius, nihiloſecius tamen adeſt. Iconem eius exhibet Tab. XI. fig. 4. Plerumque quinquangulares, raro ſexangulares eſſe conſueuerunt. Quin immo easdem figuras ſtellatas et florum monſtrant, quas in aſteriis, tam ſingulis, quam columnaribus, obſeruamus.

Tab. XI. Fig. 4.

§. 8.

§. 8.

Hactenus de figuris et formis lapidum dixi. Progredior nunc ad reliqua argumenta, ex quibus mihi perſuaſum habeo, Entrochos et Aſterias columnares vnum idemque cum trochleis noſtris eſſe. (vid. §. 5.)

γ) Foramina, quae in Entrochis aeque ac lamellis noſtris lapidum trochleatorum obueniunt. De Entrochis notiſſimum eſt, de lapidibus trochleatis lamellae iſtae circa axem ſuam mobiles Tab. XII. fig. 1. *b.* teſtantur, quia immo et ipſae axes, nunc integrae, nunc diffractae, reliquorum exemplarium de perforatione lamellarum teſtes eſſe queunt. Veriſimile mihi inde videtur, in ſtatu naturali, et ante petrificationem, axes iſtas nihil aliud, quam canales, ſiue ſiphunculos, fuiſſe, qui in petrificatione materia lapidea expleti fuerunt. Forſitan hi ſiphunculi neruo quodam inſtructi fuerunt, mediante quo ſe mox extendere, mox vero, et pro lubitu, iterum contrahere quiuerunt. Clariſſimus *Schultzius* in Tractatu de ſtellis marinis petrefactis p. 32. locum allegat ex *Bibliotheque raiſonnée* Tom. XXXVII. p. 266. his verbis. „Il a decouvert (Mſr. *Griffith Hugues*) une „nouvelle eſpece d'étoile de mer, laquelle ſort du „rocher par une eſpece de pedicule, et elle exprime „exactement la figure raïonnée de la fleur d'une ficoide. „Mais cette fleur eſt presque ſenſitive. Au moindre „attouchement elle ſe replie, et va ſe cacher avec „ſon pedicule, dans le rocher, d'où elle étoit ſortie. „Ses raïons ſont des bras, qui ont bien l'air de ceux „d'un polype„ Idem etiam ſequens teſtimonium *Olai Magni* Tract. de gentib. Septentr. Lib. [illegible]

Tab. XII. Fig. 1.

Cap.

Cap. 23. citat. „Spongia valde multiplicata penes lit-„tora Norwegiae eius eſt naturae, quod conueniat cum „caeteris animalibus, in motu dilatationis et contractio-„nis. Quaedam vero earum immobiles ſunt a ſaxis, „et ſi abrumpantur a radicibus recreſcunt; quaedam „autem ſunt mobiles de loco ad locum, et hae in „maxima copia in littoribus praedictis reperiuntur.„ Haec opinio eo magis roboratur, ſi ſtructuram capitum meduſae eorum radiorum conſideramus. Cum praeſertim mare album circa Archangelopolin varias ſpecies eorum ſuppeditet, quantum fieri potuit, complura huc aduecta curioſiſſime examinaui, et obſeruaui

Tab. XI. Fig. 5. Tab. XI. fig. 5. ramos eorum 1) membrana quadam *a.* obductos eſſe. 2) In parte inferiori compreſſa, et quaſi plana, canalis *b.* iuxta longitudinem ad extremitatem excurrit, in quo neruus, pili equini craſſitie, latet, qui ramulos extra membranam exiguos ad ambo latera canalis protrudit *c.* 3) Pars interior *d.* dura, inſtar oſſis, alba, aquae immerſa non molleſcit, ſed

Fig. 6. figuram exhibet, quam fig. 6. monſtrat. Detracta membrana, hic cylinder exacte lapides noſtros trochleatos quoad figuram refert, ita tamen, vt interſtitia lamellarum materia quadam gelatinoſa repleta ſint. Haec obſeruatio attentionem meam magis incitabat, et ad petrefacta mea me reducebat. Diffringebam eo fine iuxta longitudinem vnum ex Encrinis, diffractum oblique adhuc ſemel frangebam; et probe conſideratis omnibus, veſtigia huius canalis, aſt non in medio, verum in parte magis compreſſa, obſeruabam. Haec omnia hactenus adducta ſane opinionem veriſimilem

reddunt,

reddunt, Trochos, Entrochos, Aſterias et earum columnas, lapides trochleatos ad vnum idemque genus pertinere, et non niſi reſpectu ſpeciei a ſe inuicem differre. Recordemur hac occaſione lapidis trochleati Huttenrodani ſtellati Tab. XII. fig. 5. delineati et §. 5. deſcripti. Argumenti loco porro inſeruire poteſt

δ) Zoophyton a *Mylio* deſcriptum Tab. XI. fig. 7. quod mihi quidem ad ſpecies ſtellarum marinarum Encrinos producentium pertinere videtur, et forſitan vnum idemque eſt cum eo, quod *Hugues* et *Olaus Magnus* allegarunt, ideoque prolixior eſſe nolo. Mirum interim eſt, pleraſque ſtellas marinas, quin et Zoophyta ab Hugues, Olao Magno, et Mylio deſcripta, in oceano ſeptentrionali huc vsque repertas eſſe. Quod vero originalia huius generis ſtellae marinae non niſi rariſſime ex fundo maris ſint extracta, in cauſa eſt forſitan *a*) quod mediante petiolo ſuo tam firmiter fundo maris petroſo adhaerent. *b*) Quoniam ſecundum obſeruationem Hugueſii ad leuiſſimum contactum ſe contrahunt, et inter petras earumque rimas recedunt. *c*) Quam pauci Nauarchorum et mercatorum hiſtoriae naturali ſtudent? Imprimis vbi de marinis ſermo eſt. Et quis adhuc originalia Concharum anomiarum, Lituorum, Belemnitarum obſeruauit? Accedit *d*) defectus hiſtoriae reuolutionum, quas tellus noſtra ſubiit, vt nihil dicam de regionibus Oceani nobis plane adhuc incognitis. Tab. XI. Fig. 7.

§. 9.

Ex omnibus huc vsque prolatis mihi quidem perſuaſum habeo, *Trochos*, *Entrochos*, *Aſterias ſingulas*

et columnares et trochleas lapidum cochleatorum vnius eiusdemque eſſe originis, i. e. articulationes ſingulas vel aggregatas petrefactas petioli ſtellae cuiusdam marinae. Rationes, quae me huius ſententiae faciunt certiorem, §. 5. 6. 8. expoſui, et ideo ſuperuacaneum foret, eas repetere. Dicendum nunc erit, vndenam diuerſitas Entrochos inter et trochleas petrefactas oriatur. Haec diuerſitas in ſubſequentibus conſiſtit:

α) Lamellae, vel Trochi Entrochorum et Aſteriarum craſſiores ſunt lamellis trochlearum.

β) Trochi et Entrochi non minus quam Aſteriae vndique aequali gaudent craſſitie, trochleae non raro verſus axem ſatis craſſae, verſus marginem tenuiſſimae obſeruantur.

γ) Trochi in Entrochis et Aſteriis columnaribus immediate ſe inuicem tangunt, ita vt nulla ſpatia vacua intermedia obſeruentur, trochleae contra a ſe inuicem diſtant, et plerumque non niſi mediante axe inuicem cohaerent.

δ) Nunquam trochleae perforatae viſae ſunt, trochi complures.

Ad primam et ſecundam igitur differentiam quod attinet, negandum omnino non eſt, graciles et tenues ſemper obſeruari lamellas trochlearum, cuius tamen rei cauſa in eroſione et deſtructione quaerenda eſt, nempe hi Entrochi petrefacti non tantum reſpectu diametri ſui horizontalis verum quoque perpendicularis, eroſionem patiuntur. Haec eroſio nunc partibus ſalino acidis, in non nullis

nullis vero aquae tantum adſcribenda eſt, et a peripheria verſus centrum progreditur. Videmus ideo in nonnullis exemplaribus lamellas a, ſe inuicem plane ſeiunctas eſſe, vt Tab. XII. fig. 1. *a*. et in reliquis fere omnibus, in quibus vbique axes nunc integrae nunc autem diffractae cernuntur. Hanc eroſionem vero, vere his lapidibus contigiſſe, monſtrant *a*) cauitates cylindricae et gyratae, quibus trochleae inſidere ſolent, quae gyros et annulos habere non poſſent, niſi diameter trochlearum initio maior fuiſſet. *b*) Apparet Tab. XII. fig. 4. *d*. axis, in cuius medio veſtigium exiguum rotundum lamellae eroſae adhuc haeret. His rationibus etiam obiectio tertia reuelli poteſt. Quod ad quartam attinet, icon Tab. XII. fig. 1. *b*. tres lamellas circa axin verſatiles monſtrat, quae ſi axin diffringere placeret, ſingulae lamellam trochlae perforatam monſtraturae forent. Ex his omnibus patet, diuerſitatem et diſcrimen lapides noſtros trochleatos inter et Entrochos columnares, nullius fere momenti eſſe, et non niſi caſu oriri. Stringentiſſimum autem argumentum, vt mihi quidem videtur, in trochlea martiali latet, Tab. XII. fig. 5. vbi in *c*. vera ſtructura ſtellata Entrochi deprehenditur.

Tab XII. Fig. 1. — Fig. 4. — Fig. 1. — Fig. 5.

§. 10.

Antequam colophonem huic diſſertationi imponam, tribus quod aiunt verbis tantum, meam de origine Trochorum, Entrochorum, Aſteriarum ſingularum et columnarium ſententiam adhuc dicam. In antecedentibus iam plus vna vice haec petrefacta

partibus diffractis ſtellae marinae cuiusdam annumeraui. Cum vero complures harum ſtellarum dentur ſpecies, definiendum erit, ad quam commodiſſime ſint referenda. Mea quidem ſententia ad eas proxime pertinet ſpecies, quae petrefactae, Encrinos conſtituunt. i. e. ad ſtellas marinas πολυσακτίνοδας, petiolo inſidentes, et ſcopulis in fundo maris adhaerentes, *Olai Magni*, *Huguefii*, et *Mylii*, et quidem ad partes petiolorum earum, quippe quibuscum optime conueniunt. Ideoque in lapidibus noſtris trochleatis lamellae erunt articulationes eroſae, axes vero cauitates, quibus, dum animal adhuc viueret, neruus motorius tanquam vaginae inerat, materia lapidea repletae. Hanc opinionem non omni carere probabilitate vel ex eo patet, quod ipſi Trochi et Entrochi mox perforati, mox vero ſolidi et integri reperiantur.

§. 11.

Dicendum nunc adhuc erit de phaenomeno quodam in lapidibus trochleatis quamuis rarius obuio, nempe de trochlea. Clar. *Schultzius* eius mentionem fecit in neuen geſellſchaftlichen Erzählungen Tom. I.
Tab. XII. Fig. 2. p. 155. et figuram eius Tab. XII. fig. 2. *e*. exhibet. Quid de hoc phaenomeno ſentiam, paucis exponam. Videtur eſſe ramus petioli in eo adhuc latens, qui cum tempore forſitan excreuiſſet, et petrefactus Entrochum ramoſum conſtituiſſet, vel vti Cl. *Walchius* loqui amat, radicem Encrini, et ideo forte non plane abſurdum foret, hoc genus ſtellae marinae cum *Elliſio* pro ſpecie polypi habere, id quod tamen illis

illis decidendum relinquam, qui in hiſtoria polyporum me ſunt verſatiores. Optandum foret, vt inter piſcatores et nauigatores, inprimis Archangelopolitanos, piſcaturae balaenarum aliorumque piſcium operam nauantes, nonnulli forent, qui occaſione data in mari ſeptentrionali fundum eius curioſius inueſtigarent, fortaſſis penitius genera ſtellarum marinarum, capitum Meduſae et polyporum cum tempore cognoſceremus. Aſt haec ſine dubio diu adhuc ad pia vota pertinebunt.

§. 12.

Pergo nunc ad petrefactum mihi plane incognitum, et a nemine auctorum, quantum ego quidem norim, deſcriptum. Figuram eius exhibet Tab. XII. fig. 9. non minus quam veram magnitudinem. Primo intuitu piſcis videri poterat, in quo *a.* caput repraeſentat, aſt cum in *b.* et *c.* teſta naturalis conchylii in Originali adhuc haereat, omnino ad Conchylia referendum hoc petrefactum mihi videtur. *d.* ſunt duae protuberantiae, an Cornua, an Siphunculi fuerint, quibus oculi inhaeſerunt, affirmare non audeo. In *e.* apparent veſtigia ſquamarum impreſſa. Si partem poſteriorem ſpectemus, egregie cum concha triloba, quam ſub titulo *Cacadu* Muſchel (*o*) deſcripſi, conuenit, vid. Tab. XII. fig. 8. Forſitan, quam eo tempore pro concha ſingulari habui, fragmentum tantum huius petrefacti eſt. Confirmari haec mea ſententia eo magis videtur, ſi petrefa- Tab. XII. Fig. 9. Fig. 8.

(*o*) Verſuch einer Geſchichte von Flözgebürge pag. 72.

Tab. XI. Fig. 8. 9. trefactum Tab. XI. fig. 8. 9. conſideramus, quod quaſi incuruatum et complicatum hoc noſtrum petrefactum, de quo nobis ſermo eſt, exhibet. Ex ambobus ideo lateribus deſignari curaui. Et propterea Fig. 8. fig. 8. *a.* protuberantias iſtas, *b.* ſulcos parallelos, *c.* Fig. 9. caput exhibet, cum contra fig. 9. partem poſteriorem cum cauda repraeſentet. Materia, ex qua conflatum eſt hoc petrefactum, eſt lapis corneus ſubluteſcens, locus natalis latet, ex Heluetia tamen eum accepi. Lapis ipſe antecedens eſt calcareus ex albo cinereus, et quod dolendum, in inferiore parte politus. De patria eius non eſt quod dicam, cum eum hic Petropoli, vel abiectum, vel, quod vero ſimilius, perditum ſub dio invenerim. Cum igitur nihil certi de hoc noviter inuento petrefacto aſſeuerare queam, rogo atque obteſtor omnes Hiſtoriae naturalis ſcrutatores, vt, quae de hoc ſubiecto ſentiant, vel priuatim mecum, vel publice cum Imperatoria Academia Scientiarum, beneuole communicare non dedignentur.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

DISSER-

Tab. XI. Fig. 8. 9. treſactum Ta.
quaſi incuruat
factum, de qı
bus ideo late
Fig. 8. fig. 8. *a.* prot
Fig. 9. caput exhibet,
cum cauda repr
hoc petrefactum
natalis latet, e
ipſe antecedens
dolendum, in
non eſt quod d.
iectum, vel, qı
venerim. Cum
to petreſacto
omnes Hiſtoria
ſubiecto ſentiı
cum Imperatc
municare non

)ISSERTATIO
RONOMICA
PARALLAXEOS IN TRANSITV
ETARVM SVB SOLE.

Auctore

T. AEPINO.

; Planetae ſub Sole phaenomena,
)ectabilia, determinantur, per ap-
› Solis diſco ſemitam, eiusque po-
›nis emerſionisque momenta; ex
ad omnes, quae circa eiusmodi
ınt, quaeſtiones, facile responde-
ıendum, quod hic tractamus ne-
l emerſionis immerſionisque mo-
e, notamus, diſtingui poſſe in im-
›ne Planetae momenta tria praeci-
nempe limborum Solis ac Planetae
:rſionem ac emerſionem centri Plane-
.m marginum interiorem. Per ſe au-
ı contactum exteriorem, cum apparens
ı Planetae ac Solis, ſummae; contactum
cum eadem haec diſtantia, differentiae ſe-
.um Solis ac Planetae; tandemque immer-
emerſionem centri, dum haec diſtantia Solis
:tro apparenti aequalis eſt. Quaeſtio itaque,

DISSERTATIO
ASTRONOMICA
DE EFFECTV PARALLAXEOS IN TRANSITV PLANETARVM SVB SOLE.

Auctore

F. V. T. AEPINO.

Praecipua tranſitus Planetae ſub Sole phaenomena, ex dato loco ſpectabilia, determinantur, per apparentem Planetae ſub Solis diſco ſemitam, eiusque poſitionem, et immerſionis emerſionisque momenta; ex quibus nempe datis, ad omnes, quae circa eiusmodi tranſitum inſtitui poſſunt, quaeſtiones, facile reſpondetur. Cum ad expediendum, quod hic tractamus negotium, ſufficiat, ad emerſionis immerſionisque momenta ſolum reſpicere, notamus, diſtingui poſſe in immerſione ac emerſione Planetae momenta tria praecipua: contactum nempe limborum Solis ac Planetae exteriorem, immerſionem ac emerſionem centri Planetae, ac contactum marginum interiorem. Per ſe autem patet, fieri contactum exteriorem, cum apparens diſtantia centri Planetae ac Solis, ſummae; contactum interiorem, cum eadem haec diſtantia, differentiae ſemidiametrorum Solis ac Planetae; tandemque immerſionem ac emerſionem centri, dum haec diſtantia Solis ſemidiametro apparenti aequalis eſt. Quaeſtio itaque,

de immerſione ac emerſione Planetae, ad hoc Problema generale reducitur:

Inuenire momentum, quo centrorum Solis ac Planetae diſtantia, ex dato puncto videatur, ſub angulo dato, quem in ſequentibus δ vocabimus.

Vt ſolutio huius Problematis minori negotio abſolui queat, in anteceſſum notare generalia quaedam, conueniens erit. Concipiatur planum FG, per Solis A, Planetae B, ac Terrae centrum tranſiens, angulus vero, ad punctum C, a rectis CA, CB comprehenſus $= \delta$, ſtatimque patet, videri equidem ex puncto C, centrorum Solis ac Planetae elongationem ſub angulo δ, at dari praeterea infinitum punctorum numerum, ex quibus haec elongatio, eodem momento, ſub eodem conſpicitur angulo. Rotato enim primum angulo ACB circa rectam AB, punctum C deſcribit circulum Cc, cuius peripheriae puncta omnia rectam AB ſub eodem vident angulo. Quodſi deinde in plano, per triangulum ACB traiecto, in quocunque hoc ſitu conſtitutum ſit, deſcribatur circulus, per puncta A, B et C, aliusque ad oppoſitas partes, A*k*B*m*, priori aequalis; quodcunque aſſumatur in arcubus AHCB, et A*k*B punctum, eadem, qua prius dicta, praeditum erit proprietate, cum contra, quae in arcubus A*m*B, A*n*B reperiuntur puncta, rectam AB non ſub angulo δ, ſed ipſius complemento ad 2 rectos conſpiciant. Conſtat ex his, ſi quaeratur punctum, ex quo diſtantia AB videtur ſub angulo δ, infinita dari puncta huic problemati ſatisfacientia, locari vero haec puncta omnia,

Tab XIII. Fig. 1.

in

in ſuperficie quadam, cuius, a qua quippe problematis noſtri ſolutio pendet, natura breuiter nobis excutienda erit. Non autem opus eſt, vt exactam hic inſtituamus diſquiſitionem, cum principaliores, quarum hic vſus erit, huius ſuperficiei proprietates, et ſine inſtituto calculo facile pateant. Liquet nempe ſtatim, ſi haec ſuperficies ſecetur plano per AB quocunque, figuram interſectionis fore 2 circulos ABH, AB*K*, inter ſe aequales, in punctis A et B ſe mutuo conſtanter interſecantes; ſectione autem ad planum FG ac rectam AB normali, itidem produci 2 circulos, aſt concentricos, centrum habentes in recta AB, ſi opus, producta; vnde, quod tota haec ſuperficies rotatione circuli ABH ſuper recta AB generetur, ſtatim patet, quaeque ſit curuaturae ipſius indoles ac natura, imaginari facile licet. Eadem ex calculo concludere licuiſſet, quem ſi quis inſtituere voluerit, ad easdem perueniet concluſiones. Fateor equidem prodituras pro interſectionibus planorum, aequationes quarti gradus, vnde colligere quis poſſet, interſectiones non eſſe circulares, ſed exhibere lineas quarti ordinis. Aſt notandum, fore has curuas, quas exhibent aequationes iſtae, ex genere earum, quas Ill. *Eulerus* complexas vocauit; non enim lineam quarti ordinis, ſed 2 circulos comprehendunt.

Superficies haec, quam latius nunc conſiderauimus, cum comprehendat omnia puncta, quae Planetae a Solis centro diſtantiam, vno eodemque momento, ſub angulo δ conſpiciunt, fieri non poterit, vt vllum Telluris punctum, elongationem Planetae ac Solis

ſub angulo dicto obſeruet, niſi ſuperficies Terrae ſuperficiei hic euolutae occurrat, ipſamque vel tangat, vel ſecet, quare problema noſtrum huc redit: vt, *quonam momento datum Telluris punctum in interſectione huius ſuperficiei cum globo terreſtri reperiatur?* inueſtigandum ſit. Ne vero diſquiſitio noſtra ad ratiocinationes atque formulas iuſto complicatiores nos deducat, quod euitari vix poſſet, ſi problema, vti propoſitum eſt, ſoluere conaremur, primum non totum Terrae globum, aut vniuerſam eius ſuperficiem, ſed ſolum circulum, qui producitur interſectione globi terreſtris, cum *plano* per Solis, Terrae ac Planetae centra tranſeunte, conſiderabimus, et quomodo, pro quouis in huius circuli plano reperiundo puncto, problema ſolui queat, inquiramus.

Tab. XIII. Fig. 2. Concipiatur itaque conſtanter planum, per Solis A, Planetae B, ac Terrae centrum *c* traiectum, et formabit hoc planum interſectione cum ſuperficie ſaepius dicta, 2 circulos ABH, ABK, cum Terra vero, circulum T. Conſtat hic ſine negotio, punctum *g*, in circuli T ſuperficie vtcunque adſumtum, videre Solis ac Planetae elongationem ſub angulo δ, dum vel circulo ABH, vel ABK occurrit. Fieri hoc poteſt in vtroque horum circulorum duplici vice, vel circa A, vel ex altera parte circa B. Aſt facile patet, priorem caſum pertinere ad coniunctiones Planetae cum Sole ſuperiores; diſtat enim tunc Planeta magis quam Sol a Terra, vnde in praeſenti, non niſi ad occurſus circa B contingentes, quippe qui valent pro coniunctionibus inferioribus, reſpiciendum nobis eſt.

Licet

Licet iam ad calculum ipſum progredi, antea autem, quam hoc negotium aggrediamur, notandum erit, id quod vel ſolo figurae intuitu patet, fieri immerſionem Planetae, ſi punctum g circulo ABH, obſeruatori in ſole conſtituto ad ſiniſtram poſito, emerſionem vero, ſi alteri circulo ABK occurrit. Adaptabimus calculum noſtrum immerſioni, et quomodo formulae pro immerſione repertae immutandae ſint, vt emerſioni aptentur, poſtea indicabimus.

Denotemus igitur in circulo ABH rectam AB per A, ac angulum AgB per δ, ductaque ex centro C recta CB, aliaque CD ad AB perpendiculari, erit angulus $BCD = \delta$, vnde reperitur CB, ſeu radius circuli $ABH = \frac{A}{2\,ſin.\,\delta}$, ac $CD = \frac{A}{2\,tang.\,\delta}$. Quodſi nunc ex quouis circuli ABH puncto F demittatur ad rectam AB perpendicularis FE, ſumendo FE ac AE pro coordinatis, ac vocando, $FE = y$, $AE = x$, ex circuli proprietatibus notiſſimis, obtinetur haec, circulum ABH ad rectam AB relatum, definiens aequatio, $y^2 + x^2 - Ax - \frac{Ay}{tang.\,\delta} = 0$. Sit nunc in circulo T, quem planum, per Solis, Terrae, ac Planetae centra tranſiens, in Terra deſignat, datum punctum g, cui occurrat circulus ABH, ductaque recta Ac, Solis ac Terrae centra connectente, ac diametro Terrae huic rectae perpendiculari st, ex puncto g ad vtramque harum linearum demittantur perpendiculares gm et gn, quas r et v vocabimus. Dicatur angulus $BAc = \Phi$, ac diſtantia Solis a Terra $cA = D$, eritque

1) ob $gm : lm = 1 : \text{tang.}\Phi$, $ml = r\,\text{tang.}\Phi$, hinc $lA = D - v + r\,\text{tang.}\Phi$, vnde obtinetur, $Ak = (D - v)$ $\text{coſ.}\Phi + r\,\text{ſin.}\Phi$.

2) Cum ſit $gm : gl = \text{coſ.}\Phi : 1$, hinc $gl = \frac{r}{\text{coſ.}\Phi}$, reperitur $kg = kl - gl = (D - v)\,\text{ſin.}\Phi + r\,\text{tang.}\Phi\,\text{ſin.}\Phi$ $- \frac{r}{\text{coſ.}\Phi} = (D - v)\,\text{ſin.}\Phi + \frac{r\,\text{ſin.}\Phi^2 - r}{\text{coſ.}\Phi} = (D - v)\,\text{ſin.}\Phi$ $- r\,\text{coſ.}\Phi$.

Quodſi itaque hi valores in ſupra reperta aequatione loco x et y ſubſtituantur, prodibit aequatio, pro eo caſu, vbi ex puncto g Planetae in Solis diſcum immerſio conſpicitur. Licet autem in hac aequatione negligere omnes terminos, in quibus v et r, vel ſingulae, vel coniunctim, ad plures quam vnam dimenſionem aſcendunt, cum v et r nunquam radium Terrae ſuperent, hinc admodum ſiant paruae, ſic vt pars pq circuli ABH, in circulum T incidens, pro recta tuto haberi queat. Prodit vero tunc ſequens aequatio:

$$(D^2 - 2Dv)\,\text{ſin.}\delta - A(D - v)\,\text{ſin.}(\Phi + \delta) + Ar\,\text{coſ.}(\Phi + \delta) = 0.$$

quam adhuc concinniorem reddere licet, ponendo $D : A = 1 : \mu$; haec enim ratio ex theoria Solis et Planetae data cenſenda eſt. Fit autem tunc

$$(D - 2v)\,\text{ſin.}\delta - \mu(D - v)\,\text{ſin.}(\Phi + \delta) + \mu r\,\text{coſ.}(\Phi + \delta) = 0.$$

Similis per omnia calculus pro emerſione inſtitui poteſt, ac ſimilis prodit formula, non niſi in eo ab hacce, quam pro immerſione eruimus, diuerſa, quod vltimus terminus ſiat negatiuus, aſſumendo nempe conſtanter, vti antea fecimus, r poſitiue cadere a centro circuli T verſus dextram.

Adapta-

Adaptari ſtatim poteſt haec formula, ad immerſionem ac emerſionem, vti ex Terrae centro conſpiciuntur. Cum enim ſit pro centro Terrae v et $r = 0$, valebit pro vtroque caſu haec formula:

$D \sin.\delta - \mu D \sin.(\Phi + \delta) = 0$, ſiue $\sin.(\Phi + \delta) = \frac{\sin.\delta}{\mu}$, quare, dum Φ eum adipiſcitur valorem, vt huic aequationi ſatisfaciat, immerſio ac emerſio pro centro Terrae contingere debent. Eruendum itaque eſt momentum, quo Φ hunc valorem accipit, quod, cum tabulae aſtronomicae longitudinem ac latitudinem Planetae heliocentricam ad datum momentum ſuppeditent, facili negotio fieri poteſt.

Sit planum Aml, planum Eclipticae, ac in eo AT, recta, Solis ac Terrae centra connectens, in n vero extra hoc planum, locus Planetae, et per hunc ac Solem traductum planum nAl Eclipticae perpendiculare. Erit igitur $nAm = \Phi$, nAl, Planetae latitudo heliocentrica, quam λ, et mAl, differentia longitudinum Terrae et Planetae heliocentricarum, quae angulus commutationis appellari ſolet, quem L vocabimus, et ex praeceptis trigonometriae ſphaericae erit $\cos.\Phi = \cos.L \times \cos.\lambda$. Cum igitur ad quoduis momentum dentur L et λ ex tabulis, ex his vero per formulam modo indicatam Φ obtineri queat, methodis, alias ſimilibus in caſibus Aſtronomis vſitatis, non difficulter inueſtigari poterit momentum quo Φ eum adipiſcitur valorem, vt ſit $\sin.(\Phi + \delta) = \frac{\sin.\delta}{\mu}$, quo nempe Planeta ex Terrae centro in Solis diſcum incurrere, aut ipſum derelinquere, conſpicietur. Ex iisdem principiis, quibus hic vſus ſum, angulus lmn, qui aequatur inclinationi planorum lmA, et nmA ad Tab.XIV. Fig. 2.

ſe

ſe inuicem, reperiri poteſt, quare cum aliquis eius futurus ſit in ſequentibus vſus, hic annotamus, dicto hoc angulo I, fore $\text{tang.}\, I = \frac{\text{tang.}\,\lambda}{\text{ſin.}\, L}$.

Deriuari poſſunt ex eadem formula ſupra eruta adhuc duo momenta alia, in tranſitu Planetae ſub Sole maxime notabilia. Liquet ex ſupra adductis, locum, qui primus videt immerſionem, eſſe eum, vbi ſuperficies, omnia puncta, quae Planetae a Sole elongationem conſpiciunt, ſub angulo δ comprehendens, Tellurem interius, ſeu concauitate ſua, ac e contra eum, qui vltimus videt immerſionem, iſtum, in quo dicta ſuperficies Tellurem exterius conuexitate ſua contingit, contrarium vero valere pro emerſione. Facile autem perſpicitur, fieri hos contactus in plano, per Solem, Terram atque Planetam tranſeunte, vnde formula noſtra etiam hiſce caſibus aptari poteſt. Inueni autem dicto radio terrae ϱ, pro contactu exteriore, $\text{ſin.}\,(\Phi + \delta) = \frac{D\,\text{ſin.}\,\delta - \mu\varrho}{\mu D}$, ac pro interiori, $\text{ſin.}\,(\Phi + \delta) = \frac{D\,\text{ſin.}\,\delta + \mu\varrho}{\mu D}$, quare methodus determinandi primum et vltimum immerſionis aut emerſionis momentum ſatis conſtat.

Obtinuimus iam ſcopum, quem primum nobis propoſuimus, vnde nunc ad alteram problematis partem procedendum nobis eſt, et inquirendum, quomodo pro dato quouis ſuperficiei terreſtris puncto problema reſolui queat. Diſtinguendi autem hic erunt aliquot caſus, vti ex ſequenti conſideratione patet.

Immenſae ſuperficiei, in qua locantur puncta omnia, quae eodem momento, eandem vident Planetae a Sole elongationem, non niſi pars minima terreſtri

reſtri globo occurrit. Generatur vniuerſa haec ſuperficies rotatione circuli ABH circa rectam AB; dum vero hoc fit, pars huius circuli pq, in Terram incidens, cum pro recta haberi queat, deſcribit zonam quandam, aut annulum conicum, pertinentem ad ſuperficiem coni recti, axin habentis rectam AB. Facile autem patet, ſolum hunc annulum conicum, praetereaque nullam aliam totius ſuperficiei ſaepius dictae partem, ſuperficiem Telluris ſecare poſſe, vnde quiuis Telluris locus tunc immerſionem aut emerſionem Planetae conſpiciet, dum in communi interſectione ſuperficiei terreſtris annulique huius verſatur. Diametri baſium huius annuli non difficulter inueſtigantur; ſi enim angulus BAp vocetur ψ, angulus vero BAq dicatur ψ', erit ſemidiameter baſeos ſuperioris, ſeu Soli propioris, proxime $= D\,\text{ſin.}\,\psi$, baſeos vero inferioris $= D\,\text{ſin.}\,\psi'$. Tab XVI. Fig. 2.

Liquet autem, vel ex ſolo figurae intuitu, vtrumque horum angulorum ψ et ψ' ab angulo Φ perparum differre. Differentia enim haec angulorum ψ et ψ' ab angulo Φ nunquam ſuperare poteſt parallaxin Solis horizontalem, ſiue angulum, ſub quo ſemidiameter Terrae ex Solis centro conſpicitur, vnde neceſſario perpetuo eſt admodum parua. Modo itaque Φ non ſit admodum paruum, differentiam hanc negligere, et vtriusque baſeos ſemidiametrum a valore $D\,\text{ſin.}\,\Phi$ ſenſibiliter non aberrare, ſupponere licebit, ſaltem de relatiua vtriusque ſemidiametri ad radium Terrae magnitudine, ex valore $D\,\text{ſin.}\,\Phi$ tuto ſatis iudicari poterit. Tres autem diſtinguere tunc licet caſus,

ſi haec comparatio inſtituatur, vel enim D ſin Φ tantum eſt, vt eius ratio ad radium terrae pro inaſſignabili haberi queat, aut quanquam haec ratio ſit aſſignabilis, tamen eſt adhuc admodum magna, aut tandem ratio haec fit admodum parua. Priori caſu, curuatura annuli conici, in perparua iſta, quae globum telluris ſecat, ipſius portione non erit ſenſibilis, ſed annuli iſta pars pro plana haberi poterit.

Euoluamus, antequam ad reliquos tranſeamus, hunc caſum paulo attentius. Cum hocce caſu curuatura annuli, in ea parte, quae globum terreſtrem ſecat, negligi queat, pro plano per pq tranſeunte, ad planum circuli T perpendiculari haberi poteſt. Loca itaque omnia, quae eodem momento, Planetae in Solis diſcum immerſionem, aut ex ipſo emerſionem conſpiciunt, in interſectione plani, cum globi terreſtris ſuperficie, hinc in circulo quodam, in telluris ſuperficie ducto, ſita erunt. Admodum igitur facilis, ac expedita erit hoc caſu problematis noſtri ſolutio. Si nempe circulus ADB, deſignet circulum T, qui interſectione plani, per Solem, Terram ac Planetam tranſeuntis, cum terreſtri globo producitur, punctum ſuperficiei terreſtris E, cum puncto F, quod deſignatur demiſſa ex E ad planum ABD perpendiculari, immerſionem ſimul conſpiciet. Nil itaque opus eſt, niſi vt recta GF ac HF, ſitum puncti F, quod quouis momento puncto E reſpondet, determinantes eruantur, earumque valores in ſupra euolutam formulam introducantur. Patet autem ad hoc negotium perficiendum via, ſequenti ratione:

Tab. XIV. Fig. 4.

Ex

Ex theoria proiectionum orthographicarum, quarum in vniuerſa Aſtronomia frequens eſt vſus, ſatis conſtat, ſi circulus *epl* repraeſentet, plani ad Eclipticam et Terrae Solisque centra iungentem lineam, perpendicularis, cum globo terreſtri; *el* vero huius plani cum ipſo Eclipticae plano interſectionem; ſique dicatur radius Telluris $= \varrho$, obliquitas Eclipticae $= \omega$, Solis a ſolſtitio aeſtiuo diſtantia $= \varepsilon$; proiectionem *m* Poli borei in hoc planum, determinari ita, vt ſit $fc = \varrho$ $\cos. \omega$, *fm* vero ad *fc* perpendicularis ex puncto *m* $= \varrho \sin. \omega \sin. \varepsilon$. Eſt autem tunc ſinus anguli, ſub quo axis Telluris ad planum *epl* inclinatur, qui angulus declinationi Solis ſemper aequatur, $= \sin. \omega \cos. \varepsilon$, quem angulum compendii cauſa per α deſignabimus. Quodſi vlterius nunc detur punctum quoddam ſuperficiei Telluris, cuius complementum latitudinis ſit $= \gamma$, elongatio vero a meridiano, quae ex loci longitudine geographica ac tempore innoteſcit, $= e$, punctum *k*, in quod proiicitur hoc punctum, determinatur, faciendo $cb = \varrho(\cos \gamma \cos. \alpha - \sin. \gamma \sin. \alpha \cos. e)$, et *bk* ad *cb* perpendicularem $= \varrho \sin. \gamma \sin. e$. Tab. XIV. Fig. 5.

Determinant formulae iſtae puncti cuiusuis in planum Eclipticae perpendiculare proiectionem. Non difficulter vero hinc deducuntur quoque aequationes, quarum ope punctum iſtud in ipſum Eclipticae planum proiicitur. Concipiatur enim, ex *k* demitti ad rectam *el* perpendicularem *kg*, dictoque angulo $fcm = \psi$, reperietur $cg = cb \sin. \psi + kb \cos. \psi$, ac $kg = cb \cos. \psi - kb \sin. \psi$. Si igitur ſit *apbel* hemiſphaerium Telluris, *aebl* Eclipticae planum, *ab* rectam Solis ac Terrae Fig. 5. Fig. 6.

 centra

centra iungentem, indicante; k vero puncti dati m in planum eclipticae perpendiculare, epl proiectio, erit $st = cg = ch$ ſin. ψ + kh coſ ψ, ct vero $= km$ $= \sqrt{\varrho^2 - cg^2 - kg^2} = \sqrt{\varrho^2 - ch^2 - kh^2}$.

Tab XIV. Fig. 7. Sit tandem planum AB, planum Eclipticae, EF planum, per Solis, Terrae ac Planetae centra traiectum, ac in c centrum Terrae, erit, retentis in hac figura iisdem litteris, quibus pro antecedenti vtebamur, $ct = v = \sqrt{\varrho^2 - ch^2 - kh^2}$, ac tq ſiue $r = ch$ ſin. $(\psi - I)$ + kh coſ. $(\psi - I)$ indicante I angulum inclinationis planorum AB ac EF ad ſe inuicem, (qui quomodo inueſtigetur, ſupra iam indicauimus) ac intelligendo rectam mq, ex puncto m, cuius proiectio quaeritur, in planum EF perpendicularem.

Aſſignando itaque v et r, modo repertos valores, formula

$(D - 2v)$ ſin. $\delta - \mu (D - v)$ ſin. $(\Phi + \delta) \pm \mu r$ coſ $(\Phi + \delta) = 0$,

immerſionem ac emerſionem, pro puncto quouis ſuperficiei terreſtris determinabit. Nil enim opus eſt, niſi vt momentum, quo L et λ, angulus nempe commutationis, et latitudo planetae heliocentrica, eos habent valores, vt huic aequationi ſatisfiat, inueſtigentur. Verum equidem eſt, fieri vix poſſe, ob calculi complicationem, vt directe ſcopum hunc conſequamur, aſt indirecta methodo in vſum vocata, ſatisfacere problemati facilius licebit. Optima videtur methodus, ſi ſequenti ratione procedamus: Inuentis prius momentis, quibus immerſio ex Terrae centro conſpicitur, quod T vocemus, binisque iſtis momentis R et S, quae

ſupra

ſupra primum et vltimum immerſionis momentum vocaui, fiant aliquot hypotheſes: contingere nempe ſupponatur immerſio pro dato loco, momentis $T + \tau$, et $T + \theta$, quae vero momenta intra limites R et S cadere debent. Ad haec tempora determinentur, v, Φ, ac I, et ex poſteriori, angulo nempe I, inueſtigetur r dato loco et tempori reſpondens. Valores iſti in formulam ſupra erutam introducti, ſi ipſam euaneſcere non faciant, difficile non erit, interpolando quaerere tempus, quod eiusmodi pro v, Φ, I ac r, ſuppeditat valores, qui formulam noſtram ad zero redigunt, ſicque problema propoſitum ſoluunt. Idem de emerſionis momento ſtatuendum eſt.

Occaſionem praebent hae diſquiſitiones eleganti cuidam problemati reſoluendo, quod, praeterquam quod et per ſe huc pertineat, laborem in ſuperiori calculo deuorandum inſigniter imminuere valet, praeſertim ſi non pro vnico, ſed pro pluribus locis, immerſionis atque emerſionis momenta eruenda ſunt. Supra iam annotaui, plura ſemper eſſe Telluris loca immerſionem ac emerſionem ſimul conſpicientia, omnia vero iſta loca deprehendi in circulo quodam in Telluris ſuperficie ducto. Fieri itaque poteſt, vt iſti circuli, ex quorum perimetro immerſio aut emerſio dato videntur momento, actu deſignentur, vel in globo artificiali, vel in plano, totius Telluris proiectionem exhibente. Ad hoc vero opus eſt, vt cuiusuis horum circulorum tam polus, quam perimetri ipſius a polo diſtantia, determinetur, quorum igitur vtrumque quomodo inueſtigetur, diſquirendum nobis eſt.

Tab. XIV. Fig. 8. Sit itaque circulus afp interſectio plani, per Solem, Planetam, Terramque tranſeuntis, cum globo terreſtri, ſitque pq proiectio circuli hic deſcribendi in hoc planum. Ex centro b ad rectam pq, ducta perpendiculari brm, erit punctum m, Polus hic quaeſitus. Vt igitur hoc punctum determinetur, inueſtigandus erit angulus bnp. Liquet vero, cum recta qp definiatur aequatione:

$$(\mathrm{D}-2v)\,\text{ſin.}\,\delta-\mu(\mathrm{D}-v)\,\text{ſin.}(\Phi+\delta)\pm\mu r\,\text{coſ.}(\Phi+\delta)=0.$$

fore $\text{tang.}\,bnp=\frac{2\,\text{ſin.}\,\delta-\mu\,\text{ſin.}(\Phi+\delta)}{\pm\mu\,\text{coſ.}(\Phi+\delta)}$, et cum angulus mbf ſit ipſius bnp complementum, eſſe $\text{tang.}\,mbf=\frac{\pm\mu\,\text{coſ.}(\Phi+\delta)}{2\,\text{ſin.}\,\delta-\mu\,\text{ſin.}(\Phi+\delta)}$. Cognito igitur angulo mbf, Poli hic quaeſiti diſtantia a puncto f, cui Sol dato momento verticalis eſt, arcus nempe fm, ſimul innoteſcit. Determinari equidem iam poteſt, dato arcu fm, locus puncti m, cum autem nec in ſphaera artificiali, nec in proiectione globi terreſtris ſtereographica, qua communiter vti ſolemus, facile determinare liceat punctum quoddam, niſi per datam ipſius longitudinem et latitudinem, vt pro Polo hic quaeſito haec determinemus neceſſe eſt. Fig. 9. Sit igitur Terrae Polus boreus in P, punctum, cui Sol verticalis, in E, et punctum, cuius longitudinem latitudinemque quaerimus, in p, ac tranſeuntibus circulis maximis per haec tria puncta, in triangulo ſphaerico PEp, ex latere Pp latitudo, ac ex angulo EPp longitudo puncti p determinatur. Cognita autem ſunt in hoc triangulo latera Ep, quod modo inueſtigare docuimus, atque PE, quod ex theoria Solis facile innoteſcit. Nec minus facile

cile habetur angulus PEp, a lateribus PE ac Ep incluſus. Cum enim hic angulus ſit inclinatio plani meridiani, ad planum, per Solem, Terram atque Planetam traiectum, erit = angulo $mcs = 90° - fcm + I$. Tab. XIV. Fig. 5. Ex his vero datis, latus Pp, ac angulus EPp, quomodo deriuentur, ex trigonometria ſphaerica ſatis conſtat. Inuento hac ratione Polo circuli hic deſcribendi, ſupereſt, vt perimetri a Polo diſtantia quoque inueſtigetur. Opus autem non eſt, vt per calculum quaeratur, cum conſtructio ſatis exactam ſuppeditet ſolutionem. Facile haec abſoluitur: cum enim ſit $br = \frac{D\, ſin.\, \delta - \mu D\, ſin.\, (\Phi + \delta)}{\pm \mu\, coſ.\, (\Phi + \delta)}$ (aſſumimus nempe tang. bnp, a ſinu huius anguli non ſenſibiliter differre, quod fieri licet, quoniam pro Planetis inferioribus, Mercurio et Venere, caſuque, quem hic tractamus, angulus bnp ſatis paruus eſt) angulusque bpn iam ſupra inuentus ſit, quomodo conſtructio inſtituenda ſit, per ſe ſatis conſtat.

Sufficiunt haec ad deſcriptionem circuli, qui hic deſideratur, in ſphaera artificiali, ſi vero in proiectionem ſuperficiei terreſtris transferendus eſt eiusmodi circulus, artificiis quibusdam opus eſt, quae vero, cum ratio ipſorum ex principiis, quibus innititur, qua communiter vtuntur, ſtereographica telluris proiectio, facile pateat, ſolummodo adduxiſſe, ſufficiet.

Concipiatur proiectio hemiſphaerii telluris ſtereographica, deſcripta in circulo ABEQ, vbi EQ aequatoris, BA meridiani, in quo oculus conſtituitur, proiectionem exhibet. Fig. 10. Determinetur ex data longitudine ac latitudine punctum, quod eſt circuli deſcribendi polus,

polus, ſitque hoc punctum *p*. Ducatur recta C*p*, et C*n* fiat = C*p*. Ex B ducatur per *n* recta B*nr*, ac ex *r* vtrinque abſcindantur arcus *rs* et *rq*, diſtantiae perimetri circuli hic deſcribendi a polo ſuo aequales. Ducantur porro ex B, per *q* et *s* rectae B*q*, B*s*, quae EQ, ſi opus, productam ſecent in *t* et *v*. Recta *vt* biſecetur in *k*, ac in recta C*p* fiat C*f*=C*k*, et *fg*=*vk*. Quodſi tunc centro *f*, radio *gf*, deſcribatur circulus *lgm*, factum erit, quod quaerebatur.

Qui proiectionum theoriam modice ſolum *callet*, fundamenta huius operationis leui negotio detegere poterit, ſimulque facile perſpiciet, ſi contingat, punctum *p* non cadere in hemiſphaerium EBQA, punctum, polo *p* diametraliter oppoſitum, in vſum vocandum eſſe; nec minus, ſi circulus non comprehendatur totus ab hemiſphaerio EBQA, operationem ſimilem, pro deſcribenda reliqua circuli parte, in hemiſphaerio altero inſtituendam eſſe.

Methodo hac ad quoduis momentum, loca, quae Planetae in Solis diſcum immerſionem, aut ex ipſo emerſionem, conſpiciunt, graphice exhiberi poterunt. Quo vero ex tali proiectione, omnem, quem intendimus, vſum obtinere queamus, ita in deſignatione horum circulorum, vt procedamus, conueniens erit, vt

1) punctum, quod primum, et quod eſt vltimum in terrae globo, eorum, quae immerſionem aut emerſionem conſpiciunt, deſignentur, quod quomodo fieri queat, ſatis ex ſuperioribus conſtat.

2) De-

2) Deſignetur circulus, in quo ſita ſint puncta omnia, quae ſimul cum Terrae centro immerſionem ac emerſionem planetae conſpiciunt.

3) Aſſumantur tempora, aequalibus, ſed paruis interuallis, v. g. minuto primo integro aut dimidio, diſtantia, intra limites ſupra definitos cadentia, et ad quoduis horum momentorum deſignetur circulus, loca, Planetae immerſionem aut emerſionem videntia, comprehendens.

Quodſi haec circulorum-deſignatio in exacta globi terreſtris deſcriptione, maiori aliquantum forma expreſſa, inſtituatur, vel ſolo oculorum iudicio, cum exactitudine paucorum minutorum ſecundorum, tempus immerſionis et emerſionis, pro dato telluris loco quouis, determinari poterit, quae approximatio, quantum imminuere valeat calculi taedia, ſi quis pro dato vnico vel pluribus locis tempora haec exacte eruere voluerit, ſatis liquet.

Talem, qualem latius deſcripſi proiectionem, primus exhibuit Celeb. *de l'Isle*, pro tranſitu Mercurii ſub Sole, A. 1753. contingente, ſed methodum, qua aſſecutus eſt hos circulos, hactenus celauit, neque quiſquam alius rei, difficultate non carentis, theoriam hactenus expoſuit, quae vero ex modo, quo rem hic conſideraui, ſponte profluit.

Valent hactenus explicata, non niſi pro eo caſu, vbi D ſin. Φ tantum habet valorem, vt radium globi terreſtris in immenſum fere ſuperet. Si vero diameter baſeos annuli conici terram ſecantis, de quo ſupra lo-

 cutus

cutus ſunt, non fiierit tanta, vt in parte ipſius, terrae globo occurrente, curuatura omnino negligi queat, nec calculus ſupra vſurpatus, nec proiectio modo deſcripta, vlterius locum habere poterunt. Interim ſi Dſin. Φ, habeat valorem adhuc ſatis magnum, quod accidit in Veneris tranſitu, proiectio eiusmodi non omni vſu carebit. Sic error a neglectu curuaturae oriundus, pro Veneris tranſitu A. 1761, vbi eſt maximus, vix vltra decimam minuti primi partem notabiliter aſſurgit, qui error tam paruus eſt, vt non obſtante eo, proiectio, in qua quippe non ſumma quaeritur exactitudo, adhuc egregium praeſtare queat vſum, praecipue ſi quis in aeſtimatione proiectioni innixa, ad leuem, quae adhiberi debet correctionem, quodammodo reſpicere voluerit. Aſt in diſquiſitionibus, maiorem deſiderantibus exactitudinem, error eiusmodi non foret excuſabilis, vnde quoque tunc formulae ſuperius erutae adhiberi non poterunt.

Quo igitur formulam ſatis exactam pro hoc caſu eruamus, notemus

1) Semidiametrum vtriusque baſeos annuli conici, non ſenſibiliter a valore Dſin. Φ, hinc nec inter ſe differre, modo Φ notabilem habeat relatiue ad Parallaxin Solis horizontalem, magnitudinem, quod pro Venere et Mercurio omnino ſemper locum habet.

2) Cum igitur baſes huius annuli pro aequalibus haberi queant, multo magis, hoc de circulis, qui producuntur ſectione annuli huius, per plana baſibus parallela valebit, vnde cuiuis horum circulorum ſemidiametrum Dſin. Φ tribuere licet.

3) Quan-

3) Quanquam diametri baſium annuli conici continuo mutentur, toto tamen immerſionum aut emerſionum tempore tam paruas ſubeunt mutationes, vt hanc variabilitatem negligere liceat. Angulus enim Φ toto hoc tempore ſenſibiliter non mutatur. Quare Φ eum valorem, quem tenet, dum pro centro Terrae immerſio, aut emerſio, contingit, conſtanter ſeruare ſupponere licet.

Suppoſitis his, facile patet, ſolui poſſe problema, modo punctum in plano per Solem, Terram ac Planetam tranſeunte aſſignare valeamus, quod cum puncto ſuperficiei dato immerſionem, aut emerſionem, ſimul conſpicit. Quomodo igitur hoc fieri queat, inquiramus.

Sit FGH*eq* hemiſphaerium terreſtre, plano per Solem, Terram et Planetam tranſeunti inſiſtens; *le*A recta, quae producta per Solis centrum tranſit; *ab* diameter Terrae huic rectae perpendicularis; RA recta Solis ac Planetae centra coniungens; *pq* annuli conici cum plano FG*pq* interſectio; in *m* vero punctum, quod immerſionem conſpicit, quodque propterea in annuli cum terrae globo interſectione conſtituitur. Si annulus hic ſecetur plano, ad rectam RA et ſubiectum planum perpendiculari, ſiue, ſi ſecetur plano baſibus parallelo, ſectione tranſeunte per punctum *m*, producet haec ſectio circulum *sm*Q, per punctum quoddam *s* rectae *pq* tranſeuntem, cuius diameter = 2D ſin. Φ. Demittatur ex *m*, ad planum FG*qp* perpendicularis *mk*, quam *s* vocabimus, ex *k* vero ducantur perpendiculares *kb* et *kd*, per *v* et *r* indicandae. Perſpicuum hic eſt, non punctum *k*, ſed punctum *s*, fore iſtud, quod cum *m* ſimul immerſionem Tab. XV. Fig. 11. et 12.

 conſpi-

conſpicit. Vt igitur hoc punctum determinetur, ducantur ex s perpendiculares st ac sg, ac ſatis liquet, producta st vsque ad i inueniri sg, minuendo kb recta ik, rectam vero st haberi, minuendo bc ſeu kd recta is.

Notemus hic Fig. 12. exhibere vndecimae ichnographiam. Litteris, quibus in ipſa vſus ſum, denotantur puncta reſpondentia punctis figurae antecedentis, iisdem literis notatis. Addidi hanc figuram, quoniam viſum eſt, ad meliorem comprehenſionem plurimum ipſam conferre poſſe.

Liquet ex vtriusque figurae intuitu, triangulum kis ad i eſſe rectangulum, angulum vero $ksi = \Phi$. Modo igitur detur ipſius hypothenuſa ks, reliqua latera ſimul innoteſcent. Eſt autem in circulo Qms, $2D \sin.\Phi - ks : mk = mk : ks$, hinc $mk^2 = s^2 = 2D \sin.\Phi \times ks - ks^2$. Negligere autem licet terminum ks^2, qui in ſuppoſitione noſtra ſemper eſt admodum paruus, vnde prodit $ks = \frac{s^2}{2D \sin.\Phi}$, ac $ki = \frac{s^2}{2D}$, et $si = \frac{s^2 \cos.\Phi}{2D \sin.\Phi} = \frac{s^2}{2D \tang.\Phi}$, vt ſic reperiatur $sg = v - \frac{s^2}{2D}$, ac $st = r - \frac{s^2}{2D \tang.\Phi}$. Rurſum hic in valore ipſius sg terminum $\frac{s^2}{2D}$, tanquam valde paruum et incomparabilem, abiicere licet, quare tuto ſupponitur $sg = kb = v$.

Vſurpando hos valores pro sg ac st repertos, eosque in ſupra repertam formulam ſubſtituendo, aſſumit ipſa hanc formam:

$$(2D - v)\sin.\delta - \mu(D - v)\sin.(\Phi + \delta) \pm \mu r \cos.(\Phi + \delta) = 0$$
$$\frac{\mp \mu s^2 \cos.(\Phi + \delta)}{2D \tang.\Phi}$$

Sicque

Sicque obtinuimus aequationem, ex qua momentum immerſionis et emerſionis pro puncto s, ſimul vero pro puncto m, determinari poteſt.

Methodum, quae adhibenda, vt ope huius aequationis momentum quaeſitum eruatur, hic non attingimus, cum ſupra prolatae omnino ſit ſimilis. Id ſolum notare expediet, eſſe $s^2 = \varrho^2 - v^2 - r^2$, ac, ſi approximatio iam eo perducta eſt, vt momentum immerſionis, vel emerſionis, iam intra errorem vnius alteriusue minuti primi innotuerit, terminum $\frac{s^2}{2 D \, tang. \, \Phi}$ pro conſtanti haberi poſſe; quapropter ſolutio problematis, pro hocce caſu vix difficilior euadit, quam pro prius euoluto, vbi annuli conici Terram ſecantis curuatura prorſus negligebatur.

Expedito hoc negotio, caſuum, quos ſupra indicauimus, adhuc tertius ſe nobis offert, vbi annuli conici diameter exiſtet ita parua, vt minorem quandam ad diametrum terrae habeat rationem. Locantur tunc puncta omnia, eodem momento, Planetae a Solis centro elongationem, ſub eodem conſpicientia angulo, in curua quadam, duplici curuatura praedita, ac deſcriptu ſatis difficili. Nec minus formulae analyticae pro hoc caſu valentes admodum euadunt complicatae. Cum autem caſus iſte ad negotium, quod tractamus, plane non pertineat, omnino ipſum hic praetermittimus.

DISSERTATIO II.
DE
EFFECTV PARALLAXEOS
IN TRANSITV PLANETARVM SVB SOLE.

Auctore

E. V. T. AEPINO.

Cum negotium, in diſſertatione praecedente, Academiae nuper tradita, expediendum, in eo ſolum conſtiterit, vt theoriam generalem, formulasque analyticas, in disquiſitionibus circa parallaxeos effectum in tranſitu Planetarum ſub Sole, inſtituendis, adhibendas, eruerem, de concinnitate formularum, earumque abbreuiatione non ſollicitus fui, niſi quatenus calculi analytici difficultates ſuperandae hoc requirebant. Dantur autem egregia, partim conſulto, partim quod ſine numerorum abſolutorum conſideratione ratio ipſorum reddi vix poterat, a me omiſſa, calculi compendia, quorum ope inſigniter contrahi poteſt, ſi a me euolutae formulae generales in dato caſu adhibendae ſunt. Scopus itaque huius diſſertationis eo redit, vt exemplo tranſitus ♀ ſub ſole, An. 1761. contingente, partim methodus generalis illuſtretur, partim calculi compendia, de quibus locutus ſum, explicentur.

Vſus ſum in calculo inſtituendo Tabulis Halleianis, ex quibus longitudinem atque latitudinem Veneris, Solis

longitudinem, caeteraque, quae calculum ingredi-
elementa, quaeſiui, ad momentae, tempori im-
is et emerſionis centri Planetae, ſatis propin-
uenta autem ſunt a me ex hisce tabulis

1761. d. 25. Maii ſtyl. vet. tempore
meridianum Grenouicenſem

ongitudo ♀ vera helioc.	8ſ 15° 21′ 1″
itudo ♀ auſtralis helioc.	3′ 3″
diſtantiae ♀ *a* ☉	4, 861181
tudo ☉	2ſ 15° 26′ 55″
♀ vera helioc.	8ſ 15° 48′ 47″
auſtr. helioc.	4′ 40″
♀ *a* ☉	4, 861201
☉	2ſ 15° 43′ 39″
ex his elementis	
ongit.	2′ 23″, 43
Horarius ♀ in latit.	13″, 86
Ang. commut. ad h. 14.	+ 5′ 54″
Ang. commut. ad h. 21.	− 5′ 8″
Horarius in ang. commut.	1′ 34″, 57.

Data haec ſufficiunt, ad calculum vniuerſum abſol-
vendum.

Initium calculi ducamus ab inueſtigatione momenti immerſionis pro centro Terrae, pro quo inuenta eſt formula ſin $(\Phi+\delta) = \frac{\text{ſin.}\,\delta}{\mu}$. Cum anguli Φ et δ, ſint ſatis parui, vt ſtatim patebit, loco ſinuum, arcus ipſi tuto ſubſtituuntur, vnde obtinetur $\Phi + \delta = \frac{\delta}{\mu}$, ſiue log. $(\Phi+\delta)$ = log. δ − log. μ. Inuenitur autem δ ex tabulis = 15′ 49″, ac log. μ, ex ſupra inuen-

inuentis elementis $=-0,145500$, vnde ſequitur $\Phi = 6'$, $17''$, 68, qui valor etiam pro emerſione valet, cum nec μ nec δ tempore 7 circiter horarum ſenſibilem patiantur mutationem. Fit itaque immerſio pro centro Terrae, ſi Φ adipiſcitur valorem $6', 17'', 68$, quare, quonam hoc contingat momento, diſpiciendum erit.

Per ea, quae in Diſſert. antecedente demonſtrata ſunt, eſt $\cos\Phi = \cos L \times \cos\lambda$, qui anguli omnes cum ſint admodum parui, ſupponi poterit, $\Phi^2 = L^2 + \lambda^2$. Inuenitur autem per hanc formulam, Φ ad h. 14. $= 6', 38''$, vnde patet, immerſionem cadere poſt h. 14. Optime inueſtigatur momentum, cui reſpondet, ope falſarum poſitionum, quod, vt eo minori opera fieri queat, annotamus:

1) Variationes in L et λ contingentes, in calculo noſtro, quaſi vniformiter peragantur, aſſumi poſſe, vnde variationes ipſius L ad variationes ipſius λ, eodem tempore contingentes, rationem habent conſtantem, quae ex horariis ſupra inuentis ſtatuenda eſt, vti $1 : 0, 1465$.

2) Si igitur datur variatio in L, reſpondens variatio in λ ſimul datur, vnde cum L et λ *ad h.* 14 ſint cognita, cuiuis L reſpondens λ aſſignari poterit.

Per aliquot itaque tentamina non difficulter determinantur L et λ, quae reddunt $\Phi = 6' 17'', 68$. Inuenio in noſtro caſu $L = 5' 28'', 27$, et $\lambda = 3' 6'', 77$. Cum igitur tota variatio, quae contingit in L, inter h. 14, ac momentum immerſionis, ſit $= 25'', 73$, ob horarium ipſius L cognitum, dabitur tempus, huic varia-

variationi reſpondens, quod reperitur $16', 19''$, quare immerſio pro centro Terrae fieri debet $14^h. 16'. 19''$.

Inueſtigato hoc momento, vlterius iam procedendum eſt, ad momentorum, quibus primo ac vltimo ex Terrae ſuperficie immerſio conſpicitur, determinationem. Erutae ſunt pro his momentis formulae, $\text{ſin.}(\Phi+\delta)=\frac{D\,\text{ſin.}\,\delta+\mu\varrho}{\mu D}$, et $\text{ſin.}(\Phi+\delta)=\frac{D\,\text{ſin.}\,\delta-\mu\varrho}{\mu D}$. Ob angulos ſatis paruos, adhibendo loco ſinuum arcus ipſos, fit $\Phi+\delta=\frac{\delta}{\mu}\pm\frac{\varrho}{D}$; eſt autem $\frac{\delta}{\mu}$ aequale $\Phi+\delta$, quod immerſioni pro Terrae centro reſpondet, quare ſi in poſterum, Φ pro centro Terrae, indicemus per γ, erit Φ pro primo ac vltimo immerſionis momento $=\gamma\pm\frac{\varrho}{D}$. Cum autem ſit $\frac{\varrho}{D}=$ ſinui parallaxeos Solis horizontalis, ſeu parallaxi horizontali ipſi, quam $10''$ aſſumamus, (in qua quippe ipſius magnitudine ſtatuenda, hactenus inſtitutae obſeruationes exactiores, fere conſentiunt) fit:

Φ pro momento immerſ. primo $=6', 27'', 68$
Φ pro momento immerſ. vltimo $=6', 7'', 68$.

Quodſi nunc tempora, quibus Φ hos adipiſcitur valores, adhibendo methodum ſupra indicatam, inueſtigemus, reperitur:

momentum primum immerſ. $14^h. 8'. 25''$
ac pro hoc momento $L = 5'. 40'', 72$
$\lambda = 3'. 4'', 94$
momentum vltim. immerſ. $14^h. 24'. 21''$
ac pro hoc momento $L = 5'. 15'', 62$
$\lambda = 3'. 8'', 62$.

Vti nunc patet ad proiectionis, pro hoc ♀ tranſitu, qualem in diſſertatione antecedente deſcripſi, conſtructionem, quam vt exhibeamus, tempus inter immerſionis primum ac vltimum momentum interceptum, ſequenti ratione diſtribuamus:

$14^h. 8'. 25''$	$14^h. 16'. 19''$
9. 0	17. 0
10. 0	18. 0
11. 0	19. 0
12. 0	20. 0
13. 0	21. 0
14. 0	22. 0
15. 0	23. 0
	24. 21

et ad quoduis horum momentorum circulum in proiectione Telluris deſignemus, qui per loca, eodem momento immerſionem conſpicientia, proxime tranſit.

Annotamus hic primum generatim, angulum *bnp*, Fig. 8. Diſſert. praeced. pro conſtanti haberi poſſe. Cum enim ſit tang. $bnp = \frac{2\,\text{ſin.}\,\delta - \mu\,\text{ſin.}\,(\Phi + \delta)}{\mu\,\text{coſ.}\,(\Phi + \delta)}$, erit proxime $bnp = \frac{2\delta}{\mu} - (\Phi + \delta)$. Sit, vti ſupra poſuimus, $\frac{\delta}{\mu} = \gamma + \delta$, atque erit $bnp = 2\gamma + 2\delta - (\Phi + \delta)$. Variatur hic equidem Φ pro quouis momento, aſt cum omnia Φ contineantur intra limites $\gamma + 10''$ et $\gamma - 10''$, hinc differentia ipſius Φ a γ nunquam $10''$ ſuperare queat, quae differentia tam parva eſt, vt tuto negligi poſſit, aſſumi poterit conſtanter $\Phi = \gamma$, vnde eſt $bnp = 2\gamma + 2\delta - \gamma - \delta =$ pro

noſtro

noſtro caſu, 22′.6″. Sequitur hinc, *fq*, ſeu poli, circuli hic deſcribendi, a puncto, cui Sol quouis momento verticalis eſt, diſtantiam, conſtanter 90°.22′, aſſumendam eſſe.

Computanda itaque nunc erunt loca, quibus, ſupra aſſignatis momentis, Sol verticalis exiſtit. Latitudo horum locorum aequalis eſt declinationi Solis, quae, cum interuallo 16 quaſi minutorum ſenſibiliter non varietur, loca omnia, quibus Sol durante immerſione verticalis fit, in eodem parallelo ſita, ac diſtantiam 67°.17′ a polo boreo habere cenſenda ſunt. Vt vero iſtorum locorum longitudo inueſtigetur, peculiari calculo opus eſt. Ante omnia autem momenta, ad quae circuli in proiectione Telluris exhibendi ſunt, cum tempus medium exhibeant, ad tempus ſolare reducenda ſunt. Cum itaque ſit aequatio temporis ad A. 1761. d. 25 Maii ſtyl. vet. h. 14 = + 1′.54″, erunt momenta ſupra aſſignata in tempore ſolari:

14ʰ.10′.19″	14ʰ.18′.13″
10. 54	18. 54
11. 54	19. 54
12. 54	20. 54
13. 54	21. 54
14. 54	22. 54
15. 54	23. 54
15. 54	24. 54
16. 54	25. 54
	26. 19

 Datur

Datur hinc elongatio punctorum, quibus Sol quouis momento verticalis exiſtit, a meridiano Grenouicenſi, verſus orientem, in tempore:

$9^h.49'.41''$	$9^h.41'.47''$
49. 6	41. 6
48. 6	40. 6
47. 6	39. 6
46. 6	38. 6
45. 6	37. 6
44. 6	36. 6
43. 6	35. 6
	33. 45.

Quae tempora, in arcus aequatoris conuerſa, dant elongationem orientalem horum punctorum a meridiano Grenouicenſi:

$147^\circ.25'.15''$	$145^\circ.26'.45''$
16. 30	1. 30
1. 30	144. 46. 30
146. 46. 30	31. 30
31. 30	16. 30
16. 30	1. 30
1. 30	143. 46. 30
145. 46. 30	31. 30
	26. 15.

Obtinuimus ſic omnia data, ad reſoluendum triangulum PEp, Fig. 9. Differt. praeced. neceſſaria, praeter angulum PEp, pro quo inuenta eſt formula $90^\circ - fcm + I$. Eſt vero valor anguli $fcm = 6^\circ.13'$, quoniam, vti ex Differt. praeced. patet, tang. fcm = tang. ω ſin. ε tang. I inuenta eſt $= \frac{\text{ſin.}\,\lambda}{\text{tang.}\,L}$. Cum vero ſinus

ſinus et tangentes arcuum paruorum ſint proxime arcubus proportionales, ſupponi poterit, tang $I = \frac{\lambda}{L}$, vnde reperitur

I - - - - pro primo immerſ. momento $= 28°. 29'$
pro centro Terrae $= 29. 38$
pro vltimo immerſ. momento $= 30. 52.$

Vnde, cum variationes anguli I ſint pro hoc negotio ſatis exacte tempori proportionales, quaerendo I, pro momentis intermediis, per interpolationem, ſequens obtinetur ſeries angulorum PE*p*.

112°.16′	113°.25
21	31
30	40
38	50
47	59
56	114. 8
113. 5	17
12	26
	39.

Ex his vero datis ſequitur, polorum, circulorum hic deſcribendorum

I. Latitudo auſtralis.

20°.36′	21°.39′
41	45
49	53
56	22. 1
21. 4	10
12	18
20	26
28	34
	46

II. Elongatio a meridiano Grenouicenſi verſus orientem.

225°. 48′.	226°. 12′
37	0
17	225. 42
227. 57	23
37	5
18	224. 47
226. 58	29
38	11
	223. 46.

In valores hos, non omnes, calculo directo inquiſiui, ſed inuentis aliquibus, reliquos interpolando obtinui, vnde quoque ab errore vnius alteriusue minuti primi, non immunes ſunt, qui vero error hic tuto pro nullo habetur.

Supereſt adhuc valor rectae br, Fig. 8. Diſſert. praeced. pro quouis aſſumtorum momentorum inueſtigandus. Formula, quam pro ipſa eruimus, erat $\frac{D\,ſin.\,\delta - \mu\,D\,ſin.\,(\Phi+\delta)}{\mu\,coſ.\,(\Phi+\delta)}$. Supponere vero hic licet, ſine errore ſenſibili, $coſ.(\Phi+\delta) = 1$, ac $ſin.\,\delta = \delta$, vt et $ſin.(\Phi+\delta) = \Phi+\delta$, vnde obtinetur formula $\frac{D\delta - \mu D(\Phi+\delta)}{\mu} = br$. Cum autem ſit $\frac{\delta}{\mu} = \Phi+\delta$ pro centro Terrae, indicando Φ pro centro Terrae per γ, prodibit $D\gamma + D\delta - D\Phi - D\delta = D(\gamma-\Phi)$. Eſt autem $D = \frac{f}{10''}$, vnde ſit $br = \frac{f}{10}(\gamma-\Phi)$. Ad exhibenda itaque br, neceſſe eſt, vt ad quoduis aſſumtorum momentorum Φ reſpondens inueſtigetur. Prolixus foret calculus, ſi omnia haec Φ directe quaerenda forent, et facilius multo negotium abſoluitur interpolando, quod ſequenti ratione commode fieri poteſt.

Indi-

Indicando decrementum ipſius Φ per x, ac tempus huic decremento reſpondens per z, ſupponatur eſſe $z = ax^2 + bx + c$. Definiri facile poſſunt coefficientes, a, b, c, cum enim iam ad tria momenta Φ ſint cognita, obtinemus has tres aequationes, $0 = c$, $474 = 100a + 10b + c$, ac $956 = 400a + 20b + c$, vnde obtinetur $c = 0$, $a = 0,04$, $b = 47$, quare conſtanter $0,04x^2 + 47x = z$, cuius formulae ope, adhibendo differentias primas et ſecundas, nullo negotio conſtruitur ſequens tabula:

Decrem. Φ.	Tempora.	Differ. 1.	Differ. 2.
0″	0″	47,04	8
1	47,04	47,12	8
2	94,16	47,20	8
3	141,36	47,28	8
4	188,64	47,36	8
5	236,00	47,44	8
6	283,44	47,52	8
7	330,96	47,60	8
8	378,56	47,68	8
9	426,24	47,76	8
10	474,00	47,84	8
11	521,84	47,92	8
12	569,76	48,00	8
13	617,76	48,08	8
14	665,84	48,16	8
15	714,00	48,24	8
16	762,24	48,32	8
17	810,56	48,40	8
18	858,96	48,48	8
19	907,44	48,56	
20	956,00		

Ex

Ex qua Φ ad quoduis momentum, capiendo partes proportionales, admodum facile elicitur. Prodeunt vero pro Φ ſequentes valores:

6′,27″,680	6′,17″,680	(γ)
26, 936	16, 823	
25, 662	15, 571	
24, 392	14, 322	
23, 124	13, 081	
21, 858	11, 831	
20, 595	10, 588	
19, 336	9, 349	
	7, 680.	

Et cum, capiendo q pro radio br, fiant coſinus arcuum qm, erunt hi coſinus:

+1,0000	−0,0857
0,9256	0,2109
0,7982	0,3358
0,6712	0,4599
0,5444	0,5849
0,4178	0,7092
0,2915	0,8331
0,1656	1,0000
0,0000	

ac arcus ipſi, ſeu diſtantiae perimetrorum a polis

0°. 0′	90°. 0′
22. 14	94. 55
37. 2	102. 11
47. 50	109 37
57. 1	117. 23
65. 18	125. 48
73. 3	135. 10
80. 28	146. 25
	180. 0.

Plane ſimili ratione pro emerſione calculum inſtitui, ac inueni

momentum emerſ. primum $20^h.22'.\ 4''$
et reſpondens $L = 4'.\ 8'',21$
$\lambda = 4'.31'',24$

momentum emerſ. pro centro Terrae $20^h.30'.\ 6''$
et reſpondens $L = 4'.20'',87$
$\lambda = 4'.33'',09$

momentum emerſ. vltimum $20^h.38',\ 0''$
et reſpondens $L = 4'.33'',33$
$\lambda = 4'\ 34'',92$

Tempora inter haec momenta intercepta ſequenti ratione diſtributa ſunt:

$20^h.22'.4''$	$20^h.30'\ 6''$
23 0	31. 0
24. 0	32. 0
25. 0	33. 0
26 0	34. 0

27. 0	35. 0
28. 0	36. 0
29. 0	37. 0
	38. 0.

Quibus addendo aequationem temporis pro h. 20 = 1'. 52'', prodeunt haec momenta, in tempore ſolari:

$20^h. 23'. 56''$	$20^h. 31'. 58''$
24. 52	32. 52
25. 52	33. 52
26 52	34. 52
27. 52	35. 52
28. 52	36. 52
29. 52	37. 52
30. 52	38. 52
	39. 52.

Vnde prodit punctorum, quibus Sol his momentis verticalis exiſtit, (quorum diſtantia a polo boreali aequalis eſt $67^\circ. 16'$) elongatio a meridiano Grenouicenſi verſus orientem, in arcu aequatoris:

$54^\circ. 1'$	$52^\circ. 1'$
53. 47	51. 47
32	32
17	17
2	2
52. 47	50. 47
32	32
17	17
	2.

Porro

Porro ſiunt I

47°.32	46°.18′
23	10
14	2
5	45. 53
46. 56	45
46	36
37	27
28	19
	10

ac cum ſit pro hoc caſu angulus PE*p*, ſeu *mcs* = 90° − *ſcm* − I, erunt anguli PE*p*

36°.15′	37′.29′
24	37
33	45
42	54
51	38. 2
37. 1	11
10	20
19	28
	37.

Vnde cum circuli cuiusuis hic deſcribendi polus a puncto, cui Sol verticalis, diſtet arcu 89°.38′, concluditur

I. Latitudo polorum borealis.

48°.17′	47°.16′
10	8
2	1

47. 54	46. 54
47	47
39	39
31	32
24	25
	18.

II. Elongatio a meridiano Grenouicenſi verſus orientem

171°. 22′	168°. 18′
1	167. 58
170. 38	37
15	15
169. 52	166. 53
29	32
6	10
168. 43	165. 48
	26.

Inueniuntur porro ſimili, qua ſupra vſus ſum, interpolatione, Φ, quae cuiuis momento reſpondent.

6′. 7″. 680	6′. 17. 680	(γ)
8. 833	18. 811	
10. 072	20. 069	
11. 312	21. 332	
12. 556	22. 596	
13. 802	23. 863	
15. 050	25. 132	
16. 272	26. 405	
	27. 680	

Quare

Quare, ſumta ϱ pro radio, ſunt arcuum mq coſinus

+ 1,0000	− 0,1131
0,8847	0,2389
0,7608	0,3652
0,6368	0,4916
0,5124	0,6183
0,3878	0,7452
0,2630	0,8725
0,1408	1,0000
0,0000	

et arcus ipſi

0° 0′	96° 30′
27 47	103 49
40 28	111 25
50 26	119 27
59 10	128 12
67 11	138 11
74 45	150 45
81 54	180 0
90 0	

Numerorum hactenus euolutorum ope, conſtructa eſt proiectio pro tranſitu Veneris, quam Academiae, ſimul cum diſſertatione hacce exhibeo, quaeque ab ea, quam non ita pridem edidit V. Cel. *De l'Isle*, parum differt. Etſi itaque primarium, quod in hac diſſertatione tractare conſtitueram, negotium, executioni iam dederim, aliquae tamen adhuc diſquiſitiones, nobis non negligendae, ſuperſunt.

Affirmaui in Diſſert. praecedente, pro Veneris ſub Sole tranſitu, curuaturam ſaepius ibi dicti annuli conici, ſine errore condamnabili, negligi non poſſe, non tamen obſtante eo, correctionem, formulis, quae prodeunt, ſi haec curuatura negligitur, adhibendam, eſſe admodum paruam. Rei huius hic reddere rationem non difficile erit. Liquet nempe, errorem eſſe eo maiorem pro dato loco, quo maius eſt *s*, quod huic loco reſpondet. Maximus itaque erit error, vbi *s* valorem maximum, valorem nempe ϱ adipiſcitur. Cum igitur pro hoc caſu fiat correctio *rectae*, quam per *r* indicauimus, adhibenda $= \frac{\varrho^2}{2\, D\, tang.\, \Phi}$, erit loco tang. Φ, ſubſtituendo γ, a quo parum differt, ac loco D ipſius valorem $\frac{\varrho}{16}$, reliquosque numeros abſolutos introducendo, haec correctio $= \frac{\varrho \times 10}{2 \times 378} = \varrho \times 0{,}0132$. Cum igitur vbiuis error in longitudine rectae *br*, Fig. VIII. differt. praeced. commiſſus, qui $\varrho \times 0{,}0021$ aequalis eſt, procreet in tempore errorem vnius circiter minuti ſecundi, ac error in recta *r* fere aequivaleat errori in recta *br*; error qui ex curuaturae neglectu ortum trahit, quando eſt maximus, 6″ fere non ſuperat. In omnibus aliis locis nequidem eo aſcendit, ac pro plerisque locis fere eſt inſenſibilis. Negligi itaque quidem poteſt hic error, vbi ſumma exactitudo non quaeritur, aſt in diſquiſitionibus exactioribus omnino ipſius ratio habenda eſt.

Cum deinde ex modo traditis perſpiciamus, errorem 0,0021 partium ipſius ϱ, in valore rectae *r* commiſſum, tempora non niſi vnico minuto ſecundo

reddere

reddere erronea, ac facile pateat, ſimilem errorem, in valore rectae v commiſſum, itidem parum nocere poſſe, patet, tuto nos, etiam in diſquiſitionibus exactioribus, ſupponere poſſe, $\text{coſ.}\Phi = 1$, $\text{ſin.}(\Phi + \delta) = \Phi + \delta$, $\text{ſin.}\,\delta = \delta$, ac angulum bnp, Fig. VIII. Diſſert. praeced. vt conſtantem. Tam parum enim valores veri per ſuppoſitiones haſce mutantur, vt error inde oriundus omnino inſenſibilis ſit reputandus. Multo itaque concinniores reddi poſſunt, formulae, in diſſertatione praecedente erutae, quod quidem ibi iam facere non licebat, cum ex ſola theoria, puraque analyſi, ſine numerorum abſolutorum ope, quantus futurus ſit error, et an ſit euaneſcens, diiudicari non potuerit.

Adplicemus ratiocinia noſtra, ad Figuram adiectam, Figurae VIII, Diſſert. praeced. ſimilem, ac formulam, qualem hic quaerimus, concinniorem, eruere laboremus. Cum angulus bnp, quem recta pq, cum recta nf, Solis ac Terrae centra connectente, includit, ſit conſtans, $= \gamma + \delta = \frac{\delta}{\mu}$, ac br ſemper $= D(\gamma - \Phi)$, vt ſupra oſtendimus, reperitur, ſi loco ſinus et tangentis anguli bnp, angulus ipſe adhibeatur, $br = D(\gamma - \Phi)$, ac $bn = \frac{\mu D(\gamma - \Phi)}{\delta}$. Cum igitur ſit $bn : br = nt : ts$, erit $\frac{\mu D(\gamma - \Phi)}{\delta} : D(\gamma - \Phi) = \frac{\mu D(\gamma - \Phi)}{\delta} + v : r$, vnde obtinetur aequatio, $\mu D(\gamma - \Phi) + v\delta - \mu r = 0$, quae formula, ob $\gamma = \frac{\delta(1 - \mu)}{\mu}$, tranſit in Tab. XV. Fig. 12.

$$(1 - \mu) D\delta - \mu D\Phi + v\delta - \mu r = 0.$$

Simili

Simili ratione calculum inſtituendo pro emerſione, prodibit

$$(1-\mu)D\delta-\mu D\Phi-v\delta-\mu r=0.$$

Quodſi ad curuaturam annuli reſpiciendum ſit, debitam pro r correctionem adhibendo, fit

$$(1-\mu)D\delta-\mu D\Phi\pm v\delta-\mu r+\frac{\mu s^2}{2D\Phi}=0,$$

quae formulae tuto ſemper adhiberi poſſunt.

DE VENERE IN SOLE VISA LIPSIAE AN. 1761. D. 6. IVNII STYL. NOV. HORIS MATVTINIS TEMP. CIVILI.

Auctore

G. HEINSIO.

I.

Praeſtantiae huius phaenomeni commendationem eo libentius mitto, quo certius inſignis raritas iſtam praedicat, quae reditum phaenomeni vltra ſaeculum, et quod excurrit, morari plerumque ſolet, quaeque effecit, vt poſt teleſcopii inuentionem illud ſecunda demum vice ſe nunc conſpiciendum praebuerit; et quo magis phaenomeni noſtri dignitas ex eo elucet, quod inter horrificos armorum ſtrepitus placidam Principum munificentiam, et ſingularem Aſtronomorum induſtriam illud excitauerit; vnde etiam factum eſt, vt per totum fere terrarum orbem phaenomeno noſtro ſub circumſtantiis exquiſitis inſidiari licuerit. Propoſito potius accommodum eſſe arbitror, ſi ea ſtatim enumerem, quae pro obſeruatione eius rite expedienda ſuſcepi, et quae peragenda coeli clementia permiſit; in quo negotio *Commentatio mea de Mercurio in Sole an.* 1753. *viſo*, Tomo VI. Nouor. Commentar. Acad. Imper. p. 547. ſeqq. inſerta, compendium aliquod afferet,

 cum

cum in praeſenti caſu, illi analogo, eadem obſeruandi methodo, iisdemque inſtrumentis, vſus ſim; quam ob rem in concinnanda recenſione ad ſcriptum iſtud beneuolum Lectorem ſaepe ablegare licebit. Concluſiones deinde obſeruationibus recenſitis innixae, vna cum methodis iſtas deducendi, ſuo ordine ſequentur.

2. Primum de ſtatu duorum horologiorum oſcillatoriorum reſpectu temporis veri recte cognoſcendo ſolicitus eram; quam ob rem die 4. Iunii, et per dies ſubſequentes vsque ad d. 10. Iunii, quotiescunque coelum fauit, (nubes enim ſubinde, fulgureae interdum, interueniebant) copioſe altitudines Solis reſpondentes obſeruaui, quae dictum horologiorum ſtatum, eorumque conſenſum mutuum, peroptato patefecerunt.

3. Cum *mora diſci Solis per horarium* in ea methodo requiri ſoleat, quae poſitionis centri Veneris in diſco Solis determinationem reſpicit (conf. T. VI. Nou. Comm. p. 555); de ea per obſeruationes cognoſcenda d. 5. Iunii cogitaui. Quem in finem Tubum aſtron. 6. ped. cum libella, l. c. p. 550. deſcriptum, adhibui, eiusque ope moram tranſitus diſci Solis, tum per filum horizontale, tum per verticale, repetitis vicibus exploraui, vt ex his datis ſecundum ea, quae l. c. p. 556. proferuntur, mora per horarium poſſet inueniri. Loco autem conſtructionis geo-

Tab. XVI. metricae ibi traditae, rem calculo proſequi malui. Do-

Fig. 1. cetur nempe l. c. quod, ſi in triangulo BCG ad C rectangulo BC moram diſci per verticale filum exponat, et CG moram per horizontale; BC autem in

B c

Be tranſeratur, et ce ad GC parallela agatur; haec ce moram diſci per horarium exhibeat Si igitur in partibus temporis ponantur $BC(=Bc)=v$, $CG=b$, $ce=m$; fiet $Be=\frac{mv}{b}$, ob $GC:BC=ce:Be$; et inde $m^2=v^2-\frac{m^2v^2}{b^2}$, ob $ce^2=Bc^2-Be^2$; quare tandem inuenitur

$$m=\frac{bv}{\sqrt{b^2+v^2}}.$$

Sic in obſeruatione aliqua, circa hor. 4. 25′ poſt meridiem peracta, deprehendi $v=3'.9\frac{3}{4}''$, $b=3'.19''$; quibus reductis ad quartas ſecundorum partes, fit $v=759$, $b=796$; et in iisdem partibus acquiritur $m=549,31$ vel $549\frac{1}{3}$ fere, vnde $m=2'.17\frac{1}{3}''$. In deductionibus ex reliquis obſeruationibus ſimilem in modum inſtitutis, capiendo medium, inueni *moram Solis per horarium* $=2'.17''$. Si nunc pro tempore inter antemeridianas et pomeridianas obſeruationes intermedio ſtatuatur declinatio Solis borealis $=22°.37'$, facto conſueto calculo, habetur *Diameter Solis* in partibus circuli maximi $=31'.37''$, vel 1897″. Tam exacte diameter Solis etiam ab iis indicatur, qui elementa praedictionis phaenomeni noſtri certiora publicarunt. Maculae etiam in Sole erant conſpicuae, numero nouem, ex quibus duas, ſemitae Veneris futurae forſan, vt tunc iudicabam, vicinas, quoad poſitionem in diſco Solis, dum moram huius per horarium inquirerem, ſimul obſervaui, aſt, cum euentus nullum iſtarum macularum vſum docuerit, earum quoque deſcriptionem mittam.

4. Illucebat tandem deſideratiſſimus ille dies, qui iucundiſſimum Veneris in Sole ſpectaculum offerre

 debe-

debebat. Vtinam coeli facies ex voto ſemper annuiſſet! Circa horam matutinam $2\frac{1}{2}$. coelum in regione horizontis, in qua futurum Solis ortum expectabam, ſpiſſis nubibus tegebatur. Hor. 3 ſpes excitabatur, cum in iſta regione nubes interrumpi et hiatus agere viderentur, quam coeli facies nonnunquam aluit, plerumque autem, nouis interuenientibus nubibus, eripuit. Sic ortum Solis, qui hoc die hor. 3.50′. contingere debuit, conſpicere non licebat. Hor. 4.9′ ſuperiorem quidem Solis partem (ſitu erecto) in hiatu nubium conſtitutam per Tubum terreſtrem 4 ped. videbam; aſt inferior, cui ex calculo Venus ineſſe debuiſſet, poſt nubes latebat. Adſpectus hic per minutum primum temporis tantummodo durauit; deinceps vero continua Solis a nubibus occultatio ſequebatur, donec tandem hor. 5.35′, prima vice Solem integrum, ad pauca licet temporis momenta, cernere liceret. Et en Venus in Sole, hoſpes gratiſſima, conſpicua, multum iam intra Solis diſcum progreſſa. Statim nouae nubes interueniebant, quae poſtea per interualla, exigua licet, Solis adſpectum admittebant. Caſum hunc extemplo ad vſum applicabam, et, cum prolixiores obſeruationes inſtituere breuis Solis apparitio non permitteret, de diſtantia centri Veneris a proximo Solis limbo ope Micrometri *Kirchiani*, quo Tubus aliquis aſtronomicus 6. ped. inſtructus erat, menſuranda ſollicitus eram. Praeſtiti id duabus vicibus, hor. 5.$49\frac{1}{2}$′, et h. 5. $54\frac{1}{2}$′. temp. veri, et in vtraque obſeruatione dictam diſtantiam $=5'.50''$. circuli maximi deprehendi.

5. Tan-

5. Tandem coelum magis fauere incipiebat, vt obſeruationes, determinationem poſitionis centri Veneris in diſco Solis concernentes, ſuſcipere liceret. In hoc negotio Tubum aſtronomicum 6. ped. cum libella, Tom. VI. Nouor. Comment. p. 550. ſeqq. fuſe deſcriptum, eo lubentius adhibui, quo certior eram de praeſtantia eius in hoc obſeruationum genere. Libella ſcilicet eum in finem applicari ſolet, vt reticuli Tubo inſerti filum alterum horizontalem, alterum verticalem, ſitum obtineat, ne refractio obſeruationem turbet; quam quidem adornationem quiuis Quadrans aſtronomicus, dioptris teleſcopicis inſtructus, absque libella, concedit. Aſt cum eiusmodi Quadrans, ſi eius copia detur, portatilis eſſe debeat, ideoque Tubum circiter 3. pedes longum tantummodo admittere ſoleat; libella pretioſo huic apparatui non ſolum commode ſubſtituitur; verum etiam, quod praecipuum eſt, maioribus Tubis, 6, 8, vel plures pedes longis, facillimo negotio applicatur, qui vtique, prae minoribus teleſcopiis, in obſeruatione appulſuum Syderis ad fila reticuli maiorem certitudinem conciliare debent. Sic Tubus memoratus, diebus ſextum Iunii praecedentibus ad examen rite reuocatus, bene inſeruiit obſeruationibus poſitionis Veneris in diſco Solis d. 6. Iunii ſuſceptis, quas, cum methodus obſeruandi ex citato loco p. 552. pateat, ſtatim ex ordine enumerabo, facta ſemper horologii, quo vſus ſum, mentione, dum diſcriminis gratia alterum horologium N, alterum H, vocaui. Reliqua phaenomena, incidenter notata, merito in ſuum locum reſeruantur. In appulſibus ad fila reticuli ſignificant *p* Solis limbum

praecedentem, *c* conſequentem, *s* apparenter ſuperiorem; ♀ autem centrum Veneris.

Obſeruatio 1.
temp. horol. N.
$6^h.14'.7''$. *p* ad |
15. 11. ♀ ad |
15. $27\frac{1}{2}$ ♀ ad —
16. $14\frac{3}{4}$ *s* ad —
17. $5\frac{1}{2}$ *c* ad |

Obſeru. 2.
horol. N.
$6^h.19'.30\frac{3}{4}''$ *p* ad |
20. $32\frac{1}{4}$. ♀ ad |
21. 1 ♀ ad —
21. $48\frac{1}{2}$ *s* ad —
22. $30\frac{1}{4}$ *c* ad |

Obſ. 3.
horol. N.
$6^h.26'.42\frac{3}{4}''$ *p* ad |
27. 43 ♀ ad |
27. $59\frac{1}{2}$ ♀ ad \
28. $18\frac{3}{4}$ ♀ ad —
29. 8 *s* ad —
29. $43\frac{3}{4}$ *c* ad |
nubes deinceps copioſae.

Obſ. 4.
horol. N.
$6^h.58'.9''$ *p* ad |
58. 59. ♀ ad |
59. $10\frac{1}{2}$ ♀ ad —
7^h. 0. $5\frac{3}{4}$ *s* ad —
1. $11\frac{1}{2}$ *c* ad |

Obſ. 5.
horol. N.
$7^h.5'.13''$ *p* ad |
6. $0\frac{1}{2}$ ♀ ad |
6. 14 ♀ ad \
6. $29\frac{1}{4}$ ♀ ad —
7. 25 *s* ad —
8. $15\frac{1}{2}$ *c* ad |
nubes copioſae diutine ſequebantur.

Obſ. 6.
horol. H.
$8^h.0'.37''$ *p* ad |
1. 5 ♀ ad |
1. $42\frac{1}{2}$ ♀ ad —
2. $50\frac{1}{2}$ *s* ad —
3. $35\frac{3}{4}$ *c* ad |
per nubes tenues, obſervatio tamen bona. Poſt denuo nubes ſpiſſae.

Obſ.

Obſ. 7. horol. H. $8^h.16'.\ 1''$ *p* ad | 16. $24\frac{1}{2}$ ♀ ad | 17. 7 ♀ ad — 18. $17\frac{1}{2}$ *s* ad — 19. 0 *c* ad | Solis lumen in hac obſeruatione per nubes tenues debile videbatur, quod appulſibus nonnihil officiebat.	Obſ. 8. horol. H. $8^h.34'.24\frac{3}{4}$ *p* ad | 34. $42\frac{3}{4}$ ♀ ad | 35. 31 ♀ ad — 36. $45\frac{1}{2}$ *s* ad — 37. 22 *c* ad | per nubes tenues; obſeruatio tamen bona.
Obſ. 9. horol. H. $8^h.41'.51''$ *p* ad | 42. 6 ♀ ad | 42. 50 ♀ ad — 44. $6\frac{1}{2}$ *s* ad — 44. $47\frac{1}{4}$ *c* ad |	Deinceps quidem nonnullas obſeruationes porro tentabam; aſt nubes ſpiſſae, continuo interuenientes, eas rite exequi non permiſerunt.

6. Tempus nunc monebat praeparationem ad obſeruandum Veneris e diſco Solis egreſſum. In quo negotio peragendo adhibui Tubum *Gregorianum* ſub apparatu, quo iſte obiecta ſecundum diametrum 52 vicibus auget. Maius augmentum applicare disſuadebat frequens nubium interuentus, quo fieri potuiſſet, vt pro adſpectu Solis momentaneo Sol difficilius inueniretur; cuius praeterea pars exigua ſub eiusmodi apparatu campum repraeſentationis cito percurrere ſolet, et exiguus

guus inſtrumenti motus obſeruationem turbat. Tubo ſic adornato immotus continuo aſſidebam, ad phaenomena attentus, interea dum ſocius, in mathematicis verſatiſſimus, minuta ſecunda horologii H clare numerabat, cuiusmodi adminiculo in obſeruationibus etiam, paragrapho praecedenti deſcriptis, ſimiliter vſus ſum. Notabo autem in ſequenti recenſione ſemper tempus verum Solare, ex annotato tempore horologii H deductum.

Temp. vero

$9^h.7'.40''$. Contactus marginis occidentalis Veneris cum occidentali Solis limbo (ſitu nempe erecto, prout Tubus obiecta repraeſentare ſolet) vel initium egreſſus, prope inſtare videbatur, ſiquidem linea tantum luminoſa, admodum tenuis, limbum Solis clare iam conſpicui, et occidentalem Veneris marginem, interiacebat, et peripheriam diſci Solaris continuare videbatur.

9. 7. 57. Dubitare incipiebam, an non contactus iſte iam locum haberet; interim tamen linea lucida valde gracilis ad marginem Veneris occidentalem adhuc ſe oſtendebat.

9. 8. 7. Contactum nunc celebrari maiori certitudine credebam, licet lineola iſta luminoſa gracillima ad occidentalem Veneris marginem, aſt a reliqua diſci Solaris peripheria nunc quaſi ſeparata, adhuc conſpicua eſſet. Singulare ſcilicet phaenomenum hic

hic ſe offerebat, quod exactam contactus memorati, reſpectu momenti temporis reſpondentis,) aeſtimationem valde impediebat. Linea nempe praedicta lucida, quae longitudine nonnihil minor cernebatur, quam diameter diſci Veneris ad V re- Tab. XVI. Fig. 2. praeſentati, huius limbo occidentali inſtar tangentis *ab* adhaerebat, ſic, vt abrupta quaſi continuationem reliquae Solis peripheriae, cuius pars ad AB exhibetur, nunc non referret, ſed limbus Veneris occidentalis peripheriam Solis, pauxillum licet, penetraſſe videretur. Nouum huc accedebat phaenomenum non expectatum. Scilicet extra Solem diſci alicuius nigricantis partem, quae notabile diſci Veneris ſegmentum aemulabatur, in ſitu oppoſito ad D cernere credebam, ita, vt linea lucida *ab*, inſtar tangentis communis, eius peripheriam et marginem Veneris occidentalem ſepararet. Nonnunquam loco ſegmenti ad D, faſcia nigricans, quae latitudine diametrum diſci Veneris aequabat, ſic conſpiciebatur, ac ſi diſcus Veneris vmbram, terminis parallelis comprehenſam, extra diſcum Solis proiiceret, interiecta tamen ad *ab* lineola. Fallaciam viſus hoc phaenomenum denotare quisque ſibi perſuadebit. Interim tamen iſtud perdurabat vsque ad

$9^h.8'.27''$ quo momento linea lucida *ab*, ſaepius memorata, prorſus euaneſcebat. De hoc diſparitionis momento intra duo temporis ſecunda certus ſum. Sane ante 5. ſecunda occidentali Veneris limbo, in regione puncti contactus, quod linea *ab* antea effecit, flammula aliqua, gracillima licet, adhaeſerat. Poſt momentum $9^h.8'.27''$. nihil lucidi amplius ad occidentalem Veneris marginem diſcernere potui.

9. 8. 37. Initium egreſſus Veneris certiſſime peractum erat, nec vllum lucis veſtigium ad marginem Veneris occidentalem extabat.

Hucusque Sol diſtincte, et in peripheria ſua bene terminatus, conſpici potuit; qui vero paulo poſt e conſpectu ad aliquod tempus a nubibus interuenientibus eripiebatur. Redibat Sol et copiam faciebat egreſſum centri Veneris aeſtimio obſeruandi. Sic

9. 16. 40. centrum Veneris ad V exhibitae nondum in peripheria Solis AB per diſcum Veneris mente producta conſtitutum erat.

Tab. XVI. Fig. 3.

9. 17. 37. Centrum Veneris notabiliter propius ad dictam Solis peripheriam accedebat.

9. 18. 17. Certe dimidium diſci Veneris a peripheria Solis producta reſectum erat. Hanc phaenomeni conditionem, ob motum Veneris lentum alias facile ambiguam, aeſtimio non admodum dubio diiudicare licuit,

ita,

ita, vt a vero parum aberrare crederem, ſi egreſſum centri Veneris ad $9^{h}.18'.7''$ ſtatuerem, vel, ſi numerum rotundum malles, ad $9^{h}.18'.0''$.

Spiſſae nubes poſtea Solem, intempeſtiue ſane, tegebant, quae, proh! totalem Veneris egreſſum obſeruare prorſus impediebant.

$9^{h}.26'.20''$. Cum Sol denuo a nubibus liber conſpiceretur; nullum veſtigium Veneris ad peripheriam Solis, bene terminatam licet, deprehendere potui.

7. Phaenomenum adhaerentis lineae lucidae ad limbum Veneris occidentalem, quod §. praec. ad momentum $9^{h}.8'.7''$. deſcripſi, ita comparatum eſt, vt ab inflexione luminis ad marginem Veneris proficiſci videatur. Obſtare non credo conditionem repraeſentationis Tubi Gregoriani in obſeruationibus ſolaribus Tom. VI. Nouor. Comment. p. 548. indicatam: Sol enim ad illud tempus diſtinctus et in peripheria bene terminatus apparebat; et, licet linea praedicta (*ab*) interdum bifida cerneretur, momentaneus tamen tantummodo fuit hic adſpectus, repraeſentationi Tubi nonnunquam tremulae absque dubio adſcribendus. E contrario iſtius lineae lucidae apparitio conſtans, et per 20. ſecunda temporis continuata, pariter ac ſucceſſiuum luminis eius decrementum vsque ad flammulam, tandem euaneſcentem, vtique ſuadent, praecipuam huius phaenomeni cauſam in inflexione luminis eſſe quaerendam.

Si hanc concedas; noua oritur quaeſtio: quodnam criterium egreſſus Veneris e diſco Solis initium patefaciat? an contactus interior vtriusque limbi, an vero totalis luminis diſparitio ad marginem Veneris occidentalem? Diſcrimen ſane inter vtramque conditionem conſtitui debet. Totalis diſparitio bene et intra duo ſecunda certe obſeruari potuit $9^h.8'.27''$. E contrario contactus certo citius contigit hoc momento, quo limbus Veneris peripheriam Solis nonnihil iam, licet vix ſenſibiliter, penetrauerat. An contactum cum ſeparatione lineae lucidae ad momentum $9^h.8'.7''$. connectere; an *vero* per plura temporis ſecunda ante hoc momen*tum* conſtituere ſatius ſit? Sane in eiusmodi contactus diiudicatione per viginti et plura ſecunda facile quis haeſitare poteſt. Sed mittam contactum, et pro egreſſus initio certius momentum, totalis nempe luminis diſparitionis, eligam. Pone, egreſſus initium in omnibus terrae locis eodem inſtanti contingere, ſepoſito tantiſper parallaxis effectu; an diſparitio luminis itidem eodem inſtanti vbique accidet? certe ex diuerſa Tuborum opticorum praeſtantia, diuerſaque atmoſphaerae conſtitutione, notabile diſcrimen oriri poſſe videtur. Pone, obſeruatorem eundem, eodemque tubo inſtructum, et initium et finem egreſſus obſeruaſſe. Cum peripheriae Solaris integra reſtitutio finem egreſſus docere debeat; de momento autem, quo ita accurate contingat, ob motum Veneris admodum lentum ambigue tantum iudicare liceat, accedentibus inflexionis lucis effectu aliisque circumſtantiis, v. c. peripheriae Solis tremulae etc. an non veriſimile eſt, tempus egreſſus centri ex vtroque momento diiu-

diiudicatum diuerſum prodire debere ab eo momento, quo centrum diſci Veneris re vera in peripheria Solis producta haeſit? Simile ratiocinium de initio et fine ingreſſus Veneris in Solis diſcum poteſt inſtitui; et ſimilis haeſitatio de vero ingreſſus centri momento locum habebit. Nonne mora totalis centri Veneris per diſcum Solis dubia inde emergere debet? ſi iam diuerſos obſeruatores in diuerſis terrae locis, Tubis diuerſae praeſtantiae inſtructos, ſi diuerſitatem conſtitutionis atmoſphaerae etc. conſideres, mora praedicta pro ſingulis nouum admittet diſcrimen, etiamſi ab omni parallaxis effectu abſtrahas. Nonne igitur differentiae morarum in diuerſis locis, accedente parallaxis effectu, obſeruatarum, pars aliqua ſe immiſcebit, quae, vi praecedentis ratiocinii, parallaxis effectui non debetur, quaeque exactam ex iſta morarum differentia parallaxis cognitionem notabiliter turbare poteſt? Recte igitur in hoc negotio commendat *Halleius*, Auctor ſuaſorque egregiae illius methodi, parallaxin Veneris inueſtigandi, moram a totali ingreſſu Veneris intra diſcum Solis, ſeu prima fili luminis Solaris apparitione, ad principium egreſſus ex eodem, ſeu totalem dicti fili diſparitionem, ope Tubi praegrandis v. c. 24. ped. longi obſeruare, eamque in praedictum finem adhibere. Facile aſſentior tanto Aſtronomo, et de euentu exoptato in tranſitu Mercurii per Solem experientia optime edocto; attamen phaenomena ſupra expoſita indicare mihi quidem videntur, periculum incertitudinis cuiuspiam maxima quidem ex parte minui, non autem prorſus tolli; niſi forſan Tuborum aſtronomicorum praegandium indo-

les praeſtantior in obſeruationibus Solaribus omnem dubitandi vim deſtruat. Nec animus eſt, eximiam *Halleii* methodum haeſitatione nimia excipiendi, quin potius enodationem difficillimae quaeſtionis exoptatiſſimam inde ſperem; ſi etiam tanta ſubtilitate, quantam methodus promittit, rem plene aſſequi non liceret. Enumeraui tantum, quae vidi, et quae colligere potui. Quamuis autem hic facilis ſim; miſſis reliquis, non aeque de mora tranſitus diſci Veneris per limbum Solis ſtatui poſſe puto. Phaenomena ante explicata iſtam breuiorem forſitan exhibent, ac reuera eſt; vnde diameter diſci Veneris praeter diminutionem, quae ipſi ex repraeſentatione corporis opaci in fundo lucido contingit, etiam ex hoc capite minor emergere debet. Inprimis autem differentiam Tuborum, in obſeruationibus eiusmodi adhibitorum, notabile diſcrimen producere poſſe facile credo. Sed de iſta Veneris per limbum Solis mora plura ſuo loco.

8. Dum Venerem, expoſito hactenus modo, in tranſitu per diſcum Solis proſecutus ſum, attentus quoque ſemper fui, an deſideratum illum Veneris ſatellitem, cuius exiſtentiam variae obſeruationes docere videntur, deprehendere poſſem; aſt nullum eius veſtigium per omne tempus obſeruationum mearum apparuit. Haec ſatellitis abſentia etiam poſtea comprobata fuit, cum hor. 10. hunc in finem Solis diſcum denuo perluſtrarem. Nubes deinceps copioſae iterum oriebantur, et tandem tonitrua circa meridiem e longinquo; poſt horam 3. vero pomeridianam in vicinia audiebantur.

9. Ac-

9. Accedo nunc ad elaborationem obſeruationum, ad finem §. 5. exhibitarum, vt ex iis determinatio poſitionis centri Veneris in diſco Solis pro reſpondentibus temporum momentis perficiatur. Conſtructione geometrica eiusmodi inueſtigationem peragendam propoſui in Tom. VI. Nouor. Comment. p. 555. Cum autem illi ſaepe ambiguitas aliqua ſe immiſcere ſoleat; ſatius hic duxi, rem calculo proſequi, ſuppoſito conſtructionis ſenſu. Sit ergo Fig. 4., ſitu inuerſo delineata, analoga figurae quartae l. c., quam conſtructio reſpicit. BFG, BCE, VPH, PVD, ſint triangula ad F, E, P, D, reſpectiue rectangula, et inter ſe ſimilia, ita vt EC ad FG, PH ad FG, PV ad FB ſint parallelae, PD autem ad VH perpendicularis. Scilicet FG filum horizontale, FB filum verticale, GCB diurnum centri Solis repraeſentant. In C eſt centrum Solis, cuius peripheria rectas FB, FG, tangit; in P vero ſupponitur centrum Veneris. Sint iam Tab. XVI. Fig. 4.

Semimora diſci Solis per horarium $= CE = m$

- - - - - - - - - - - filum verticale $= CB = v$

Interuallum inter appulſum limbi Solis

praec. *p* ad | et ♀ris ad | $= BV = a$

Interuallum inter appulſum limbi Solis

(apparenter) ſuperioris *s* ad — et ♀ ad — $= GH = b$

Hae quantitates omnes ſunt cognitae; *m* nempe per §. 3; reliquae *v*, *a*, *b*, ex obſeruatione quauis §. 5. Si ex iis inueniri poſſent VD, PD; haberetur CD $(= BV + VD - BC)$ *differentia aſcenſionum rectarum centrorum*

rum

rum Solis et Veneris; PD autem *differentiam declinationum centrorum Solis et Veneris* manifeſtaret. Daretur ergo poſitio centri Veneris reſpectu centri Solis, huiusque diurni, quae quaeritur. Res igitur huc redit, vt VD, PD, reperiantur. Primum autem patet, cognoſci poſſe rationem rectarum VD, PD, ex ſimilitudine triangulorum PVD, CE*B*, ope analogiae EB:CE = VD:PD; modo daretur EB. Cum $EB^2 = CB^2 - CE^2 = v^2 - m^2$; erit $EB = \sqrt{(v+m)\times(v-m)}$, quam breuitatis cauſa ponam $= n$, et inſtar quantitatis datae habebo. Igitur $n:m = VD:PD$; et data VD, dabitur etiam PD. Vt nunc VD acquiratur, fiat

$$BC:EB = VH:PV$$
$$BC:EB = PV:VD, \text{ vnde}$$
$$\overline{BC^2:EB^2 = VH:VD}$$
$$v^2:n^2 = VH:VD.$$

Prima analogia patet ex ſimilitudine triangulorum CEB, VPH; ſecunda autem ex ſimilitudine triangulorum CEB, PVD. Cognoſceretur ergo VD per VH. Cum

$$BG = BV + VH + HG$$
$$= a + VH + b$$
$$\text{ſit } VH = BG - (a+b)$$

ex ſimilitudine autem triangulorum CEB, GFB, eſt

$$\binom{EB:BC}{n:v} = BF:BG$$

et $BF = EB + EF = EB + EC = n + m$ (ob EF = radio diſci Solis = EC = m), ita vt ſit $BG = \frac{v\times(n+m)}{n}$

quare

quare $VH = \frac{v \times (n+m)}{n} - (a+b)$; et denique
ob $v^2 : n^2 = VH : VD$, fit

$$VD = \frac{n^2}{v^2} \times \frac{v \times (n+m) - n \times (a+b)}{n}$$

$$= \frac{n}{v} \times \left(n + m - \frac{n \times (a+b)}{v} \right).$$

10. Calculus igitur pro inueniendis VD, PD, CD, commode ſic inſtitui poteſt, vt

ex datis $EC = m$
$BC = v$
$BV = a$
$GH = b$ quaerantur

primum $\sqrt{(v+m) \times (v-m)} = n$
deinde $\frac{n \times (a+b)}{v}$ quae ſit c
porro $n + m - c$, quae ſit $= d$
tandem $VD = \frac{n \times d}{v}$, et inde
$PD = \frac{m \times d}{v}$, ob $n : m = VD : PD$
ac $CD = BV + VD - BC$
$= a + VD - v$, vel $= a - v + VD$.

Schema calculi illuſtrationem addet. Mora Solis per horarium in omnibus obſeruationibus §. 5. eſt eadem $= 2'.17''$. (§. 3.), idequo ſemimora, ſeu $m = 1'.8\frac{1}{2}''$. vel $68\frac{1}{2}''$. Cum reliquae quantitates v, a, b, item in ſecundis temporis cum fractionibus ſubinde obtineantur, ad euitandas iſtas fractiones expedit, ſingulas illas quantitates per 8 multiplicare, ſeu eas in partibus octauis minuti ſecundi temporis exhibere, quas *partes ſchematis* voca-

 bo,

bo, ita vt nunc $m = 548$. part. ſchem. Elaboranda iam ſit obſeruatio 6ta (§. 5.)

c ad | $8^b. 3'. 35\frac{1}{2}''$.
p ad | 8. 0. 37.

ergo mora ☉.
per vertic. 2. $58\frac{1}{2}$.
et ſemimora
ſeu v — 1. $29\frac{1}{4}$. $= 715$. part. ſchem.
♀ ad | $8^b. 1'. 5''$.
p ad | 8. 0. 37.

ergo BV, ſeu a 28 $= 224$. part. ſchem.
s ad — $8^b. 2'. 50\frac{1}{2}''$.
♀ ad — 8. 1. $42\frac{1}{2}$.

ergo GH ſeu b 1. 8. $= 544$. part. ſchem.

Dantur itaque

$m = 548$. part. ſchem.
$v = 715$. — — —
$a = 224$. — — —
$b = 544$. — — —

quan-

quantitates inde deducendae in iisdem partibus ſchematis acquiruntur, nempe

$v+m=1263$	$\log.(v+m)=3,1014034$
$v-m=\ 167$	$\log.(v-m)=2,2227165$
	$5,3241199$
$n=\ 459,26$	$\log.\ n\ =2,6620599$
$a+b=\ 768$	$\log.\ (a+b)=2,8853612$
	$5,5474211$
	$\log.\ v\ =2,8543060$
$c=\ 493,3$	$\log.\ c\ =2,6931151$
$n+m=1007,26$	$\log.\ n\ =2,6620599$
$d=\ 513,96$	$\log.\ d\ =2,7109293$
	$5,3729892$
	$\log.\ v\ =2,8543060$
$VD=\ 330,13$	$\log.\ VD\ =2,5186832$
$a-v=-491$	$\log.\ m\ =2,7387806$
$CD=-160,87$	$\log\ d\ =2,7109293$
	$5,4497099$
	$\log.\ v\ =2,8543060$
$PD=\ 393,92$	$\log.\ PD\ =2,5954039.$

11. Hoc modo pro ſingulis obſeruationibus §. 5. valores rectarum CD, PD, locum Veneris in diſco Solis indicantium, calculo inueſtigaui. Obtinuit autem recta CD valorem tum poſitiuum, tum negatiuum; poſitiuum, ſi centrum Veneris per PD ad diurnum BG relatum reſpectu centri Solis C ita ſitum fuit, vt (fig 4) D caderet a C verſus G; negatiuum e contrario, ſi D a C verſus B ponebatur. PD reſpectu diurni

ni BG ſemper ad partes anguli BFG ſita cenſeri debet. In hoc negotio tacite ſuppoſitum fuit, Venerem, durante, in ſingulis obſeruationibus, tranſitu per fila reticuli, locum ſuum in diſco Solis non mutaſſe, vel potius mutationem loci interea non ſenſibilem fuiſſe, quam ſuppoſitionem ex ſimili ratiocinio, cuiusmodi de Mercurio in Tom. VI. Nou. Comment. p. 557. protuli, facile quisque concedet, praeſertim cum in obſeruationibus ſemper proſpexerim de exiguo inter appulſus Veneris ad | et — interuallo obtinendo, quippe quod ſemper minus extitit minuto primo temporis, imo ſaepe dimidio minuto. Sic quoque, vt l. c. p. 558, medium dicti interualli momentum pro eo accepi, cui locus Veneris in diſco Solis reſpondere deberet, *momentum obſeruationis* deinceps vocandum. His ita explicatis, Tabula ſequens ea, quae inueni, diſtincte ob oculos ponet, in qua momenta obſeruationum ſtatim in tempore vero Solari exhibentur:

In obſ. § 5.	Momentum obſ. temp. vero mane	CD in part. ſchem.	PD in part. ſchem.
1	$6^h. 16'. 50''$	+ 77,	334,02
2	6 22. 18	+ 63,8	342, 3
3	6. 29. 32	+ 51,51	339,82
4	7. 0. 36	− 16,85	355,82
5	7. 7. 47	− 30,14	363,77
6	8. 2. 0	− 160,87	393,92
7	8. 17. 22	− 190,24	401,67
8	8. 35. 44	− 229,77	408,36
9	8. 43. 5	− 250,94	412,75

12. Ope huius Tabulae facili negotio conſtructio ſchematis perfici poteſt, quod intra diſcum Solis, ad aſſumtum centri eius diurnum, ſingula centri Veneris loca, ex obſeruationibus acquiſita, eorumque ſeriem rite exponet. Deſcripto nempe circulo, Solem exhibente (fig. 5.), centri C, radii AC = 548. part. ſchem. (§. 10.) ope ſcalae alicuius, et aſſumta diametro AR pro *diurno centri Solis*, ſi in hoc pro electis obſeruationibus, verbi cauſa 1. et 7, capiantur CD(= + 77), C*d*(= − 190, 24) ad ſenſum ſignorum ſecundum eandem ſcalam; deinceps in D, *d*, perpendiculares PD, *pd*, ad diurnum erigantur, eaeque reſpectiue aequales ſiant 324, 401, 67 part. ſchem. dabuntur in P, *p*, loca centri Veneris in obſeruationibus 1, 7. Et ſi de reliquis ſimilia peragantur; habebitur ſeries locorum, per quae, mediam viam inſiſtendo, *ſemita centri Veneris Lipſiae viſa* EI duci poterit, ſecans peripheriam Solis in I *puncto Ingreſſus*, et E *puncto Egreſſus centri Veneris*. Ex C ad AR erecta perpendicularis CH *circulum declinationis* vel *horarium centri Solis* repraeſentabit, et rectam EI in loco M ſecabit, in quo centrum ♀ris verſatur *tempore coniunctionis centrorum Solis* et *Veneris quoad Aſcenſionem rectam*; in qua coniunctione recta CM *differentiam declinationum centrorum* ☉ et ♀ manifeſtabit: denique angulus IMC erit *inclinatio ſemitae viſae ♀ris ad horarium* ad partes ingreſſus I, cuius complementum ad 90°. *inclinationem ſemitae viſae ad diurnum* patefacit. Figura 5. ſitu inuerſo delineata eſt, vt accommodatior ſit ad figuram 4. Sic quidem loca Veneris referuntur ad diurnum conſtantem, Tab. XVI. Fig. 5.

 qui

qui tamen re vera ſitum ſuum reſpectu Eclipticae durante tranſitu Veneris ab obſeruatione 1 ad 9 mutauit; attamen cum variatio anguli diurni et Eclipticae interea admodum ſit exigua, circiter $1\frac{1}{2}$ minut. eaque ad dimidium minuatur, ſi dictus angulus ſtatuatur ad tempus inter obſ. 1. et 9 medium; in conſtructione ſchematis, imo quoque in calculo poſtea inſtituendo, absque periculo ſenſibilis erroris poſitio diurni reſpectu ſemitae Veneris conſtans haberi poteſt.

13. Schema hoc modo acquiſitum apparentem Veneris tranſitum repraeſentat, viſum nempe e ſuperficie terrae et quidem Lipſiae; quod ergo effectum ex differentia parallaxium Solis et Veneris reſultantem ſimul comprehendit. Effectus hic in variis circumſtantiis vtique ſenſibilis eſſe debet; et re vera ex obſeruationibus, quibus ſchema ſuperſtructum eſt, eius indicia haud obſcura extiterunt; quae vero ad aliud tempus exponenda reſeruo. In praeſenti, ſi concluſiones ex ſchemate in vſum aſtronomicum deduci, et cum iis conditionibus, quas calculus adſpectui e centro terrae aptatus produxit, comparari deberent; neceſſe eſſet, vt, remoto parallaxium effectu, ſchema iſtud in aliud transmutaretur, quod tranſitum Veneris exhiberet, cuiusmodi appariturus ille fuiſſet obſeruatori in centro terrae poſito. Haec quidem trasmutatio, conceſſis parallaxibus, vtique effici poteſt; aſt, cum deciſionem quaeſtionis de quantitate parallaxium Veneris et Solis ex ipſis huius Tranſitus obſeruationibus, variis in locis inſtitutis, expectemus; interea vero conducat, conditiones noſtri Tranſitus, quamuis nondum exceptione immunes,

munes, propius tamen et approximando, cognoſcere, et ex earum comparatione cum calculo ad centrum terrae accommodato iudicium qualecunque de effectus parallaxium indiciis inſtituere: fingere tantiſper licebit, nullum ſenſibile diſcrimen locum habere inter ſchema immediate ex obſeruatione acquiſitum, et ſchema, quod illi reſpectu centri terrae reſpondere debet. Commode hoc fiet, ſi ex calculo pro centro Terrae aſſumentur, *inclinatio ſemitae viſae Veneris ad diurnum*, et *motus horarius Veneris in iſta viſus*, quae elementa reliquis certiora eſſe ſolent; et, ſi deinceps illis loca Veneris §. 11. inuenta accommodentur.

14. Supponatur ergo inclinatio ſemitae viſae Veneris ad diurnum $= 14^{\circ}.39\frac{1}{2}'$., quae vi calculi ex inclinatione ſemitae viſae Veneris ad Eclipticam $= 8^{\circ}.30'\ 10''$., et inclinatione diurni ad Eclipticam $= 6^{\circ}.9'.20''$., capiendo ſummam, acquiritur. Si ex M recta Mq parallela agatur ad diurnum AR, angulus pMq dictae inclinationi ſemitae viſae Veneris ad diurnum aequalis erit ($= 14^{\circ}.39\frac{1}{2}'$.). Ope huius ex dato loco centri Veneris p per rectas Cd, pd (§. 11.), inueniri poterit CM §. 12 explicata. Secet enim Mq rectam pd in q, orietur triangulum Mqp ad q rectangulum, in quo, praeter pMq datum, Mq=Cd habetur. Dabitur ergo pq, quae a pd ſubtracta relinquit qd=CM, ſi locus Veneris p verſus orientem reſpectu ipſius CM ponatur; ſi vero locus Veneris, vt P, reſpectu CM occidentem verſus ſitus ſit, dicta linea inuenta ad PD addi debet, vt prodeat CM. Tabula ſequens quantitatem

tatem rectae CM ex ſingulis obſeruationibus §. 11 praecedenti modo deductam exponet.

Ex obſeru. §. 11.	CM
1. — — — —	354,16 part. ſchem.
2. — — — —	358,99 — — —
3. — — — —	353,29 — — —
4. — — — —	351,41 — — —
5. — — — —	355,89 — — —
6. — — — —	351,84 — — —
7. — — — —	351,91 — — —
8. — — — —	348,26 — — —
9. — — — —	347,11 — — —
media CM ex omnibus	352,54 — — —

Diſcrepantiam concluſionum, interdum notabilem, ne mireris. Sunt enim iſtae non ſolum hypotheticae, verum etiam innituntur obſeruationibus appulſuum vtriusque Syderis ad fila reticuli (§. 5.), in quorum vnoquoque error ad ¼ ſecundi temporis aſcendens euitari vix poteſt, qui errores, ſi in appulſibus eiusdem obſeruationis ſe mutuo non deſtruant, ſed in omnibus ad eandem partem cadant, facile errorem totalem vnius vel 1¼. ſecundi temporis, hoc eſt, 8. vel 10. octauarum partium ſecundi, ſeu partium ſchematis, procreare poſſunt.

15. Supponatur nunc porro ex calculo motus horarius Veneris in ſemita viſa $= 3'.58''$, 3. part. circuli maximi vel $= 238''$,3. Si ex eo motus relativus

vus horarius reſpectu diurni et quidem in partibus ſchematis inueniatur; ope huius quantitates rectarum CD, C*d*, (§. 11. et 12.) in tempus conuerti poterunt, et ex reſpondentibus obſeruationum momentis *tempus coniunctionis centrorum Veneris et Solis quoad Aſcenſionem rectam* cognoſci, quo Venus in M vel relatiue ad diurnum in C extitit. Ponamus enim *p*M (fig. 5.) repraeſentare horarium Veneris in ſemita (=238″,3). In triangulo M*qp* ad *q* rectangulo (§. 14) ex datis *p*M, *p*M*q*=(14°. 39½′.) dabitur M*q*=C*d*=230″,54. part. circuli maximi. Iam radius diſci AC=548. (§. 10), vel diameter AR=1096. part. ſchem. cum diameter diſci etiam contineat 1897″. circuli maximi (§ 3.); inferendo 1897 : 1096. = 230,54 : quaeſ. dabitur horarius Veneris in diurno = 133, 19. part. ſchem. Nunc quaeuis recta CD §. 11. in tempore exprimi poteſt, inferendo 133,19. part. ſchem.: 3600″. temporis = CD in part. ſchem.: temporis interuallum quaeſitum. Verbi cauſa in obſeru. 2. ex data CD=63,8. habetur CD in tempore = 1724″. = 28′. 44″, quod tempus ad momentum obſeruationis $6^h.22'\ 18''$. additum producit tempus coniunctionis centrorum Veneris et Solis quoad Aſcenſionem rectam, (=$6^h.51'.2''$.), quod quaeritur. Scilicet CD in tempore expreſſum addi debet ad momentum obſeruationis, ſi D ponatur a C occidentem verſus; e contrario ab eo ſubduci, ſi *d* ad partes orientis reſpectu C cadat, vt habeatur tempus coniunctionis. Tabula ſequens concluſiones manifeſtat:

Ex obſeruatione	Tempus coniunctionis centrorum ♀. et ☉. quoad Aſcenſ. rectam
1. — — — —	6ʰ.51′.31″. mane temp. vero
2. — — — —	6. 51. 2.
3. — — — —	6. 52. 44.
4. — — — —	6. 53. 1.
5. — — — —	6. 54. 12.
6. — — — —	6. 49. 32.
7. — — — —	6. 51. 40.
8. — — — —	6. 52. 14.
9. — — — —	6. 50. 3.
Medium	6. 51. 46.

De diſcrepantia mutua harum concluſionum idem monitum valet, quod ſub finem §. 14. adiectum eſt. Concedas enim, in quantitate CD errorem 10. part. ſchem. interdum prodire poſſe, iſte in tempore ipſi CD reſpondente, ideoque etiam in tempore coniunctionis, aberrationem 4½. minut. prim. temporis efficiet, lento Veneris in ſemita ſua greſſui adſcribendam.

16. Sit MCL angulus inclinationis circuli latitudinis CL ad circulum declinationis CM = 6°. 9′. 20″; CL ad ſemitam Veneris EI in L terminata exponet *latitudinem centri Veneris in Coniunctione quoad Eclipticam.* Cum CMI vel CML ſit complementum inclinationis ſemitae ad diurnum, quae ſuppoſita eſt = 14°. 39⅓′. (§ 14.); erit CML = 75°. 20′. 30″, et in triangulo CML dabantur omnes anguli vna cum CM = 352, 54. part. ſchem. (§. 14.). Inuenietur ergo

CL

CL in part. ſchem. et ope rationis 1096:1897. (§. 15.) tandem quoque in partibus circuli maximi $=597''$, ita vt *latitudo geocentrica ♀tis in ☌ cum ☉le quoad Eclipticam* $=9'.57''$. auſtralis, ſi nempe ſitus fig. 5. erectus concipiatur. Per L ad MC ducatur parallela L*r* ad diurnum in *r* terminata, vt oriatur triangulum CL*r* ad *r* rectangulum, in quo ∠CL*r*=MCL=6°. 9'.20''. Igitur ex data CL in part. ſchem. dabitur C*r* in part. iisdem, quae ope rationis 133,19:3600''. (vt in §. 15. rectae CD) in tempus reſpondens transmutari poſſunt, quod erit $=16'.39''$. Centrum Veneris fuit in M $6^h.51'.46''$. (§. 15.), ideoque in L, $6^h.35'.7''$, ita, vt *Coniunctio centrorum Solis et Veneris in Ecliptica* contigerit $6^h.35'.7''$. temp. vero. Ad hoc tempus ex Tabulis Solaribus *de la Caille* eſt *longitudo Solis vera* $=15°.36'.20''$. ♊; quare *longitudo Veneris heliocentrica* $=15°.36'.20''$. ♐. Si ope rationis diſtantiarum Veneris a Sole et Veneris a Terra, vi calculi cognitae, ex latitudine Veneris geocentrica $=9'.57''$, inueniatur *Latitudo Veneris heliocentrica in ☌ quoad Eclipticam*; haec erit $=3'.57\frac{1}{2}''$.

17. Sufficiant hae concluſiones hypotheticae ſuo loco vlterius expendendae. Vnicam iis tantummodo addam, quae interuallum temporis inter coniunctionem in M et egreſſum centri Veneris in E in iſta hypotheſi concernit. Hunc in finem ex E ad MC intelligatur parallela E*e*, terminata ad diurnum AR in *e*. Cum in triangulo ECM dentur EC=548. (§. 10.), CM=352,54. (§. 14.), EMC=90°.+14°.39½'. (§. 14.) =104°.39'.30''; dabitur ECM=36°.51'.5''=CE*e*;

ideoque ex hoc et radio EC in triangulo EeC ad e rectangulo inuenietur eC = 328,66. part. ſchem, quae ope rationis 133, 19 : 3600. (vt in §. §. 15. 16.) in tempus conuerſae producunt 8883″. vel $2^h. 28' 3''$., quod eſt quaeſitum temporis interuallum inter coniunctionem in M et egreſſum centri Veneris in E ex hypotheſi. Si ex §. 15. Tempus coniunctionis in M ſupponatur = $6^h. 51'. 46''$. idque cum momento egreſſus centri Veneris (§. 6.) obſeruato = $9^h. 18'. 7''$. comparetur, emerget interuallum temporis inter coniunctionem in M et egreſſum centri Veneris *obſeruatum* = $2^h. 26'. 21''$., quod $1'. 42''$. *minus eſt* illo hypothetico ante inuento. Haec diſcrepantia vtique hypotheſis, imo parallaxium effectum indicare videtur. Sed de hoc aliisque plura ſuo tempore. Coronidis loco adiiciam figuram 6, quae ſitu erecto in cauitate coeli ſemitam centri Veneris in diſco Solis repraeſentat, prout iſtam ſeries locorum centri Veneris ſecundum numeros obſeruationum et data §. 11, quibus loca iſta innituntur, mediam viam inſiſtendo (§. 12), produxit, in qua figura litterae eaedem homonymas lineas figurae 5, quae ſitu tantum inuerſo exhibita eſt, deſignant.

Tab. XVII. Fig. 6.

DE

DE EFFECTV PARALLAXIS IN TRANSITV VENERIS PER SOLEM.

Auctore

C. HEINSIO.

Obſeruatio Tranſitus Veneris per Solem, quam ſpectator in ſuperficie terrae poſitus ſuſcipere ſolet, ſchema largitur, quod ſeriem locorum centri Veneris, ad diuerſa tempora arte deprehenſorum, intra diſcum Solis et reſpectu circulorum coeleſtium luculenter exponit. Statim iſtud in vſum aſtronomicum conuerti poſſet, ſi Sol et Venus ad tantam a terra diſtantiam ponerentur, vt de ſenſibili parallaxis effectu nullus metus locum haberet, hoc eſt, ſi ſupponere liceret, obſeruatorem in centro terrae conſtitutum eadem prorſus animaduertere debuiſſe, quae ſpectator in ſuperficie terrae deprehendit. Sub eiusmodi hypotheſi in *diſſertatione de Venere in Sole an.* 1761. *viſa* (quam *primam* in ſequentibus vocabo), varias deduxi concluſiones aſtronomicas, hypotheticas vtique, et limae ſubiiciendas, ſi parallaxis ſenſibiles effectus producere valeret. Pone effectus eiusmodi in ſenſus incurrentes; et ſtatim patet, ſchemata eiusdem Tranſitus a diuerſis, praeſertim longe a ſe inuicem in ſuperficie terrae remotis, obſeruatoribus conſtructa nec inter ſe conuenire, nec immediate ſchema pro obſeruatore in centro terrae poſito

ſuppeditare poſſe, ad quod centrum tamen, tanquam ad terminum conſtantem, ſemper ſchema relatum requiritur, vt concluſionibus in vſum aſtronomicum inſeruiat. Re vera Veneris a terra diſtantia ſub debitis circumſtantiis ita comparata eſt, vt ſenſibilem iſta parallaxin ſubeat, intellectam ex obſeruationibus ab Aſtronomis, aſt omnibus numeris perfecte nondum cognitam. Omnem hinc Aſtronomi ſpem coniecerunt in nuperum Veneris per Solem Tranſitum, vt ex eo quoque ſubtiliſſimae quaeſtionis de exacta Veneris, vti et Solis, parallaxis quantitate enodationem diſcerent. *Hoc* igitur modo a praedicto Tranſitu obſeruato *duplicis* quaeſtionis ſolutionem expectare debemus. *Altera* nempe reſpicit inueſtigationem parallaxis exactam ex comparatione mutua ſchematum, quae diuerſi, et valde diſſiti, ſpectatores in ſuperficie terrae ex obſeruatione acquiſiuerunt; *altera* vero, inuenta parallaxi, concernit transmutationem cuiusuis ex iſtis ſchematibus in tale ſchema, quale obſeruatori in centro terrae conſtituto competere debet. Poſtremum, vt in ſequentibus breuior explicatio locum habeat, *ſchema ad centrum terrae*; vnumquodque vero ex illis, *ſchema obſeruatoris*, adiecta loci obſeruationis ſignificatione, v. c. *Lipſienſis*, vocabimus. Ambae quaeſtiones nexu mutuo admodum ſunt implicitae, ſi in priori circumſtantiarum ratio habeatur, quae exactiſſimam parallaxis cognitionem pollicentur, ita, vt prior quaeſtio poſteriorem, cuius tamen ſolutioni iſta inſeruire debet, vt cognitam, continuo praeſupponat. Interim a dictis circumſtantiis recedendum non eſt, niſi ſine exoptato exci-

excidere velimus. Methodum igitur, his ita comparatis, indirectam in ſubſidium vocare debemus, qua, ſuppoſita parallaxi tanta, quantam circiter aliunde coniecimus, in effectus inde pro dictis circumſtantiis reſultantes inquiramus, eosque cum illis, quos obſeruationes in diuerſis locis inſtitutae manifeſtarunt, comparemus: ſic enim conſenſus vel diſſenſus patefaciet, an ſuppoſita parallaxis retineri poſſit, an vero reiici debeat; et in caſu poſteriori, cuiusmodi forſan ſuppoſitionis mutatio ſuſcipienda ſit, vt ad finem quaeſitum propius accedatur. Cum eiusmodi effectuum diiudicatio et parallaxi et ſchemate ad centrum terrae, tanquam fundamento, nitatur; vtriusque autem determinatio in quaeſtione ſit (ſiquidem poſterius, quomodo ex Tabulis aſtronomicis habetur, ipſum examine ad obſeruationes indigeat); facile patet, primariam quaeſtionem huc redire: *quomodo conceſſis parallaxi et ſchemate ad centrum terrae effectus parallaxeos ſint explorandi*; hac enim enucleata, reliquis finibus etiam proſpicere licebit. Nullus dubito, quin quaeſtio iſta ſufficienter iam ſit pertractata, ſiquidem indicia ſtudii hac in re ab Aſtronomis impenſi luculenta, et paſſim, et occaſione quoque noſtri Tranſitus, extant. Aſt fateri cogor, omne id, quod hucusque, impedito plerumque per exitioſum bellum commercio litterario, mihi innotuit, quaeſtionem potius indicaſſe, quam ſolutionem eius explanaſſe. Praeterea ad primarios parallaxis effectus, circa ingreſſum nempe et egreſſum Veneris, potiſſimum attentio facta eſt, quibus tamen, licet in iis cardo rei vertatur, conſideratio aliorum quoque effectuum prorſus

ſus poſtponi non debet. Sic neceſſitas exigebat, vt de ſolutione quaeſtionis ipſe cogitarem, et viam ad reliquas conſiderationes ſternerem. Haec ergo diſquiſitio, quam nunc ſuſcipio, inſtar continuationis ſpectari poteſt eorum, quae iam in *diſſertatione* ſupra nominata *prima*, *de Venere in Sole an.* 1761. *viſa* in medium a me prolata ſunt; quare etiam, ſtudio breuitatis et euidentiae, paragraphos et figuras iſtius diſſertationis quoad numeros, quibus inſigniuntur, ex ordine continuabo.

Tab. XVIII. fig. 7. §. 18. Intelligatur planum chartae figur. 7. referre planum Eclipticae, in quo centra Solis et Terrae in S et T immota habeantur, iuncta recta ST. Sectio iſtius plani et globi Solaris ſit circulus PRX; globi vero terreſtris circulus *bfqg*. Recta SC, pars ipſius ST, exponat diſtantiam curtatam centri Veneris a centro Solis tempore coniunctionis inferioris quoad Eclipticam e centro Terrae T viſae, ideoque CT diſtantiam centri Veneris curtatam a centro telluris. Per punctum C in plano Eclipticae ducta ſit recta ACBβ perpendicularis ad ST, quae pro radio CT et ſpectatore in T, tanquam centro, portionem exiguam Eclipticae, vt rectilineam, repraeſentet. In eodem plano ex S et T ducantur rectae S*f*, TP, quae tangant circulos *bfqg*, PRX, reſpectiue in *f*, P; rectam AB autem ſecent in F, B. Si iam duo ſpectatores fingantur, alter in centro terrae T, alter in eius ſuperficie in *f*, et pro vtroque apparentiarum viciſſitudines adſtringantur ad rectam ABβ, quam pro exigua Eclipticae portione habent; patet, ſpectatorem in T videre

dere centrum Solis in C, et radium diſci Solaris ſub magnitudine rectae CB; e contrario ſpectatori in f apparere centrum Solis in F, et radium diſci Solaris ſub magnitudine rectae Fβ, ſi nempe ex f ad P tangens ducatur, quae ſecet ABβ in β. Effectus ergo parallaxis in hoc caſu eſt translatio centri diſci Solaris ex C in F, et radii eius ex CB in Fβ; ideoque, ſi, manentibus Sole et Terra immotis, centrum Veneris in ipſa recta AB motu relatiuo ex A verſus B ſucceſſu temporis moueri fingatur, ſpectator in centro Terrae T citius coniunctionem centrorum ♀ et ☉ videbit in C, quam ſpectator in ſuperficie Terrae ad f poſitus, cui iſta apparebit, centro ♀ris in F haerente. Similiter egreſſus centri ♀ris e diſco Solis obſeruatori in T continget, dum centrum ♀ris in B; ſpectatori autem in f, dum centrum ♀ris in β verſatur, ita, vt ex parallaxi diſcrimen temporis oriatur pro vtroque obſeruatore, tum quoad coniunctionem, tum quoad egreſſum, ex temporibus motus ♀ris per CF, Bβ, cognoſcendum; qui effectus in tempore eo ſenſibilior euadit, quo lentior eſt motus ♀ris relatiuus in recta AB. Hanc quidem apparentiarum viciſſitudinem recta AB per ſectiones in C, F, B, β, manifeſtat; aſt ſi iſta in coelo apparente intelligibilis reddi debeat, res per angulos et motus angulares vt explicetur, neceſſe eſt. Primum autem patet, angulum STP vel CTB pro obſeruatore in T; angulum SfP vel F$f\beta$ pro ſpectatore in f, exhibere ſemidiametrum Solis apparentem, eandem pro vtroque, ob immenſam Solis a terra diſtantiam; quibus angulis CTB, F$f\beta$, inter ſe aequa-

 libus

libus ad ſenſum quoque aequales rectae CB, Fβ, reſpondent, ſiquidem dicti anguli ſunt exigui, et puncta C, F, ſibi valde propinqua. Puncta F, T, iungantur recta FT; orietur angulus CTF, qui rectam CF, effectum parallaxis in coniunctione pro caſu noſtro, reſpiciet. Cum CTF, CTB, anguli ſint admodum exigui, et TC perpendicularis ad CB; rectae CF, CB (vel et Fβ) eandem rationem inter ſe habebunt, quam ſequuntur anguli CTF, CTB (vel FſIβ); quam ob rem iſtae per conſuetam menſuram angularem in minutis et ſecundis commode exprimi poterunt. *Dimenſio* igitur rectae CB conſtat ex ſemidiametro *Solis* apparente; dimenſio autem ipſius CF ex angulo CTF peti debet. Hic habetur ex differentia angulorum TFf, TSf, quorum prior eſt parallaxis horizontalis Veneris in F verſantis, poſterior parallaxis horizontalis Solis. Ergo dimenſio rectae CF datur per differentiam parallaxium horizontalium Veneris et Solis. Similiter ſpatia dato tempore a Venere in recta AB motu relatiuo percurſa per angulos metiri licet, qui ipſis ad centrum T reſpondent; cuiusmodi eſt *horarius Veneris apparens* per minuta et ſecunda anguli conuenientis expreſſus. Vt autem in ſequentibus breuitati proſpiciamus, expediet, per *Parallaxin horizontalem* ſimpliciter, ſemper ſignificare differentiam parallaxium horizontalium Veneris et Solis; et per *Parallaxin altitudinis* eam, quae reuera eſt differentia parallaxium Veneris et Solis in eadem altitudine; niſi expreſſe aliud moneatur. Eiusmodi nempe parallaxium differentia vt ſimplex aliqua parallaxis ſemper ſpectari poteſt. Sic differentia paral-

parallaxium horizontalium ♀ris et ☉lis erit ad differentiam parallaxium ♀ris et ☉lis in eadem altitudine viſa, vt ſinus totus ad coſinum iſtius altitudinis, quae propoſitio vnicuique parallaxi ſimplici competit; vti et prior propoſitio ex poſteriore facile oſtendi poteſt.

§. 19. Expoſitis ſic primis effectuum a parallaxi proficiſcentium lineamentis, eos nunc magis excolere, et ad illuſtrationem noſtri Veneris per Solem Tranſitus accommodare licebit. Primum autem neceſſe eſt, vt de *ſchemate* eius *ad centrum Terrae*, tanquam baſi pro reliquis conſiderationibus, cogitemus. Hunc in finem referat figura 8. idem linearum ſyſtema, quod in fig. 7. §pho praec. conſtructum fuit, exceptis rectis TF, $f\beta$P. Intelligatur deinde planum YZ, per rectam AB tranſiens, et ad planum Eclipticae ſeu chartae normale, cuius pars ſuperior YB boream, inferior AZ auſtrum reſpiciat. Spectatori in T plaga orientalis ſit verſus ſiniſtram, occidentalis verſus dextram. Habeatur autem planum YZ inſtar valde exiguae portionis ſuperficiei ſphaericae, quam centro S radio SC circa Solem deſcriptam concipere licet, vt, ſub hypotheſi, Venerem diſtantiam ſuam a Sole tempore tranſitus per Solem ſenſibiliter non mutare, motus centri ♀ris (relatiuus ad Solem immotum) in dicto plano YZ repraeſentari poſſit ad ductum rectae lineae, vt IE, quae ſub debita ad Eclipticam AB, itidem rectilineam, poſitione ſpectatori in centro Terrae T *Semitam Veneris apparentem* exponat. In eodem plano ad Eclipticam AB in C perpendicularis ſit αC vel αCO partem rectilineam exhibens circuli latitudinis in dicta ſphaera radii SC pro centro Solis in C viſo a ſpectatore in T, ita

Tab. XVIII. fig. 8.

vt pars eius CO, inter C et ſemitam ♀ris IE intercepta, *latitudinem geocentricam centri Veneris* referat in coniunctione eius cum centro Solis quoad Eclipticam; et angulus COE vel COI ſit *Inclinatio ſemitae Veneris apparentis ad circulum latitudinis.* Inclinetur quoque recta δDC in C ad αC angulo tanto, quantus eſt angulus inclinationis circuli declinationis in dicta ſphaera radii SC per C tranſeuntis ad circulum latitudinis αC, vt δDC partem exiguam rectilineam illius *circuli declinationis* repraeſentet. Si cogitetur centro T radio TC circa Terram deſcripta ſphaera, quae cum ſphaera radii SC circa Solem ficta, pro parte quaſi communi habeat planum YZ, ſyſtema linearum AB, IE, αCO, δDC, easdem circumſtantias, quas indicauimus, ſpectatori in centro Terrae T repraeſentabit, aſt in ſuperficie coeli caua, ſitu erecto; ſcilicet AB Eclipticam, IE ſemitam ♀ris apparentem, αCO circulum latitudinis, δDC circulum declinationis centri Solis in C ex T viſi. Manente plano YZ immoto cum ſyſtemate dictarum linearum, concipiatur angulus STP inuariatae magnitudinis circa axem ST circumuolui; punctum B, in quo recta TP planum YZ traiicit, in hoc plano reuolutione iſta deſcribet circulum BδAE centri C et radii CB *diſcum Solis* ibi repraeſentantem, qui poſitione ſua reſpectu praedicti linearum ſyſtematis *Schema Tranſitus Veneris per Solem pro obſeruatore in centro Terrae* T plene exponet. Sic ex motu centri ♀ris relatiuo (pro Sole immoto) in ſemita IOE diiudicare licebit, quando centrum ♀ris in I, E, punctis interſectionum ſemitae ♀ris apparentis cum peripheria diſci Solaris, verſari, ideoque *ingreſſum* et *egreſſum* celebrare de-

debeat.; quemadmodum appulſus centri ♀ris ad ☉, *Momentum coniunctionis centrorum ♀ris et ☉lis quoad Eclipticam* notabit; et ſic porro. Schema hoc ad centrum Terrae, cuius conſtructionem per cognita ex aſtronomicis artificia in ſequentibus ſuppono, in hunc vſum nunc adhiberi debet, vt ipſi effectus parallaxeos pro obſeruatoribus, in ſuperficie Terrae poſitis, ex comparatione cum apparentiis e centro Terrae aeſtimandos, commode inſeri poſſint.

§. 20. Ordiamur ab iis, quae reliquis viam aperiunt. Maneat ergo planum YZ, vt in §. 19, cum ſyſtemate linearum ibi memoratarum, immotum, et intelligatur nunc triangulum ST*f*, quod ducta T*f* ex T ad punctum contactus *f* tangentis S*f*, (ob immenſam Solis a Terra diſtantiam) rectangulum ad ST*f* haberi poteſt, circa ST tanquam axem reuolui. Recta T*f* deſcribet circulum globi terreſtris maximum *fdgk*, cuius planum normale eſt ad rectam ST, ideoque parallelum ad planum YZ, et qui circulus hemiſphaerium Terrae a Sole illuminatum ſeparat ab hemiſphaerio tenebroſo, ſeu pro ſpectatore in Sole S *diſcum Terrae illuminatum* refert. Oritur hoc modo conus rectus S*fg*, cuius baſis eſt diſcus Terrae *fdgk*, vertex S et axis SCT. Dum planum YZ hunc ſecat, formatur in illo circulus FDGK radii CF, cuius facies prorſus oppoſita eſt faciei diſci telluris *fdgk*, ita quidem, vt, ſi punctum *f*, ſeu ſpectator in *f*, in geneſi coni praedicti percurrat ſemiperipheriam diſci borealem *fdg*, punctum F ipſi *f* reſpondens itidem peragret ſemiperipheriam borealem FDG in eundem ſenſum et ſecun-

dum eundem ordinem; et ſimiliter translationi puncti *f* per ſemiperipheriam diſci auſtralem *gkf* reſpondeat translatio puncti F per ſemiperipheriam GKF itidem auſtralem. Spectatori in ſuperficie Terrae in *f* apparet centrum diſci Solaris in F; ſi ergo per totam peripheriam *fdgk* obſeruatores diſpoſiti concipiantur, vnusquisque centrum diſci Solaris referet ad peculiare punctum circuli FDGK ſecundum ordinem indicatum; et *effectus parallaxis pro iis obſeruatoribus eſt diuerſa centri diſci Solaris poſitio in peripheria circuli* FDGK *radii* CF, cum qua ſimul diuerſus ſitus diſci Solaris in plano YZ pro vnoquoque obſeruatore connectitur. Loca peripheriae iſtius circuli FDGK diiudicare licet ex ſitu eorum reſpectu ſyſtematis linearum AB, αC, δC, quas circulus ſecat; et dato eiusmodi loco, verbi cauſa L, obſeruator iu *l* ſtatim aſſignari poterit, qui centrum diſci Solaris in L videt, ſi nempe per S et L recta SL*l* cogitetur feriens circulum *fdgk* in *l*. Viciſſim ex dato *l* dabitur L. Similiter parti GCF Eclipticae AB reſpondet recta *g*T*f* in diſco Terrae, et puncto D punctum *d*, vel rectae DC recta T*d*, quae T*d* in diſco terrae circulum declinationis (circulo declinationis DC reſpondentem) exprimet, eiusque poſitionem reſpectu Eclipticae *g*T*f* indicabit; ita vt praedictum ſyſtema linearum in plano YZ facile transferri poſſit in planum diſci Terrae. Caeterum dimenſio circuli FDGK reſpectu circuli BδAE Solis diſcum exhibentis patet ex ratione radiorum CF ad CB, ſeu parallaxis horizontalis ad ſemidiametrum Solis apparentem (§. 18.).

§. 21.

§. 21. Tandem quoque effectus parallaxis pro quouis obſeruatore in ſuperficie Terrae vbicunque conſtituto examinare licebit, quos iſte obſeruat, dum in motu vertiginis Terrae translatus phaenomena motus primi Solis percipit. Concipiatur nempe proiectio ſuperficiei terreſtris orthographica in planum circuli *fdgk*, ſeu in diſcum Terrae illuminatum. Iſtam pro explicandis motus primi Solis phaenomenis recte ſuſcipi poſſe, ex aſtronomicis abunde conſtat. Obſeruator datus, v. c. Lipſienſis, in motu vertiginis Terrae circa polos eius deſcribit circulum ad aequatorem terreſtrem parallelum, cuius proiectio orthographica, per artificia in aſtronomicis cognita, ſemper in poteſtate eſt, quaeque ſemitam obſeruatoris in diſco Terrae illuminato exponit. Sit haec, verbi cauſa, Ellipſis *lmn* pro ſpectatore Lipſienſi, conſtructa ad circulum declinationis T*d*, qui meridianum vniuerſalem repraeſentat. Dum in iſta ſemita ſpectator in *l* ad marginem occidentalem diſci Terrae haeret, Solem orientem; quando in motu per *lm* ad meridianum vniuerſalem in *m* appellit, Solem culminantem; et tandem Solem occidentem videt, quando in motu ſuo per *mn* orientalem diſci Terrae marginem attingit. A ſpectatore in *l* poſito ducta intelligatur ad centrum Solis S recta *l*S, tranſiens planum YZ in puncto L peripheriae circuli FDGK, quod puncto *l* diſci *fdgk* (§. 20.) reſpondet. Hanc rectam ſecum ducat ſpectator in motu ſuo per *lmn*; formabitur conus, verticis S, et baſeos ellipticae *lmn* ſitae in plano diſci Terrae, qui ſectus per planum YZ ad planum diſci *fdgk* parallelum, in illo producit ellipſin

LMN,

LMN, ellipſi *lmn* in diſco terrae prorſus ſimilem et reſpectu circuli declinationis DC ſimiliter poſitam; cuius ergo conſtructio intra circulum FDGK ſimilem in modum perficitur, ac conſtructio ſemitae *lmn* in diſco Terrae. Spectatori in *l* haerenti centrum Solis apparet in L; translato autem per *lmn* reſpondet translatio centri Solis per LMN. Eſt igitur *effectus parallaxeos pro obſeruatore noſtro in motu eius diurno* (ſeu in motu apparenti Solis diurno) *diuerſa centri diſci Solaris poſitio in peripheria ellipſis* LMN, cum qua ſimul diuerſus ſitus diſci Solaris in plano YZ connectitur. Ordinem translationis centri Solis per LMN optime dignoſcere licet ex ordine temporis. Quemadmodum enim horis antemeridianis ſpectator per *lm*, pomeridianis per *mn* fertur; ita etiam translatio centri Solis perficitur horis antemeridianis per LM, pomeridianis per MN, ab occidente verſus orientem in apparente Solis diſco BδAE (pro obſeruatore in T) immoto. Puncto M interſectionis ellipſis LMN cum circulo declinationis δDC reſpondet meridies; quare data in motu primo elongatione Solis a meridie in tempore, per artificia conſueta dabitur poſitio centri Solis reſpectu M in ellipſi LMN, pro obſeruatore per *lmn* moto. Cum figura FDGK cum ſyſtemate inſcriptarum linearum prorſus ſimilis ſit proiectioni orthographicae ſuperficiei terreſtris in planum diſci Terrae *fdgk*; illa, breuitatis cauſa, commode *Proiectio in diſcum terrae* dici poteſt. Nullum datur diſcrimen inter vtramque figuram, praeter magnitudinem et facies oppoſitas. Si figura FDGK eiuſdem magnitudinis cogi-

tetur

tetur cum diſco *fdgk*, et planum YZ motu ſibi parallelo ad planum diſci *fdgk* accedere intelligatur, pervadente puncto C rectam CT, donec plana YZ, *fdgk*, coincidant; congruent ſibi omnes lineae homonymae, et mutuum ectypum facierum ſibi oppoſitarum efficient.

§. 22. Hactenus parallaxis effectus generaliter pro quouis obſeruatore in ſuperficie terrae diiudicauimus; nunc rem ampliato ſchemate (fig. 9.), Schemati in plano YZ (fig. 8.) analogo, illuſtrare, atque computo pro dato obſeruatore ſubiicere oportet. Primum autem *Schema ad centrum Terrae* (§. 19.) pro noſtro tranſitu propius vt cognoſcatur, neceſſe eſt; in quo negotio, cum ſchema ex obſeruationibus correctum nondum ſupponere liceat, et ſequentia potius ſpeciminis tantum loco accipi debeant; elementa conſtructioni ſchematis inſeruientia ſumere licebit ea, quae ex Tabulis aſtronomicis, methodo conſueta, depromta fuerunt, cum praeparatio ad obſeruationem noſtri Tranſitus Veneris per Solem inſtitueretur. Referant ergo in figura 9, ad apparentias in cauitate coeli ſitu erecto (vt poſcit ſchema in plano YZ fig. 8. deſcriptum) accommodata, AEB marginem diſci Solaris; C eius centrum; CE vel CI radium; ACB Eclipticam; CO circulum latitudinis centri Solis, et in eo recta CO latitudinem centri ♀ris geocentricam tempore coniunctionis centrorum ☉ et ♀ quoad Eclipticam; IOE ſemitam centri ♀ris apparentem, quae marginem Solis in I et E ſecet; COE inclinationem eius ad circulum latitudinis occidentem verſus; DCH circulum declinationis centri Tab. XIX. Fig. 9.

Solis C ad tempus dictae coniunctionis, cuius ſitum reſpectu circuli latitudinis CO tantiſper inuariatum durante tranſitu accipiamus, ideoque OCH inclinationem circuli declinationis ad circulum latitudinis conſtantem; et denique CH differentiam declinationum centrorum ☉lis et ♀ris tempore coniunctionis quoad aſcenſionem rectam in H. Iuncta intelligantur puncta C, I; C, E, per radios diſci Solis CI, CE, vt ſyſtema triangulorum in fig. 9. emergat; et ſint ex Tabulis, vt ante monuimus:

CE vel CI $= 948''$, 5 part. circ. maximi, exiſtente diam. ☉ app. $= 1897'' = 31'.37''$

CO $= 603$, 2 part. circ. max. $= 10'.3''.2$

COE $= 98°.30'.10''$

COI $= 81.\ 29.\ 50$

OCH $= 6.\ 9.\ 20.$

Ex his datis reliquarum ſchematis conditionum dimenſiones facile innoteſcunt. Sic

	ex datis	inueniuntur
in △COE	CE	CEO = CIO (ob CE, CI, in △CIE aequales)
	CO	$= 38°.58'.25''$
	COE	OCE $= 42.\ 31.\ 25$
		OE $= 648'',21.$
in △COI	CIO	OCI $= 59°.31'.45''$
	COI	OI $= 826'',58$
	CI	ICE $= 102°.3'.10''$ = OCI + OCE
		IE $= 1474''.79$ = OI + OE

in

in $\triangle$OCH CO $OHC = 75^\circ.20'.30''$ et
COH velCOE $CHE = 104.\ 39.\ 30$
OCH $OH = 66''.85 +$
$CH = 616,64 = 10'.16'',64$

$HE = 581''.36 = OE - OH$
$HI = 893.\ 44 = OI + OH.$

Si motus centri Veneris in ſemita IE e centro terrae viſa per interualla temporis reſpondentia expreſſos deſideres, opus eſt *motu horario* eius in iſta ſemita relatiuo (pro Sole immoto), quem ex calculo per Tabb. ponamus $= 3'.58''.3$, vel $238''.3$ part. circ. max. ex quo, inferendo $238''.3 : 1.$ hor. vel $3600'' =$ datum ſpatium a centro ♀ris percurſum: interuallum temporis reſpondens, hoc inueniri poteſt. Sic, verbi cauſa, tempus per IE, ſeu mora totius tranſitus centri ♀ris, erit $= 6^h.21'.20''$; et ſic de reliquis temporibus per HE, HI, OH, etc. Tandem, ſi de ipſis temporis momentis quaeſtio ſit, quibus centrum ♀ris in datis ſemitae punctis, verbi cauſa, in I, H, E, haeſit, neceſſe eſt, vt *tempus coniunctionis centrorum* ☉ *et* ♀ *quoad Eclipticam* in O, inſtar *termini a quo*, notum ſit, cuius ope ex temporibus per OI, OE, OH, etc. momenta Ingreſſus, Egreſſus, Coniunctionis quoad Aſcenſionem rectam etc. facile reperiuntur.

§. 23. Huc vsque centrum Veneris ſolummodo attendimus; cum autem Venus diſculo notabili praedita ſit, huius quoque in quibusdam circumſtantiis, praeſertim circa ingreſſum et egreſſum, ratio haberi debet. Tunc ſcilicet celebrantur *contactus limborum Solis et Ve-*

Veneris, alter quidem *exterior* poſito ♀ris diſculo extra Solis diſcum; alter *interior*, dum diſculus ♀ris intra diſcum Solis conſtituitur. Vt horum contactuum conditiones ad calculum reuocari poſſint, in fig 10. partem figurae 9. ſeorſim exhibere placet, ne linearum multitudine haec obſcura euadat. Sit ergo in fig. 10.
Tab. XIX. COE idem triangulum, quod in fig. 9. per COE
Fig. 10. inſignitum occurrit. Centro C radio CE (= ſemidiametro Solis) deſcripta ſit pars limbi Solaris αEβ. Capiantur, C*e* = ſummae, C*i* = differentiae, ſemidiametrorum Solis et Veneris; atque centro C, radiis C*e*, C*i*, fiant circuli concentrici, δ*ei*γ, ſecantes ſemitam centri ♀ris OE (productam) in *e*, *i*. Patet centro ♀ris in *e* haerente celebrari contactum exteriorem ad β; interiorem vero ad α, dum centrum ♀ris in *i* verſatur; iunctis ſcilicet C*e*, C*i*α. Pro cognoſcendis triangulorum CO*e*, CO*i*, conditionibus, circa egreſſum

	ex datis	inueniuntur
in △CO*e*	C*e*	C*e*O
	CO	OC*e*
	CO*e* vel COE	O*e*
in △CO*i*	C*i*	C*i*O
	CO	OC*i*
	CO*i* vel COE	O*i*.

Hinc dantur, mora totius tranſitus diſculi ♀ris per limbum Solis ex ſpatio *ie* = O*e* − O*i*; mora a contactu interiore ad appulſum centri ex ſpatio *i*E = OE − O*i*; mora a tranſitu centri ♀ris per limbum Solis ad contactum exteriorem ex ſpatio E*e* = O*e* − OE; ſi ſcilicet

cet haec ſpatia per horarium ſupra indicatum in tempus conuertantur. Ex modo procedendi facile intelligitur, rem omnem transferri poſſe ad figuram 9. tanquam generalem. Si enim in triangulo COE cogitetur CE = ſummae ſemidiametrorum Solis et Veneris, manentibus CO, COE; inuenientur CEO, OCE, OE, pro contactu exteriore circa egreſſum; pro interiore autem, ſi CE ſumatur = differentiae ſemidiametrorum ☉lis et ♀ris. Similiter pro ingreſſu, poſita CI = ſummae ſemidiametrorum ☉lis et ♀ris, manentibus CO, COI, acquiri poterunt CIO(=CEO), OCI, OI, pro contactu exteriore; pro interiore e contrario, ſi CI = differentiae ſemidiametrorum ☉lis et ♀ris capiatur. Comparatis deinde lineis OE, OI, pro contactibus reſpectiue, cum homonymis OE, OI, pro centro ♀ris; conditiones diſculi ♀ris per limbum ☉lis, et quoad ſpatia, et quoad tempus (ope horarii) innoteſcent. Praeſtat, hanc methodum adhibere, ne figurarum multitudine, vel linearum multiplicatione, obruamur. Speciminis loco ſupponatur

Tab. XIX. Fig. 9.

Semidiameter Veneris apparens = 29″, erit
Summa ſemidiametrorum ☉ et ♀ = 977,5
Differentia - - - - - - = 919,5

et dabuntur:

Pro contactu exteriore

Circa Ingreſſum	*Circa Egreſſum*
CIO = 37° 36′. 40″	CEO = 37° 36′. 40″
OCI = 60. 53. 30	OCE = 43. 53. 10
OI = 863″. 53	OE = 685″. 16

HI = 930. 38 = OI + OH. HE = 618. 30 = OE − OH

ſpatium pro mora a contactu exter. ad appulſum centri ♀ - - = 36''.94	ſpatium pro mora ab appulſu centri ad contactum exteriorem = 36''.94
mora ipſa - = 0h. 9'. 18''	mora ipſa - = 0h. 9'. 18''

Pro contactu interiore

CIO = 49°.27'.0''	CEO = 49°.27'.0''
OCI = 58. 3. 10	OCE = 41. 2. 50
OI = 788''.90	OE = 610''.52
HI = 855.75 = OI + OH	HE = 543.67 = OE − OH
ſpatium pro mora ab appulſu centri ad cont. inter. = 37''.69	ſpatium pro mora a contactu inter ad appulſum centri = 37''.69
mora ipſa = 0h. 9'. 29''.4	mora ipſa = 0h. 9'. 29''.4

Spatium pro mora totius tranſitus ♀ris per limbum ☉lis = 74''.63
mora ipſa - - - = 0h. 18'. 47''.4.

§. 24. Cognito per praec. ſchemate ad centrum terrae, ea, quae cuiuis obſeruatori in ſuperficie terrae obuia fiunt, calculo perſequi nunc licebit. Hunc in finem in fig. 9. e centro diſci Solaris C, radio CF vel CD, qui ſit ad radium diſci Solaris in ratione parallaxis horizontalis ad ſemidiametrum Solis apparentem (§. 18. 20), deſcriptus intelligatur circulus FDGK, qui diſcum terrae FDGK (fig. 8. §. 21.) aemuletur. Dicta ratio in effectione circuli FDGK (fig. 9.) obſeruari non potuit, qui iuſto maior repraeſentari debuit, vt inſcribendarum linearum euidentiae conſuleretur.

Tab. XIX. Fig. 9.

tur. Reliqua calculus ſupplebit. Intra circulum FDGK nunc ea efficiantur, quae ad proiectionem in diſcum terrae (fig. 8. §. 21.) requiruntur; in quo negotio recte ex aſtronomicis ſupponi poſſunt, quae ibi de conſtructione ſchematis, ope proiectionis globi terreſtris orthographicae, ad cognoſcendas Eclipſis Solis vel potius Terrae conditiones pro dato in ſuperficie terrae obſeruatore, tradi ſolent. Igitur circa DC circulum declinationis, nunc meridianum vniuerſalem (§. 21.), cogitetur ſemita obſeruatoris dati v. c. Elliptica. Sumamus exempli loco Lipſienſem, qui in noſtro Veneris per Solem tranſitu Ellipſin percurrat SM*s*, cuius centrum ſit *Z*, axis maior S*Zs* (ad angulos rectos cum DC), minor M*m* (pars ipſius DC), ita vt ſemiſſis anterior ſit SM*s* (ob Solis declinationem borealem), cuius quadrantem SM obſeruator peragret horis antemeridianis a 6ta ad 12mam; quadrantem vero M*s* horis pomeridianis a meridie ad ſextam. Eadem deinceps eſt translatio centri diſci Solaris per SM*s*, ad cognoſcendos, pro obſeruatore Lipſienſi, parallaxis effectus (§. 21.); cum praecedens idea potius imaginationem iuuet ex conuenientia cum ſchemate pro eclipſi aliqua terrae. Per M, *m*, ducantur reſpectiue rectae PT, *pt*, ad S*s* parallelae, vel ad DC perpendiculares, peripheriam circuli FDGK ſecantes in P, T, *p*, *t*; intra quas integra ellipſis comprehenditur. Ex S, *s*, ad rectam S*s* intelligantur perpendiculares SL, *s*N, ſecantes dictum circulum in L, N; ex D autem reſecentur arcus D*a*, D*b*, inter ſe et declinationi Solis (ad tempus coniunctionis in O) aequales. Sint

De-

Declinatio Solis ſeu $Da(=Db)$ $=d$
Eleuatio aequatoris pro dato obſeruatore (v. c. Lipſienſi) $=e$

His poſitis ex theoria proiectionum patet:
Si mente recta ab (hic omiſſa) puncta a, b, iungens concipiatur, eam in recta DM ſignare proiectionem poli (hic quoque omiſſam), qui boreus, in noſtro caſu, in anteriore diſci facie apparet,

arcum aT (vel bP) aequalem eſſe eleuationi aequatoris $=e$
arcum DL (vel DN) itidem aequalem eſſe eleuationi aequatoris $=e$
vt ZS (exiſtente LS ad DZ parallela, vtraque nempe ad ZS perpendiculari) fit $=$ ſinui arcus DL (pro ſinu toto DC) $=\text{ſin.}\,e$
arcum $DT = aT + Da$ $=e+d$
arcum $Dt = Dp$
$= pa - Da$ $=e-d$

ſiquidem arcus pa inter punctum a, quod proiectioni poli, et punctum p, quod proiectioni in m puncti ſemitae obſeruatoris in poſteriori diſci facie remotiſſimi reſpondet, interceptus diſtantiae iſtius puncti a polo, hoc eſt, eleuationi aequatoris aequalis eſt.

Ad inueniendas nunc ſemitae ellipticae SMs dimenſiones, facile intelligitur, pro ſinu toto DC, qui trigonometrice conſideratus ſemper dicatur R, eſſe

$$CM = \text{coſ. arcus } DT = \text{coſ.}(e+d)$$
$$= \frac{\text{coſ.}\,e \times \text{coſ.}\,d}{1} \frac{- \text{ſin.}\,e \times \text{ſin.}\,d}{R}$$

Ca

$$Cm = \text{coſ. arcus } Dt = \text{coſ.}(e-d)$$
$$= \frac{\text{coſ.}\,e \times \text{coſ.}\,d + \text{ſin.}\,e \times \text{ſin.}\,d}{R}$$
$$Mm = Cm - CM = \frac{2 \times \text{ſin.}\,e \times \text{ſin.}\,d}{R}$$
$$ZM = \tfrac{1}{2} Mm \; (= \text{ſemiaxi minori})$$
$$= \frac{\text{ſin.}\,e \times \text{ſin.}\,d}{R}$$
$$ZS = \text{ſemiaxi maiori, per praec.} = \text{ſin.}\,e$$
$$CZ = CM + ZM = \frac{\text{coſ.}\,e \times \text{coſ.}\,d}{R}.$$

Hae lineae ZS, ZM, CZ, trigonometrice expreſſae ad eam menſuram reuocari debent, quae in figura 9. in partibus circuli maximi conſtituta eſt, id quod fiet, ſi capiatur DC radius circuli FDGK = parallaxi horizontali (= differentiae parallaxium horizontalis ♀ et ♁ §. 18.) in partibus circ. max. quae ſit $= p$, et inferatur, $R : p =$ data recta (verbi cauſa ZM) trigonometrice expreſſa : eandem (ZM) in partibus circuli maximi. Hoc modo acquiruntur

$$ZS = \frac{p \times \text{ſin.}\,e}{R}$$
$$ZM = \frac{p \times \text{ſin.}\,e \times \text{ſin.}\,d}{R^2}$$
$$CZ = \frac{p \times \text{coſ.}\,e \times \text{coſ.}\,d}{R^2}$$

vt ſitus cuiusuis loci, puta V, ſemitae ellipticae SMs in eadem menſura innoteſcat; fiat Vu ad MZ parallela ſecans ZS in u; et manifeſtum eſt, inuentis Zu, uV, dari locum V. Hunc in finem in fig. 11. circa axem maiorem SZs ellipſis $SMsm$ centro z, radio ZS, deſcriptus concipiatur circulus $S\mu s$; et producantur ZM, uV, vsque ad occurſum cum eius peripheria in μ, v. Iſte circulus parallelum (ad aequatorem) ob- Tab. XIX. Fig. 11.

 ſerua-

ſeruatoris dati in ſuperficie terrae repraeſentat, ita vt μ proiecto puncto M, et v proiecto loco obſeruatoris V in ſuperficie terrae reſpondeat, et arcus μv elongationem obſeruatoris a meridiano in dicto parallelo exhibeat ex dato tempore, ad quod locus V quaeritur, facile cognoſcendus. Sit arcus iſte μv, ſeu elongatio a meridiano $= m$; pro radio ZS erit $Zu = \text{ſin.} m$, et $uv = \text{coſ.} m$. Igitur

$$R : \text{ſin.} m = ZS : Zu$$
$$= \frac{p \times \text{ſin.} e}{R} : Zu$$
$$Zu = \frac{p \times \text{ſin.} e \times \text{ſin.} m}{R^2}$$

Deinde ex natura ellipſis eſt

$$Z\mu\,(= ZS) : uv = ZM : uV$$

quare cum $ZS : uV = R : \text{coſ.} m$, fiet

$$R : \text{coſ.} m = ZM : uV$$
$$= \frac{p \times \text{ſin.} e \times \text{ſin.} d}{R^2} : uV$$

et $uV = \frac{p \times \text{ſin.} e \times \text{ſin.} d \times \text{coſ.} m}{R^3}$.

§. 25. His ita praeparatis ad ſpecialiora deſcendere licet. Habeamus autem tantiſper declinationem Solis ſeu d (ad tempus coniunctionis quoad Eclipticam inuentam) per totum tranſitus noſtri tempus conſtantem, prout (§. 22.) angulum circuli declinationis cum circulo latitudinis, ſeu OCH, conſtantem quoque aſſumſimus. Si igitur pro eodem obſeruatore (v. c. Lipſienſi) varia phaenomena ſint excutienda, cui conſtans eleuatio aequatoris, ſeu e, reſpondet; et parallaxis horizonta-

zontalis, ſeu p, vel radius CD, etiam ſit inuariatae magnitudinis; erit Tab. XIX. Fig. 9.

$$CZ = \frac{p \times coſ.\, e \times coſ\, d}{R^2} \quad (§.\ 24.)$$

quantitas conſtans; nec non $ZH = CZ + CH$, cum CH ex calculo generali (§. 22.) detur. Exempli gratia ſint:

$p = 25''$ (ſcil. pro parallaxi ☉ horiz. $= 10''$.)
$d = 22°.42'$.bor.
$e = 38.38$. pro obſeruatore Lipſienſi

fient log.p = 1,3979400
log. coſ. e = 9,8927385
log. coſ. d = 9,9649843
21,2556628
log. R^2, = 20,0000000
log. CZ = 1,2556628
CZ = 18'',016
et cum CH = 616,64 (§. 22.)
ZH = 634,656.

Reliquae disquiſitiones pro eodem obſeruatore expoſcunt tempus datum, expreſſum in partibus diei Solaris veri, ad quod effectus parallaxis explorari debet. Hoc enim comparatum cum meridie in M, ſi tempus datum inter horam ſextam matutinam et ſextam veſpertinam ordine naturali cadat, patefacit diſtantiam loci centri Solis, a dato obſeruatore ad datum tempus in V viſi, a meridie in M, ſeu arcum proiectum VM in tempore, quod in gradus etc. conuerſum, (aſſignando ſingulis horis gradus 15. etc.) *elongationem centri*

Solis viſi a meridiano, per arcum proiectum V M, exponit, quam nunc ſemper per *m* (§. 24.) inſignire licet. Si tempus datum inter horam 6tam veſpertinam et 6tam matutinam ordine naturali cadat, comparatio eius cum media nocte in *m* inſtituitur, vt elongatio centri Solis viſi a meridiano in poſteriore ellipſis ſemiſſe innoteſcat. In genere ex dato tempore facile diiudicari poteſt, in quonam ellipſis quadrante locus centri Solis viſus ponatur. Sit iſte in puncto V per *m* dato. Quaerantur:

Tab. XIX. Fig. 9. 11.

Fig. 9.

$$Zu = \frac{p \times ſin.\, e \times ſin.\, m}{R^2} \quad (§.\ 24.)$$

$$uV = \frac{p \times ſin.\, e \times ſin.\, d \times coſ.\, m}{R^3}.$$

Producta intelligatur *u*V (ad ZM parallela) vsque ad occurſum in Q cum ſemita centri ♀ris IOE, vt *u*Q parallela ſit ad ZH. Ex H fiat HR parallela ad Z*u*, ſeu perpendicularis ad ZH, ſecans *u*Q in R; erit recta *u*R = ZH, quae proinde datur; et HRQ erit triangulum ad R rectangulum. In hoc triangulo dabitur HR = Z*u*, et angulus RHQ = CHQ (CHE) − recto = 104°. 39′. 30″ (§. 22.) − 90°. = 14°. 39′. 30″. qui ex hyp. CHE (ex COE et OCH deductum) invariatum manere, etiam conſtans erit. Inferendo igitur, vt ſinus totus (R): tang. RHQ = HR : RQ, nec non, coſ. RHQ : ſin. tot. (R) = HR : HQ; dabuntur RQ, HQ. Inueniri ergo poteſt VQ = *u*R (ZH) − *u*V + RQ, ſi punctum V in quadrante ellipſis SM, vt in noſtro caſu, ſitum ſit. In reliquis caſibus, ex poſitione puncti V, (et reſpondentis Q) citra vel vltra rectam ZH, et in anteriore vel poſteriore ellipſis ſemiſſe,

miſſe, facile diiudicatur quantitas rectae VQ ex uR (ZH), uV, RQ. Per rectas autem VQ, HQ, ſub angulo dato VQH $=$ OHC (§. 22.), vel eius deinceps poſito, comprehenſas, datur poſitio centri Solis viſi V reſpectu ſemitae centri ♀ris et dati in ea puncti H; ex qua deinde reliquae conditiones cognoſci poſſunt.

§. 26. Quaeramus, exempli loco, effectum parallaxis in egreſſu centri ♀ris e diſco Solis Lipſiae viſo, quem $9^h.18'.9''$ ante meridiem d. 6. Iunii 1761. obſeruatum fuiſſe ponamus. Erit ergo diſtantia ipſius V a meridie ad M in tempore $= 2^h.41'.51''$, et elongatio $m = 40°.27'.45''$, V in quadrante SM ellipſis haerente. Fient autem ſequentia, manentibus datis §phi 25.

log. p $= 1,3979400$
log. ſin. e $= 9,7954171$
log. ſin. m $= 9,8122113$

---

log Zu $= 1,0055684$
demto ſcil. log. R^2
Zu $=$ HR $= 10'',129$

log. p $= 1,3979400$
log. ſin. e $= 9,7954171$
log. ſin. d $= 9,5864816$
log. coſ. m $= 9,8812881$

---

log. uV $= 0,6611268$
demto ſcil. log. R^3
uV $= 4'',583$

in triangulo HRQ

$$\log. HR (Zu) = 1,0055684$$

$$\log. \text{tang.} \left(\begin{matrix} RHQ \\ (14^{\circ}.39'.30'') \end{matrix} \right) = 9,4175846$$

$$\log. RQ = 0,4231530$$

demto ſcil. log. R

$$RQ = 2'', 649$$

$$ZH = uR = 634, 656 \text{ (§. 25.) add.}$$

$$uQ = 637, 305$$

$$uV = 4, 583 \text{ ſubtr.}$$

$$VQ = 632, 722$$

$$\log. R + \log. HR = 11,0055684$$

$$\log. \text{coſ.} \left(\begin{matrix} RHQ \\ (14^{\circ}.39'.30'') \end{matrix} \right) = 9,9856294$$

$$\log. HQ = 1,0199390$$

$$HQ = 10'',47$$

Vt nunc conditio egreſſus centri ♀ris introducatur; centro V, radio $Ve =$ ſemidiametro diſci Solis, interſecetur ſemita centri ♀ris in e verſus E. Cum tempore iſtius egreſſus locus centri Solis viſus pro ſpectatore Lipſienſi ſit in V, et circulus centro V, radio Ve, mente deſcriptus pro eodem exponat peripheriam diſci Solaris, patet ſimul ac centrum ♀ris appellit ad ϵ, iſtud a ſpectatore Lipſienſi videri conſtitutum in occidentali Solis margine, ideoque in ipſo egreſſu; cum e contrario ſpectator in centro terrae tunc demum cen-

trum

trum ♀ris in egreſſu deprehendit, quando iſtud in E verſatur (§. 19. 22.). Spatium ergo *e*E, ope motus horarii ♀ris (§. 22.) in tempus conuerſum, docet effectum parallaxis circa egreſſum centri ♀ris in tempore, quo ſcilicet ſpectatori Lipſienſi egreſſus citius contingit, quam obſeruatori in centro terrae, hoc eſt, *accelerationem egreſſus*. Vt ſpatium *e*E innoteſcat; cum dentur, HE (§. 22), HQ (ante reperta), QE = HE − HQ; patet, inuenta Q*e*, acquiri *e*E = QE − Q*e*. Cognoſcitur autem Q*e* ex reſolutione trianguli VQ*e*, in quo dantur recta VQ (ante deducta = 632″,722.), V*e* = ſemidiametro Solis = 948″,5 (§. 22.); VQ*e* = CHE (ob VQ, CH, parallelas) = 104°.39′.30″ (§. 22.); quare pateſiunt, V*e*Q, ex analogia V*e* : ſin. VQ*e* = VQ : ſin. V*e*Q; QV*e*, ex VQ*e*, V*e*Q; Q*e* ex analogia ſin. V*e*Q : VQ = ſin. QV*e* : Q*e*.. Schema calculi hoc eſt:

log. ſin. VQ*e* = 9,9856294	V*e*Q = 40°.11′.35″
log. VQ = 2,8012130	VQ*e* = 104. 39. 30
12,7868424	144. 51. 5
log. V*e* = 2,9770373	179. 59. 60
log. ſin. V*e*Q = 9,8098051	QV*e* = 35. 8. 55
V*e*Q = 40°.11′.35″	
log. VQ = 2,8012130	HE = 581″.36 (§. 22.)
log. ſin. QV*e* = 9,7601956	HQ = 10. 47
12,5614086	QE = 570. 89
log. ſin. V*e*Q = 9,8098051	Q*e* = 564. 42
log. Q*e* = 2,7516035	*e*E = 6. 47
Q*e* = 564″.42	

hora-

horarius ♀ris in ſemita $= 238'',3$ (§. 22.)

$$\begin{array}{ll} \log. eE(6'',47) & = 0,8109043 \\ \log. 3600 & = 3,5563025 \\ \hline & 4,3672068 \\ \log. 238'',3 & = 2,3771240 \\ \hline \log. \text{temp. per } eE & = 1,9900828 \\ \text{tempus per } eE & = 97'',74 \\ & = 1',\ 38''. \text{ rotunde} \end{array}$$

quod accelerationem egreſſus quaeſitam exponit.

§ 27. Similem in modum inquirere licet effectum parallaxis in ingreſſu centri ♀ris in Solis diſcum, quem (inuiſibilem licet) obſeruatori Lipſienſi mane $3^h\ 6'.49''$. contigiſſe fingamus. Cadit ergo locus centri Solis tunc viſus in quadrantem ellipſis mS (fig. 11.); quem vero in V retineamus, ne linearum multitudo ſchema obſcurum reddat, mente ſupplendo reliqua. Facta relatione ad mediam noctem fit elongatio ſeu $m = 46°.42'.15''$ et inueniuntur

$$\begin{array}{ll} Zu = HR & = 11'',\ 36 \\ uV & = 4,\ 131 \\ RQ & = 2,\ 971 \\ HQ & = 11,\ 742 \\ \multicolumn{2}{l}{VQ = 641'',758 = uR(ZH) + uV + RQ} \end{array}$$

(§. 25.) in hoc caſu.

Centro V, radio $Vi =$ ſemidiametro Solis, ſi fiat interſectio ſemitae ♀ris in i verſus I; ingreſſus centri ♀ris continget obſeruatori in centro terrae in I, ſpectatori Lipſienſi in i, ideoque ſerius; et ſpatium Ii

ope

ope horarii in tempus conuerſum manifeſtabit *retardationem Ingreſſus.* Reperiuntur autem in triangulo QV*i*, ex V*i*, VQ, *i*QV (=OHC=75°.20'.30''. §. 22.), anguli, Q*i*V=40°.53'.20'', QV*i*=63°.46'.10'', et recta Q*i*=879'',45; quae ſi comparetur cum QI=905'',182. ſcil.=HI (893'',44. §. 22.)+HQ (11'',742), producit I*i*=25'',73. et tempus per I*i*=388'',7=6'.29'' rotunde, ſeu retardationem quaeſitam. Periculum quoque facere placuit, quanta pro eodem obſeruatore Lipſienſi proditura ſit acceleratio egreſſus vel retardatio ingreſſus centri ♀ris, ſi, manentibus omnibus reliquis, parallaxis horizontalis ſeu *p* alius magnitudinis accipiatur. En Tabulam inuenta comprehendentem:

Si ponantur		erunt	
parallaxis horiz. ☉	vel reſpondens parall. horiz. *p*	acceleratio egreſſus	retardatio ingreſſus
10''	25''	1'. 38''	6'. 29''
10. 85	27. 275	1. 47	7. 5
15	37. 707	2. 31	9. 54

ex qua patet, exiguae parallaxis horizontalis Solis variationi notabilem mutationem in effectibus parallaxis reſpondere, ita, vt ad eos in egreſſu et ingreſſu prae caeteris reſpiciendum ſit, ſi aliquando de magnitudine parallaxis Solis horiz. iudicium ex iis inſtitui debeat. Notandum autem eſt in eiusmodi deductionibus: ſi tempus egreſſus vel ingreſſus immediate ex obſeruatione acquiſitum ſit, calculum pro effectu parallaxis ad id inſtitutum nulla indigere correctione. Aſt, ſi tem-

 pus

pus egreſſus vel ingreſſus detur ex ſchemate ad centrum terrae, quo centrum ♀ris fuit in E vel I pro obſeruatore in centro terrae, facta tantiſper ſuppoſitione, ſchema iſtud ex Tabulis deductum coelo eſſe conforme; correctione tunc aliqua opus eſt. Reputetur nempe tempus datum v. c. egreſſus in E, ac ſi pro dato ſpectatore, v. c. Lipſienſi, immediate ex obſeruatione acquiſitum fuiſſet, et quaeratur ad iſtud, vt in §. 26, effectus parallaxis ſeu tempus per *e*E. Hoc a dato tempore in E ſubtrahatur, et ſatis prope cognoſcetur tempus egreſſus pro obſeruatore Lipſienſi, ad quod calculus §phi 26. denuo repetatur, *qui* demum iuſtam egreſſus accelerationem pateſaciet.

§. 28. Si circa egreſſum vel ingreſſum deſideretur effectus parallaxis in contactu limborum Solis et Veneris vel interiore vel exteriore, quos contactus prae reliquis circumſtantiis attendere ſolent Aſtronomi; ex tempore eiusmodi contactus dato (ponamus, per obſeruationem) rectae VQ, HQ, reſpondentes prorſus, vt in §. 25, inueniuntur. Si nunc *de contactu interiore* quaeſtio ſit; primam in ſchemate ad centrum terrae accipi debet CE vel CI (hucusque pro centro ♀ris = ſemidiametro Solis) nunc = differentiae ſemidiametrorum Solis et Veneris, vt deducantur reſpondentes rectae HE, HI, (§. 23.); deinde etiam in reſolutione trianguli, vel VQ*e*, vel VQ*i*, ſumi debet V*e* vel V*i* = differentiae ſemidiametrorum Solis et Veneris, ad inueniendam rectam Q*e* vel Q*i*, quae cum QE vel QI (ex HE vel HI et HQ deducta)

ſ

ſi comparetur, producit eE vel Ii, et ope horarii tempus per eE vel per Ii, hoc eſt, *contactus interioris* vel *accelerationem* circa egreſſum, vel *retardationem* circa ingreſſum. Econtrario ſi *de contactu exteriore* quaeſtio inſtituatur; in ſchemate ad centrum terrae, aſſumto radio CE vel CI = ſummae ſemidiametrorum Solis et Veneris, reperiri debent HE, HI (§. 23.) et ope HQ, rectae QE, QI; in reſolutione autem trianguli, vel VQe, vel VQi capi etiam debet Ve vel Vi = ſummae ſemidiametrorum ☉ et ♀ris, vt innoteſcant Qe vel Qi, eE vel Ii, et tandem tempus per eE vel per Ii, hoc eſt, *contactus exterioris* vel *acceleratio* circa egreſſum, vel *retardatio* circa ingreſſum. Exemplum pro contactu interiore Lipſiae $9^h.8'.27''$ ante meridiem circa egreſſum obſeruato ſit ſequens. Erit ergo elongatio a meridie $= 2^h.51'.33''$ in tempore, et $m = 42^\circ.53'.10''$ rotunde. Simili iam modo, vt in §. 25. 26, inueniuntur ſub hyp. eſſe $p = 25''$.

$Zu = HR =$	$10'',622$
$uV =$	$4,\ 413$
$RQ =$	$2,\ 778$
$HQ =$	$10,\ 979$
$VQ =$	$633,\ 021 = uR$ (ZH §. 25.) $- uV + RQ$ in hoc caſu.

Deinde fiunt

CE(= differ. ſemid. ☉ et ♀) = 919″,5 (§. 23.) = Ve
HE = 543″,67 (§. 23.)
QE = 532, 691 = HE − HQ
Qe = 525, 69
Ee = 7, 0
tempus per eE = 105″,74
= 1′. 46″. rotunde

ſeu acceleratio contactus interioris. Si tempus alicuius contactus ex obſeruatione immediate non habeatur, ſed ex ſchemate ad centrum terrae, peti debeat; repetitio calculi eum in modum inſtituitur, qui ſub finem §phi praec. expoſitus eſt.

§ 29. Sed redeamus ad conſiderationem centri Veneris, atque ea, quae motum ♀ris per diſcum Solis pro dato obſeruatore (v. c. Lipſienſi) parallaxi inuolutum concernunt, attendamus. Hunc in finem ſolui debet problema: *Ad datum tempus definire poſitionem mutuam, centri Veneris ad iſtud tempus in aliquo ſemitae ſuae puncto* x *haerentis, et centri Solis a dato obſeruatore in aliquo ſuae ſemitae ellipticae loco* V *viſi.* Quaerantur, vt in § 25., ad datum tempus rectae VQ, HQ, quae ſub dato angulo VQH = OHC (§. 22.), vel eius deinceps poſito, comprehenſae, poſitionem centri Solis viſi V reſpectu ſemitae centri ♀ris IHE, et dati in ea puncti H manifeſtant. Tempus nunc cognitum eſſe debet, quo centrum ♀ris fuit in H, ſeu pro obſeruatore in centro terrae coniunctionem

cum

cum centro Solis C quoad Aſcenſionem rectam celebrauit. Sit iſtud, ſpeciminis loco, Lipſiae $= 6^h. 48'. 20''$ mane, quod conferatur cum dato tempore, atque ex interuallo vtriusque ope horarii ($= 238''. 3.$ (§. 22.) inueniatur ſpatium in part. circ. max. quod diſtantiam centri ♀ris x ab H per Hx ſeu locum eius in x ad datum tempus pateſaciet, x vel verſus E vel verſus I reſpectu H poſito, prout tempus datum vel ſequitur vel antecedit tempus in H ($= 6^h. 48'. 20''.$). Si deinde HQ cum Hx comparetur, habita ratione ſitus tum puncti Q tum puncti x reſpectu H, innoteſcet Qx, x vel verſus E vel verſus I reſpectu Q ſito. Per rectas autem VQ, Qx, ſub dato angulo VQx, qui in caſu figurae deinceps poſitus eſt ipſius VQH vel OHC (§. 22.) comprehenſas, datur poſitio ipſius x reſpectu V, quae quaeritur. Ex. gr. datum tempus ſit $= 7^h. 48'. 20''.$ mane, loco centri Solis V in quadrante SM verſante. Elongatio a meridie erit $= 4^h. 11'. 40''.$ et $m = 62^\circ. 55'.$ quare manentibus, p, e, d, (§. 25.), inueniuntur:

$Zu = HR = 13'', 897$

$uV = 2, 742$

$RQ = 3, 635$

$HQ = 14, 364$

$VQ = 635, 549 = uR(ZH) - uV + RQ.$

Tempus datum $= 7^h. 48'. 20''.$ a tempore in H $= 6^h. 48'. 20''.$ differt integra hora, cui pro ſpatio Hx ipſe horarius $= 238'', 3$ reſpondet, x inter H et E poſito; quare cum Q etiam inter H et E ſitum

 ſit;

ſit; erit $Qx = Hx - HQ = 223'',936$. Datis autem

$VQ = 635'',549$

$Qx = 223,\ 936$

$VQx = 104°.39'.30'' = CHE$ (§. 22.)

datur poſitio centrorum V, x, quaeſita ad datum tempus $7^h.48'.20''$.

Similem in modum pro $5^h.48'.20''$. acquiruntur

$VQ = 639'',039$

$HQ = 16,\ 112$ Q inter H et E poſito

$Hx = 238,\ \ 3$ x inter H et I ſito

$Qx = 254,\ 412 = Hx + HQ$

$VQx = 75°.20'.30'' = OHC$ (§. 22.).

Pro tempore $6^h.48'.20''$, inſtar termini *a quo* ſumto, quo centrum ♀ris fuit in H, fiunt

$VQ = 637'',387$

$HQ = 15,\ 776 = Qx$, x in H cadente

$VQx = 75°.20'.30'' = OHC$

Pro egreſſu centri ♀ris habentur (§. 26.)

$VQ = 632'',722$

Qx nunc $Qe = 564,\ \ 42$

VQx vel $VQe = 104°\ 39'.30''$.

Pro ingreſſu centri ♀ris (§. 27.) innotuerunt

$VQ = 641'',758$

Qx nunc $Qi = 879,\ \ 45$

VQx vel $VQi = 75°.20'.30'' = OHC$.

§. 30.

§. 30. Iis nunc ſubſidiis inſtructi ſumus, quae confectioni ſchematis inſeruire poſſunt, quod tranſitus Veneris per Solem conditiones pro dato obſeruatore, v. c. Lipſienſi, et parallaxis effectus ex comparatione eius cum ſchemate ad centrum terrae, plene exponit. Res huc redit, vt poſitiones centri ♀ris ad centrum Solis mobile (in ſua ſemita elliptica) pro datis temporibus definitae transferantur ad centrum Solis fixum, pro quo recte ſumi poteſt centrum C diſci Solaris, cui inſcriptum eſt ſchema ad centrum terrae; hoc enim modo ſtatim comparatio apparentiarum pro dato obſeruatore cum illo ſchemate eluceſcit. Exhibeat igitur figura 12. ſchema ad centrum terrae §. 22. conſtructum, rectis ACB, CE, CH, CO, CI, IOE, eadem denotantibus, quae in fig. 9. homonymae rectae ſignificarunt. Iſtius autem figurae 12 cum fig. 9. continua fiat comparatio. Cum pro egreſſu centri ♀ris Lipſiae triangulum VQ*e* repraeſentet poſitionem puncti egreſſus *e* ſiti in peripheria diſci Solaris, cuius centrum eſt V (fig. 9.); cogitetur recta VQ cum annexo triangulo VQ*e* motu ſibi parallelo transferri in CH, ita vt V cadat in C, et VQ in CH productam: triangulum iſtud in fig. 12. ſitum obtinebit C*qe*, *e* nunc in peripheriam diſci Solaris AEB, centri C, incidente, exiſtentibus C*e*, C*q*, *qe*, iis rectis, quae in fig. 9. per V*e*, VQ, Q*e*, ſignantur. Fiunt ergo (§. 29.) C*q* $= 632'',722$, *qe* $= 564'',42$, H*q* $=$ C*q* $-$ CH $= 632'',722 - 616'',64$ (§. 22.) $= 16'',082$, et *qe* ad HE parallela; dabiturque in ſchemate fig. 12. punctum egreſſus *e* pro obſeruatore Lipſienſi, cum in eodem E ſit

Tab. XIX. et XX. Fig. 9. 12.

ſit punctum egreſſus pro ſpectatore in centro terrae. Eundem in modum pro ingreſſu centri ♀ris Lipſiae tranſferatur triangulum V Q*i* fig 9, vt V in C, et VQ in CH productam cadat, atque poſitionem C*ri* in fig. 12. acquirat, factis V*i*, VQ, Q*i* (fig. 9.) reſpectiue aequalibus C*i*, C*r*, *ri* (§. 12.), ideoque (§. 29.) $ri = 879'',45$; $Cr = 641'',758$; $Hr = Cr - CH = 25'',118$. In ſchemate igitur fig. 12. *i* pro obſeruatore Lipſienſi, I pro ſpectatore in centro terrae punctum ingreſſus repraeſentant. Vt locus centri ♀ris Lipſiae viſus ad datum tempus v. c. $7^h.48'.20''$ ſchemati fig. 12. inſeratur; cogitetur fig. 9. vt ante, recta VQ cum annexa Q*x* (dum *x* locum centri ♀ris in ſemita IE ad datum tempus exhibet, et VQ cum Q*x* datum angulum comprehendit) ita transłocari, vt V in C, VQ in CH productam incidat, atque in fig. 12. C*d*, *dx*, eas rectas exponant, quae in fig 9. fuerunt VQ, Q*x*, exiſtentibus in fig. 12. *dx* ad HE parallela $= 223'',936$, $Cd = 635'',549$, $Hd = Cd - CH = 18'',909$ (§. 29.); quibus factis, in fig. 12. punctum *x* locum centri ♀ris Lipſiae viſum ad dictum tempus indicabit. Per *x* ducatur *xy* parallela ad CH*d*, terminata per HE in *y*, vt emergat parallelogrammum H*dxy*, et fiat $Hy = dx = Qx$ (fig 9.); nec non $yx = Hd = Cd - CH = VQ - CH$ (fig 9.). Hoc modo per deductiones §phi 29. abſque ambagibus ad datum tempus locus centri ♀ris (Lipſiae) viſus in ſchemate fig. 12. aſſignari poteſt. Sic

pro 7^h.48'.20'' capiantur Hy (=Qx fig. 9) = 223'',936
yx, ad CH parallela (= VQ − CH fig. 9.)
= 635'',549 − 616'',64
= 18, 909
6^h.48'.20'' - - - He (=Qx fig. 9.) = 15'',776
ef ad CH parallela (= VQ − CH fig 9)
= 637'',387 − 616'',64
= 20,747
5^h.48'.20'' - - - Hg (=Qx fig. 9.) = 254'',412
gk ad CH parallela (= VQ − CH fig. 9.)
= 639'',039 − 616'',64
= 22,399

eruntque in x, f, k, loca centri Veneris viſa ad tempora 7^h.48'.20''; 6^h.48'.20''; 5^h.48'.20''. reſpectiue. Praeſtat quoque, *loca relatiua y, e, g,* in ſemita IE ad eadem reſpectiue tempora attendere, vt conditio motus centri ♀ris pro obſeruatore Lipſienſi facilius innoteſcat. Series locorum *i, k, f, x, e,* exponit *ſemitam centri Veneris in tranſitu per diſcum Solis* (Lipſiae) *viſam*, et tempora adſcripta conditionem motus in ea patefaciunt.

§. 31. Comparemus iam *ſemitam* inuentam, quam pro dato obſeruatore in ſuperficie terrae *viſam* breuitatis cauſa nuncupabimus, cum *ſemita centri Veneris* IOE pro obſeruatore in centro terrae conſtituto, quae *vera* dicatur; attendendo, ſpeciminis loco, obſeruatorem Lipſienſem.

1) ex conditione poſitionis ſemitae centri Solis ellipticae MSs reſpectu C, (fig. 9.) patet, in fig. 12. Tab. XX. Fig. 12.

 ſemi-

ſemitam centri ♀ris viſam infra veram auſtrum verſus eſſe ſitam.

2) Semita vera eſt rectilinea; e contrario ſemita viſa re vera curuilinea prodire debet, orta nempe ex combinatione motus centri Solis V in curua SMs (fig. 9.) cum motu centri ♀ris rectilinea in ſemita vera IE. Aſt incuruatio ſemitae viſae tam exigua eſt, vt absque periculo erroris ſenſibilis in plerisque caſibus rectilinea haberi poſſit ſemita, praeſertim ſi eam componere velis cum tramite, quam ſpectator ex obſeruatione immediata artificiis debitis delineat, in quo negotio, omni etiam cura adhibita, eiusmodi minutiae in ſenſus non incurrunt, quae curuaturam ſemitae viſae producere ſolent. Sumas ie rectilineam; cum gk, cf, yx, ſint inter ſe parallelae, erit $gc:gy = gk - cf : gk - yx$; quare ſi dentur gc, gy, gk, cf, inueniri poterit yx ex hypotheſi, atque cum yx (§ 30.) reperta comparari, vt diſcrimen innoteſcat. Sic erunt

$gc = Hg - Hc = 254'',412 - 15'',776$ (§. 30) $= 238'',636$

$gy = Hg + Hy = 254,412 + 223'',936$ (§. 30.) $= 478,348$

$gx = 22'',399$ (§. 30.)

$cf = 20,747$ (§. 30.)

$gk - cf = 1,652$

quare fient

$gk - yx = 3,311$

$yx = 19,088$ quae ab

$yx = 18,909$ (§. 30.)

differt $0,179$

tam

tam exigua minuti ſecundi parte, vt eam attendere ſuperuacaneum eſſet. Licet autem in plerisque caſibus curuatura ſemitae viſae tuto negligi poſſit; attamen caſus quoque dantur, qui rationem curuaturae habendam poſcunt, vt mox patefiet.

3) Inclinatio ſemitae viſae, inſtar rectae ſpectatae, ad circulum declinationis CH alius eſt magnitudinis ac inclinatio ſemitae verae ad eundem in caſibus plerisque, hoc eſt, angulus Cne differt ab angulo CHE et ille in noſtro caſu minor eſt hoc. Simile ratiocinium valet (ſi deſideretur) circa angulum ſemitarum cum circulo latitudinis. Sumatur integra ſemita viſa *ine* rectilinea. Cum

$$rCi (= QVi \text{ fig. 9 §. 30}) = 63^\circ.46'.10'' \text{ (§. 27.)} = nCi$$

$$qCe (= QVe \text{ fig. 9 §. 30}) = 35^\circ.8'.55'' \text{ (§. 26)} = nCe$$

fit $iCe = 98^\circ.55'.5'' = nCi + nCe$

et $Cie = Cei$ (ob Ce, Ci, aequales) $= 40^\circ.32'.27''$; $= Cen$

quare habetur

$$Cne = 104^\circ.18'.37''; \text{ ex } nCe, Cen$$

cum econtrario erat

$$CHE = 104^\circ.39'.30'' \text{ (§. 22.)}$$

differentia ad $0^\circ.20'.52''$; aſcendente.

In determinatione anguli eiusmodi curuaturam ſemitae viſae ſubinde reſpicere oportet in caſu, quo pars eius tantum rectilinea habetur, ſi quidem iſte pro partibus diuerſis notabiliter variabilis prodire ſolet; quae circumſtantia non negligenda, ſi comparatio cum parte ſemitae viſae ex obſeruatione acquiſita inſtitui debeat.

 Sic

Sic ſi a loco *f* vſque ad locum *e* ſemita viſa tantum rectilinea ſpectetur; inuenietur inclinatio eius ad circulum declinationis ſeu $cfe = 104^\circ. 12'. 42''$, quae a CHE ($= 104^\circ. 39'. 30''$.) nunc $0^\circ. 26'. 48''$ differt. Facile autem acquiritur iſte angulus *cfe*, ſi triangulum cogitetur, cuius alterum latus ſit (in hoc caſu) $= He + qe (= 580'', 196$ vi §. 30.); alterum $= cf - Hq$ ($= 4'', 665$ vi §. 30.); et angulus interceptus $= 104^\circ. 39'. 30''$; in reſolutione enim huius trianguli angulus e duobus reliquis maior eſt quaeſitus *cfe*, minor autem dicta differentia ($= 26'. 48''$.).

4) Motus centri ♀ris in ſemita vera eſt uniformis; in ſemita viſa difformis. Horarius in illa eſt conſtans ($= 238'', 3$, § 22.); in hac pro diuerſis ſemitae viſae partibus variabilis. Attendamus loca centri ♀ris relatiua (§. 30.) *g*, *c*, *y*, ad tempora $5^h. 48'. 20''$, $6^h. 48'. 20''$, $7^h\ 48'. 20''$ reſpectiue, et inueniemus ſpatia reſpondentia *gc*, *cy*, quae motus horarios relatiuos exponent. Erunt autem

$$gc = Hg - Hc = 254'', 412 - 15'', 776 \text{ (§. 30.)}$$
$$= 238, 636$$
$$cy = Hy + Hc = 223, 936 + 15, 776 \text{ (§ 30.)}$$
$$= 239, 712.$$

Iis vti licet, ſi partes ſemitae viſae, quae in tempus conuerti debent, reſpectu horarii reſpondentis ſint exiguae; ſi vero propius accedant ad ipſum horarium, et rigor omnis ſit obſeruandus; hic horarius transmutari debet in alium ſecundum rationem ſinus inclinationis viſae ad ſinum inclinationis verae (partis ſemitae ad circulum

culum declinationis) ſiquidem pars ſemitae ex. gr. kf ad horarium relatiuum ge non eſt parallela, ſed inclinata ad hunc angulo, qui eſt ante inuenta differentia inter vtramque inclinationem. Ponamus eam circa partem $kf = 21'$. rotunde, vt inclinatio viſa ſit $104^{\circ}.18'.30''$, exiſtente vera $= 104^{\circ}.39'.30''$, et horarius relatiuus ge ſit $238'',636$; fieri debet ſin. $104^{\circ}.18'.30''$: ſin. $104^{\circ}.39'.30'' = 238'',636$: horarium quaeſitum kf, qui erit $= 238'',26$.

5) Tempus coniunctionis centrorum ☉ et ♀ quoad Aſcenſionem rectam (Lipſiae) viſae differt a tempore eiusmodi coniunctionis pro obſeruatore in centro terrae. Hic nempe dictam coniunctionem deprehendit, quando centrum ♀ris videt in H ($6^{h}.48'.20''$. §. 29.); aſt eodem tempore obſeruatori Lipſienſi centrum ♀ris apparet in f (§. 30.) vel relatiue in c; quapropter ille nondum percipit coniunctionem, ſed ea demum contingit, quando locus centri ♀ris pro obſeruatore Lipſienſi in ipſam CH productam incidit, puta in n, vel relatiue ad H peruenit. Diſcrimen inter vtramque coniunctionem manifeſtat tempus per cH, ex horario cy quaerendum. Sic, cum $c\text{H} = 15'',776$ (§. 30.) et $cy = 239'',712$ (§. 31. n. 4.) erit tempus per $c\text{H} = 3'.57''$. et tempus coniunctionis Lipſiae viſae $= 6^{h}.52'.17''$. Simile ratiocinium valet circa tempora coniunctionum quoad eclipticam.

§. 32. Tandem reſpiciamus eam conditionem, qua angulum circuli declinationis cum circulo latitudinis OCH (§. 22.) et declinationem Solis ſeu d (§. 25.) Tab. XIX. Fig. 9.

 per

per totum tranſitus noſtri tempus inuariatae magnitudinis aſſumſimus. Quantitates iſtae re vera ſunt variabiles pro diuerſitate temporis; quare, ſi omnem rigorem attendere vellemus, calculus vtique valde prolixus euaſurus eſſet. Aſt in plerisque caſibus, ſi non omnibus, eiusmodi rigore opus non eſt. Locus Eclipticae, in quo Tranſitus noſter contingit, ita comparatus eſt, vt circa eum variatio declinationis Solis diurna admodum ſit exigua, circiter ad 6′ aſcendens, cuius ergo quarta circiter pars, ſi totum tranſitum ſpectes, influere poteſt in determinationes linearum a declinatione Solis pendentium. (§. 24. 25.) Sed huius diſcriminis effectus tam paruus eſt, vt v. c. in ſemiaxe minore ZM vix centeſimae partis minuti ſecundi diſcrepantiam producere valeat; et ſic de reliquis. Tuto igitur eiusmodi aberrationem a variatione declinationis Solis pendentem negligere licet. E contrario, ſi angulum OCH conſideres, effectus ex variatione eius reſultans notabilior videtur. Variatio diurna eſt circiter 25′. et horaria 1. min. Licet ergo in vicinia loci coniunctionis ♀ haec variatio tuto contemni poſſit; in locis tamen ab ☉ magis remotis, praeſertim circa ingreſſum et egreſſum, metus ſenſibilis effectus ſupereſt. Sic variato ∠OCH mutatur quantitas ipſius OH, quae in determinationes rectarum HE, QE, etc. influit. Et licet diſcrimen vltra dimidium ſecundum circuli maximi circa ingreſſum vel egreſſum, cum coniunctione in ☉ comparatum, vix aſcendat; attamen iſtud, ob motum ♀ris relatiuum admodum lentum, aberrationem 7. vel 8. ſecundorum temporis gignere valet; cuius diſcrepantiae ratio vtique haben-

habenda eſſet. Interim et hic aliqua compenſatio feliciter emergit, quae diſcrepantiam iſtam valde minuit, vt ea tuto negligi poſſit. Perpendamus v. c. egreſſum ♀ris e diſco ☉lis, (§. 26.) et augeamus, pro ratione temporis ab O vsque ad E elapſi, angulum OCH circiter tribus minutis primis. Augebitur ergo OH, manentibus CO, COH vel COE. Hinc minuitur HE, et ab ea pendens QE. Augebitur autem quoque CHE vel VQ*e*; quare manentibus VQ, V*e*, minuitur Q*e*. Effectus igitur parallaxis *e*E eſt differentia inter diminutam QE et diminutam Q*e*; quae a differentia inuariatarum QE, Q*e* (§. 26.) ſenſibiliter non differet. Facto tentamine et aucto OCH tribus minutis, reperi *e*E = 6″.50; quae (§. 26.) = 6″.47 circ. max. inuenta fuit. Hoc modo de variatione anguli OCH et declinationis Solis nimium ſoliciti ne ſimus. Sufficiet quantitates iſtas, ad tempus coniunctionis in O inuentas, inuariatas retinere. Nunc filum abrumpendum eſt, ne limites diſſertationis tranſiliam. Argumentum autem, quod hactenus tractaui, in alia diſſertatione ſecundum aliam methodum inueſtigandum reſumere licebit, quae forſan facilius iudicium de quantitate parallaxis ex eius effectibus largietur.

CONSI-

CONSIDERATIONES DE MOTV CORPORVM COELESTIVM.

Auctore
L. EVLERO.

1.

Etſi nullum eſt dubium, quin leges motus corporum coeleſtium a *Keplero* obſeruatae atque a *Newtono* confirmatae, Aſtronomiae maxima incrementa attulerint, tamen nunc quidem certiſſimum eſt, *nullum* in coelo reperiri corpus, quod leges iſtas in motu ſuo perfecte ſequatur, cum potius in omnibus haud leues aberrationes ab iſtis legibus deprehendantur. Vera ſcilicet omnium motuum coeleſtium cauſa in mutua horum corporum attractione eſt poſita, qua vnumquodque ad ſingula reliqua vrgetur viribus rationem compoſitam ex directa ſimplici maſſarum, et inuerſa duplicata *diſtantiarum* tenentibus. Semper autem commode vſu venit, vt inter has vires vna prae reliquis maxime emineat, ideoque motus proxime regulis *Keplerianis* conformis euadat; ſicque effectus a reliquis oriundus veluti minimus per methodos appropinquandi definiri poſſit. Quod niſi eueniret, in maxima adhuc ignoratione motuum coeleſtium verſaremur, cum nulla methodus adhuc ſit inuenta, cuius ope trium ſaltem corporum ſe mutuo attrahentium motus aſſignari queat; niſi forte vna vis caeteras plurimum ſuperet.

2. Ve-

2. Verum etiam hic caſus, in quo ſolo Geometrae operam ſuam non omnino fruſtra conſumſerunt, neutiquam pro confecto haberi poteſt, cum ipſa methodus appropinquandi, qua Geometrae vti ſolent, plurimis difficultatibus adhuc ſit inuoluta, atque infinita minorum perturbationum multitudo negligatur, quo fit vt haec ipſa approximatio negotium minime conficiat, ſed ad eam perficiendam plurima adhuc adminicula deſiderentur. Quare etſi motus Lunae ex hac Theoria ſatis accurate eſt definitus, id tamen potius ſingularibus circumſtantiis, quae in Luna locum inueniunt, eſt tribuendum, quam cuipiam perfectioni, ad quam Theoria euecta cenſeri queat; ſi enim Luna bis vel ter longius a terra abeſſet, vel eius orbita magis eſſet excentrica, omnes labores adhuc exantlati omni fructu caruiſſent, ac ne nunc quidem eius motum obiter ſaltem ad certam quandam regulam reuocare liceret.

3. Plurimum igitur is in Theoria Aſtronomiae praeſtitiſſe eſſet cenſendus, qui in hypotheſi ficta, qua Luna multo longius a terra abeſſet, eius motum aſſignare valuerit, cum inde maxima adiumenta in hanc ſcientiam certo eſſent redundatura. Si quidem Luna centies longius a terra eſſet remota, nullum eſt dubium, quin leges motus planetae principalis eſſet ſecutura, neque amplius, tanquam ſatelles terrae, ſpectari poſſet. Sin autem decies tantum magis diſtaret, eius motus ita foret comparatus, vt in dubio relinqueretur, vtrum planetis primariis, an ſecundariis, eſſet accenſenda. Tantopere certe ab omnibus motibus in coelo obſeruatis

diſcreparet, vt vix intelligi poſſit, quemadmodum ſaltem ideam motus medii conſtitui conueniat. Innumerabiles forſitan obſeruationes legem quandam aperuiſſent, ex qua in poſterum eius loca quodammodo praedicere licuiſſet; nequaquam autem patet, quomodo Theoria ad huiusmodi motum explicandum accommodari potuiſſet. Imbecillitati noſtrae ſapientiſſimus creator conſuluiſſe videtur, quod nulla corpora in coelo ita collocauerit, vt eorum motus, neque ad legem planetarum principalium, neque ſatellitum, referri poſſet.

4. Huiusmodi inueſtigationem, quae vires ingenii humani tantum non tranſcendere videtur, certe non ſubito ſuſcipi conueniet, ſed potius conatus noſtros pedetentim eo dirigi oportebit. Generale ergo problema trium corporum ſe mutuo attrahentium ita commodiſſime reſtringetur, vt vnius maſſa prae binis reliquis quaſi euaneſcat, quo pacto id commodi aſſequemur, vt duo corpora, maiora ſcilicet, ſecundum leges *Keplerianas* moueantur, omnisque perturbatio in motu tertii conſumatur, cuius ſitus et motus ſi ab initio ita fuerit comparatus, vt ad ambo maiorum aequa vi quaſi attrahatur, habebimus eiusmodi caſum, cuius inueſtigatio nouam plane methodum poſtulat. Plurimum abeſt, vt hoc problema aggredi auſim, vt potius, fruſtra in eo euoluendo deſudaſſe, fateri cogar; verum tamen caſum obſeruaui omnino ſingularem, ac ſimplicitate memorabilem, quo Lunae eiusmodi motus imprimi potuiſſet, vt perpetuo Soli, vel coniuncta, vel oppoſita, appariturа fuiſſet, cuius caſus conſideratio, cum forte vſu in

hoc

hoc difficillimo negotio non deſtituatur, haud diſplicitura videtur.

5. Motum igitur tam Solis, quam Lunae, ex terra viſum in plano ecliptico fieri aſſumens, terram quieſcentem in T, et poſt aliquod tempus elapſum Solem in S, Lunam vero in L, verſari pono, et ducta recta fixa TA, ad principium arietis directa, ſtatuo, angulos $ATS = \theta$, $ATL = \Phi$, et $STL = \Phi - \theta = \eta$, tum vero diſtantias $TS = u$, $TL = v$ et $LS = \sqrt{(uu - 2uv \operatorname{coſ.} \eta + vv)} = z$. Sit porro longitudo Solis media $= \zeta$, eiusque diſtantia media a terra $= a$, hisque poſitis pro motu Solis vtpote regulari habebimus: Tab. XX. Fig. 13.

$$\frac{2du\,d\theta + u\,dd\theta}{d\zeta^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{ddu - u\,d\theta^2}{d\zeta^2} + \frac{a^3}{uu} = 0.$$

pro motu autem Lunae:

$$\frac{2dv\,d\Phi + v\,dd\Phi}{d\zeta^2} - \frac{a^3}{uu}\left(1 - \frac{u^3}{z^3}\right) \operatorname{ſin} \eta = 0$$

$$\frac{ddv - v\,d\Phi^2}{d\zeta^2} + \frac{nnc^3}{vv} + \frac{a^3 v}{z^3} + \frac{a^3}{uu}\left(1 - \frac{u^3}{z^3}\right) \operatorname{coſ.} \eta = 0,$$

vbi c eſt diſtantia media, ad quam Luna, a ſola vi terrae ſollicitata, pari motu medio reuolueretur, exiſtente $n:1$ ratione motus medii Lunae ad motum medium Solis. Caeterum circa differentialia ſecundi gradus hic eſt monendum, elementum $d\zeta$ conſtans eſſe ſumtum.

6. Tota ergo difficultas in reſolutione harum duarum aequationum conſiſtit, vt ſcilicet inde ad quodvis tempus, ſeu longitudinem Solis mediam ζ, tam diſtantia v, quam angulus Φ, definiatur. Quod cum in genere fieri nequeat, Geometrae adhuc in eo laborauerunt, vt ſaltem pro caſu, quo diſtantia v, prae u,

 eſt

eſt vehementer parua, ſimulque n numerus mediocriter magnus, idoneas approximationes eruerent, in quo tamen negotio plurimum adhuc iure deſideratur. Hic autem binas iſtas aequationes in genere ſpecto, ſine vllo reſpectu ad Lunam habito, et quosdam caſus ſum euoluturus, quibus iis abſolute ſatisfieri queat. Eiusmodi ſcilicet motus in coelo locum habere poſſe oſtendam, quos perfecte cognoſcere in noſtra ſit poteſtate, etiamſi eorum ratio maxime a motu regulari abhorreat.

7. Primum igitur obſeruo, has duas aequationes abſolutam reſolutionem admittere caſu $\eta = 0$, ſeu $\phi = \theta$, ita vt tum Luna perpetuo in coniunctione cum Sole eſſet apparitura. Cum enim ſit ſin. $\eta = 0$, et coſ. $\eta = 1$, erit $z = u - v$, noſtrae aequationes has induent formas:

$$\frac{2\,dv\,d\theta + v\,dd\theta}{d\zeta^2} = 0, \text{ et } \frac{ddv - v\,d\theta^2}{d\zeta^2} + \frac{nnc^3}{vv} + \frac{a^3 v}{(u-v)^3}$$

$$+ \frac{a^3}{uu} \cdot \frac{-3uuv + 3uv^2 - v^3}{(u-v)^3} = 0$$

ſeu $$\frac{ddv - v\,d\theta^2}{d\zeta^2} + \frac{nnc^3}{vv} - \frac{a^3 v(3uu - 3uv + vv)}{uu(u-v)^3} = 0$$

quae cum formulis, pro motu Solis datis, comparatae ſtatim dant $v = \alpha u$, quippe quo pacto prioribus aequationibus ſatisfit. Hinc altera aequatio pro Luna erit

$$\frac{\alpha(ddu - u\,d\theta^2)}{d\zeta^2} + \frac{nnc^3}{\alpha\alpha uu} - \frac{\alpha a^3(3 - 3\alpha + \alpha\alpha)}{(1-\alpha)^3 uu} = 0.$$

Quare cum altera aequatio pro Sole ſit

$$\frac{ddu - u\,d\theta^2}{d^2} + \frac{a^3}{uu} = 0$$

neceſſe eſt ſit: $\alpha a^3 = \frac{nnc^3}{\alpha\alpha} - \frac{\alpha a^3(3 - 3\alpha + \alpha\alpha)}{(1-\alpha)^3}$

ſeu $\frac{nnc^3}{\alpha\alpha a^3} = \frac{3\alpha - 3\alpha\alpha + \alpha^3}{(1-\alpha)^3}$

vbi

vbi cum ſit $\frac{nnc^3}{a^3}$ quantitas conſtans, ponatur breuitatis cauſa: $\frac{nnc^3}{a^3} = m$, eritque $m(1-\alpha)^2 = \alpha\alpha(3\alpha - 3\alpha^2 + \alpha^3)$ ſeu $m(1-\alpha)^2 = \alpha\alpha - \alpha\alpha(1-\alpha)^3$. Poſito ergo $2-\alpha = x$, fit $mxx = (1-x^3)(1-x)^2$, ſeu

$$1 - 2x + xx - mxx - x^3 + 2x^4 - x^5 = 0.$$

8. Pendet ergo determinatio numeri α vel x ab aequatione quinti gradus, pro cuius reſolutione notari oportet, eſſe m fractionem quam minimam; quare cum ſit

$$m(1-\alpha)^2 = 3\alpha^3 - 3\alpha^4 + \alpha^5$$

euidens eſt quoque, α minimum eſſe habiturum valorem, et quam proxime fore $\alpha = \sqrt[3]{\frac{m}{3}} = \frac{c}{a}\sqrt[3]{\frac{nn}{3}}$, accuratius autem $\alpha = \sqrt[3]{\frac{m}{3}} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{mm}{9}} - \frac{1}{27}m + \frac{1}{81}m\sqrt[3]{\frac{m}{3}}$. Primus autem terminus ſufficit, ſicque eſt $v = \frac{cu}{a}\sqrt[3]{\frac{nn}{3}}$ vnde cum ſit proxime $u = a$, et $nn = 175$, erit circiter $v = 4c$; ſeu ſi Luna fere quater longius a nobis eſſet remota, eiusmodi motum habere poſſet, vt Soli perpetuo iuncta appareret. Talis Luna aequo iure tanquam Satelles terrae ac planeta primarius ſpectari poſſet, et vterque motus maxime foret regularis, hoc tantum a regulis *Keplerianis* recedens, quod Soli propior, quam terra, pari tamen tempore reuoluatur, ob vim ſcilicet terrae vis Solis tantum imminuitur, vt cum maiori tempore periodico conſiſtere poſſit. Hinc diſtantiam a terra quaſi quadruplo maiorem, quam Luna reuera inde diſtat, tanquam limitem ſpectare licet, vt corpora magis remota pro planetis primariis, propiora vero pro ſatellitibus

litibus terrae ſint habenda. Similes limites circa reliquos planetas conſtitui poterunt

9. Quemadmodum caſus euolutus in perpetua coniunctione cum Sole conſtat, ita etiam perpetua oppoſitio ſimilem caſum ſuppeditat. Pro quo ponamus $\eta = 180°$, vt ſit ſin. $\eta = 0$, coſ. $\eta = -1$ et $\Phi = 180° + \theta$, ideoque $d\Phi = d\theta$, atque $z = u + v$. Aequationes ergo pro motu Lunae ſequentes induent formas:

$$\frac{2\,dv\,d\theta + v\,dd\theta}{d\zeta^2} = 0, \quad \text{et} \quad \frac{ddv - v\,d\theta^2}{d\zeta^2} + \frac{nnc^3}{v^2} + \frac{a^3 v}{(u+v)^3}$$

$$- \frac{a^3}{uu}\left(1 - \frac{u^3}{(u+v)^3}\right) = 0$$

quae poſterior reducitur ad hanc:

$$\frac{ddv - v\,d\theta^2}{d\zeta^2} + \frac{nnc^3}{vv} - \frac{a^3}{uu} + \frac{a^3}{(u+v)^2} = 0.$$

Prior cum motu Solis collata praebet ſtatim $v = \alpha u$, vnde poſterior fit

$$\frac{\alpha(ddu - u\,d\theta^2)}{d\zeta^2} + \frac{nnc^3}{\alpha\alpha uu} - \frac{a^3}{uu} + \frac{a^3}{(1+\alpha)^2 uu} = 0.$$

At ex motu Solis eſt $\frac{ddu - u\,d\theta^2}{d\zeta^2} = -\frac{a^3}{uu}$, ex quo fit $-\alpha a^3 + \frac{nnc^3}{\alpha\alpha} - a^3 + \frac{a^3}{(1+\alpha)^2} = 0$, ſeu

$$\frac{nnc^3}{a^3} - \alpha\alpha(1+\alpha) + \frac{\alpha\alpha}{(1+\alpha)^2} = 0$$

et poſito breuitatis gratia $\frac{nnc^3}{a^3} = m$, erit

$$m(1+\alpha)^2 = \alpha\alpha(1+\alpha)^3 - \alpha\alpha$$

quae ex ſuperiori naſcitur, ſumendis m et α negatiuis. Quamobrem hinc colligitur

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{m}{3}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{mm}{9}} - \frac{1}{27}m - \frac{1}{81}m\sqrt[3]{\frac{m}{3}}$$

ſatis

ſatis autem exacte eſt $a=\sqrt[3]{\frac{m}{3}}$ et $v=\frac{cu}{a}\sqrt[3]{\frac{nn}{3}}$ vt ante.

10. Caſus hi eo magis ſunt notatu digni, quod ſine vlla approximatione abſolute expediri poſſunt, etiamſi ambae vires Solis et terrae ad motum producendum concurrant, id quod nullo alio caſu praeſtare licet. Tali autem motu ſimplici corpus re vera moueretur, ſi ipſi in diſtantia aſſignata, dum Soli, vel coniunctum, vel oppoſitum, ex terra appareret, eiusmodi motus imprimeretur, vt cum terra pari paſſu in plano eclipticae ingredi inciperet. Sin autem motus impreſſus tantillum ab hac lege diſcrepet, non quidem perpetuo Soli, vel coniunctum, vel oppoſitum, maneret, ſed exiguas excurſiones hinc inde quaſi oſcillando conficeret. Quo caſu cum motus minime ab inuenta ratione eſſet diſcrepaturus, more ſolito, approximando etiam, eiusmodi motum definire licebit; in quo cum quaſi initium motuum irregularium, quos nullo etiamnum modo ad calculum reuocare licet, conſpiciatur, vſu certe non carebit, ſi in naturam iſtiusmodi motuum accuratius inquiſiuero.

11. Cum autem haec inueſtigatio haud leuibus difficultatibus implicetur, ſtatim ab initio aequationes noſtras tractatu faciliores reddi conueniet, quod, cum diſtantia v prae u vehementer ſit exigua, commode per approximationem fieri poteſt. Scilicet ob $z=\sqrt{(uu-2uv\,\text{coſ.}\,\eta+vv)}$ eliciemus proxime $\frac{1}{z^3}=\frac{1}{u^3}+\frac{3v\,\text{coſ.}\,\eta}{u^4}-\frac{3vv}{2u^5}+\frac{15vv\,\text{coſ.}\,\eta^2}{2u^5}$, ideoque $1-\frac{u^3}{z^3}=-\frac{3v}{u}\text{coſ.}\,\eta+\frac{3vv}{2uu}(1-5\,\text{coſ.}\,\eta^2)$, ex quo aequationes no-

noſtrae, pro motu Lunae inuentae, in ſequentes formas tranſibunt:

I. $\frac{2dvd\Phi + vdd\Phi}{d\zeta^2} + \frac{3a^3v}{u^3}\sin.\eta\cos.\eta - \frac{3a^3vv}{2u^4}\sin.\eta(1-5\cos.\eta^2) = 0$

II. $\frac{ddv - vd\Phi^2}{d\zeta^2} + \frac{nnc^3}{vv} + \frac{a^3v}{u^3}(1-3\cos.\eta^2 + \frac{3a^3vv}{2u^4}(3\cos.\eta - 5\cos.\eta^3) = 0.$

Deinde etiam calculus non parum ſubleuabitur, ſi motum Solis, vt vniformem, ſpectemus, vt ſit $u = a$, et $\theta = \zeta$, ideoque $\eta = \Phi - \zeta$, ſeu $\Phi = \eta + \zeta$. vnde ſequentes emergunt aequationes:

I. $\frac{2dvd\eta + vdd\eta}{d\zeta^2} + \frac{2dv}{d\zeta} + 3v\sin.\eta\cos.\eta - \frac{3vv}{2a}\sin.\eta(1-5\cos.\eta^2) = 0$

II. $\frac{ddv}{d\zeta^2} - v(1+\frac{d\eta}{d\zeta})^2 + v(1\;3\cos.\eta^2) + \frac{nnc^3}{vv} + \frac{3vv}{2a}\cos.\eta(3-5\cos.\eta^2) = 0,$

vbi etiam poſtrema membra facile omitti poſſunt. quia fractio $\frac{v}{a}$ eſt vehementer parua, etiamſi diſtantia Lunae quadruplo maior ſtatuatur.

12. Vt iam hinc caſum memoratum, quo Luna circa Solem motu quaſi oſcillatorio nutare videbitur, eliciamus, angulum η quam minimum concipiamus, vt ſit $\sin.\eta = \eta$, et $\cos.\eta = 1 - \frac{1}{2}\eta\eta$, et habebimus:

I. $\frac{2dvd\eta + vdd\eta}{d\zeta^2} + \frac{2dv}{d\zeta} + 3v\eta\eta = 0$

II. $\frac{ddv}{d\zeta^2} - v(1+\frac{d\eta}{d\zeta})^2 + \frac{nnc^3}{vv} - 2v + 3v\eta\eta = 0.$

Deinde quia diſtantia v parum immutatur, ponamus $v = b(1+x)$, vt x ſit quantitas minima, tum vero ſit breuitatis gratia $\frac{nnc^3}{b^3} = m$, eritque:

I. $\frac{2dxd\eta + xdd\eta}{d\zeta^2} + \frac{dd\eta}{d\zeta^2} + \frac{2dx}{d\zeta} + 3\eta + 3x\eta = 0$

II. $\frac{ddx}{d\zeta^2} - 3 - 3x - \frac{2d\eta}{d\zeta} - \frac{2xd\eta}{d\zeta} - \frac{d\eta^2}{d\zeta^2} - \frac{xd\eta^2}{d\zeta^2} + 3\eta\eta$
$+ 3x\eta\eta + m - 2mx + 3mxx = 0,$

vnde

vnde pro quouis angulo ζ valores quantitatum x et η definiri oportet.

13. Cum angulus η ſit minimus, alternatimque poſitiuus euadat et negatiuus; quoniam Luna vltro citroque a Sole digredi conſpicietur: facile colligere licet, eum per quempiam angulum ω ad ζ datam rationem tenente ita definiri, vt ſit

$$\eta = A\,\text{ſin.}\,\omega + B\,\text{ſin.}\,2\,\omega + C\,\text{ſin.}\,3\,\omega \text{ etc.}$$

atque $d\omega = \alpha d\zeta$. Quo poſito erit

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = \alpha A\,\text{coſ.}\,\omega + 2\,\alpha B\,\text{coſ.}\,2\,\omega + 3\,\alpha C\,\text{coſ.}\,3\,\omega \text{ et}$$

$$\frac{dd\eta}{d\zeta^2} = -\alpha^2 A\,\text{ſin.}\,\omega - 4\,\alpha^2 B\,\text{ſin.}\,2\,\omega - 9\,\alpha\alpha C\,\text{ſin.}\,3\,\omega.$$

Quare cum aequatio prima in hanc formam transfundatur

$$\frac{2\,dx}{1+x} + \frac{dd\eta + 2\,\eta d\zeta^2}{d\eta + d\zeta} = 0$$

fiet $2\,l(1+x) + l(1 + \frac{d\eta}{d\zeta}) + 3\int\frac{\eta d\zeta}{1+\frac{d\eta}{d\zeta}} = \text{Conſt.}$

ſeu ob x et $\frac{d\eta}{d\zeta}$ minima:

$$2\,x - xx + \tfrac{2}{3}x^3 + \frac{d\eta}{d\zeta} - \frac{d\eta^2}{2\,d\zeta^2} + \frac{d\eta^3}{3\,d\zeta^3} + 3\int\eta d\zeta$$
$$- \tfrac{3}{2}\eta\eta + 3\int\frac{\eta d\eta^2}{d\zeta^2} - 3\int\frac{\eta d\eta^3}{d\zeta^3} = \text{Conſt.}$$

Nunc vero ob $d\zeta = \frac{d\omega}{\alpha}$ eſt

$$\int\eta d\zeta = -\frac{A}{\alpha}\text{coſ.}\,\omega - \frac{B}{2\alpha}\text{coſ.}\,2\,\omega - \frac{C}{3\alpha}\text{coſ.}\,3\,\omega$$

$$\eta\eta = \tfrac{1}{2}AA + AB\,\text{coſ.}\,\omega - \tfrac{1}{2}AA\,\text{coſ.}\,2\,\omega - AB\,\text{coſ.}\,3\,\omega$$
$$+ \tfrac{1}{2}BB \qquad\qquad + AC$$

$$\frac{d\eta^2}{d\zeta^2} = \tfrac{1}{2}\alpha\alpha AA + 2\alpha\alpha AB\,\text{coſ.}\,\omega + \tfrac{1}{2}\alpha\alpha AA\,\text{coſ.}\,2\omega + 2\alpha\alpha AB\,\text{coſ.}\,3\omega$$
$$+ 2\alpha\alpha BB \qquad + 3\alpha\alpha AC$$

$$\frac{d\eta^3}{d\zeta^3} = +\alpha^3 AAB + \tfrac{3}{4}\alpha^3 A^3\,\text{coſ.}\,\omega + \alpha^3 AAB\,\text{coſ.}\,2\omega$$
$$+ 4\alpha^3 ABB$$

vbi ob literas A, B, C, minimas altiores poteſtates merito negligimus.

14. Cum ergo ſit

$$\frac{\eta d\eta^2}{d\zeta^2} = \tfrac{1}{4}\alpha\alpha A^3\,\text{ſin.}\,\omega + \tfrac{5}{2}\alpha\alpha AAB\,\text{ſin.}\,2\omega + \tfrac{1}{4}\alpha\alpha A^3\,\text{ſin.}\,3\omega$$
$$+ 3\alpha\alpha ABB + 2\alpha\alpha BBB \qquad + \tfrac{3}{2}\alpha\alpha A^2 C$$
$$- \tfrac{1}{2}\alpha\alpha A^2 C \qquad + \alpha\alpha ABB$$

ob $d\zeta = \frac{d\omega}{\alpha}$ habebimus integrando:

$$\int\frac{\eta d\eta^2}{d\zeta} = -\tfrac{1}{4}\alpha A^3\,\text{coſ.}\,\omega - \tfrac{5}{4}\alpha AAB\,\text{coſ.}\,2\omega - \tfrac{1}{12}\alpha A^3\,\text{coſ.}\,3\omega$$
$$- 3\alpha ABB \quad - \alpha B^3 \qquad - \tfrac{1}{2}\alpha A^2 C$$
$$+ \tfrac{3}{2}\alpha A^2 C \qquad - \tfrac{1}{3}\alpha ABB$$

vbi cum ſeries A, B, C maxime decreſcat, plura membra omitti poſſunt. Deinde cum ſit

$$\frac{\eta d\eta^3}{d\zeta^3} = \tfrac{7}{8}\alpha^3 A^3 B\,\text{ſin.}\,\omega + \tfrac{3}{8}\alpha^3 A^4\,\text{ſin.}\,2\omega + \tfrac{7}{8}\alpha^3 A^3 B\,\text{ſin.}\,3\omega$$

erit integrando

$$\int\frac{\eta d\eta^3}{d\zeta^2} = -\tfrac{7}{8}\alpha^2 A^3 B\,\text{coſ.}\,\omega - \tfrac{3}{16}\alpha^2 A^4\,\text{coſ.}\,2\omega - \tfrac{7}{24}\alpha^2 A^3 B\,\text{coſ.}\,3\omega$$

atque ex his tandem conficitur haec aequatio omiſſis partibus conſtantibus:

$$2x - xx + \tfrac{2}{3}x^3 \quad + \alpha A \operatorname{cof.} \omega \quad + 2\alpha B \operatorname{cof.} 2\omega \quad + 3\alpha C \operatorname{cof.} 3\omega = 0$$

$$\begin{array}{lll}
-\alpha\alpha AB & -\tfrac{1}{4}\alpha\alpha AA & -\alpha\alpha AB \\
+\tfrac{1}{4}\alpha^3 A^3 & -\tfrac{3}{2}\alpha\alpha AC & -\tfrac{3C}{3\alpha} \\
-\tfrac{3\alpha}{\alpha} & +\tfrac{1}{3}\alpha^3 AAB & +\tfrac{3}{2}AB \\
-\tfrac{3}{2}AB & -\tfrac{3B}{2\alpha} & -\tfrac{1}{4}\alpha A^3 \\
-\tfrac{3}{4}\alpha A^3 & +\tfrac{3}{4}AA & +\tfrac{1}{4}\alpha^3 A^3 \\
 & -\tfrac{3}{2}AC & \\
 & -\tfrac{9}{8}\alpha AAB. &
\end{array}$$

15. Ad valorem ipſius x hinc definiendum ponamus breuitatis gratia

$$\left(\alpha - \tfrac{3}{\alpha}\right)A - \left(\alpha\alpha + \tfrac{3}{2}\right)AB + \tfrac{1}{4}\alpha(\alpha\alpha - 3)A^3 = \mathfrak{A}$$

$$\frac{4\alpha\alpha - 3}{2\alpha}B - \frac{(\alpha\alpha - 3)}{4}AA = \mathfrak{B}$$

$$\frac{3\alpha\alpha - 1}{\alpha}C - \frac{(2\alpha\alpha - 3)}{2}AB + \tfrac{1}{4}\alpha(\alpha\alpha - 1)A^3 = \mathfrak{C}$$

vt ſit $2l(1 + x) + \mathfrak{A}\operatorname{cof.}\omega + \mathfrak{B}\operatorname{cof.}2\omega + \mathfrak{C}\operatorname{cof.}3\omega = 0$

et $1 + x = e^{-\frac{1}{2}\mathfrak{A}\operatorname{cof.}\omega - \frac{1}{2}\mathfrak{B}\operatorname{cof.}2\omega - \frac{1}{2}\mathfrak{C}\operatorname{cof.}3\omega}$

vnde concludimus fore

$$\begin{array}{llll}
x = & -\tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\operatorname{cof.}\omega & -\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}\operatorname{cof.}2\omega & -\tfrac{1}{2}\mathfrak{C}\operatorname{cof.}3\omega \\
 & +\tfrac{1}{8}\mathfrak{A}\mathfrak{B} & +\tfrac{1}{16}\mathfrak{A}\mathfrak{A} & +\tfrac{1}{8}\mathfrak{A}\mathfrak{B} \\
 & +\tfrac{1}{64}\mathfrak{A}^3 & & -\tfrac{1}{192}\mathfrak{A}^3.
\end{array}$$

Verum ne in calculos nimis taedioſos immergamur, rem aliquanto minus curate expediamus, neglectoque angulo triplo, vt ſit $\eta = A\operatorname{ſin.}\omega + B\operatorname{ſin.}2\omega$, habebimus

$$x = -\frac{(\alpha\alpha - 3)}{2\alpha}A\operatorname{cof.}\omega - \frac{(4\alpha\alpha - 3)}{4\alpha}B\operatorname{cof.}2\omega + \frac{3(\alpha\alpha - 1)(\alpha\alpha - 3)}{16\alpha\alpha}AA$$

 vbi

vbi breuitatis gratia ſcribamus:

$$x = E\cos\omega + F\cos 2\omega, \text{ vt ſit}$$

$$E = \frac{3-\alpha\alpha}{2\alpha}A \text{ et } F = \frac{3-4\alpha\alpha}{4\alpha}B + \frac{3(\alpha\alpha-1)(\alpha\alpha-3)}{16\alpha\alpha}AA.$$

16. Hi iam valores in aequatione ſecunda ſubſtituantur, atque reperiemus:

$\frac{ddx}{d\zeta^2}$	$=$		$-\alpha\alpha E\cos\omega$	$-4\alpha\alpha F\cos 2\omega$
$-3-3x$	$=$	-3	$-3E$	$-3F$
$-\frac{2d\eta}{d\zeta}$	$=$	$-\alpha AE$	$-2\alpha A$	$-4\alpha B$
			$-2\alpha BE$	$-\alpha AE$
$-\frac{2xd\eta}{ds}$	$=$		$-\alpha AF$	
$-\frac{d\eta^2}{d\zeta^2}$	$=$	$-\frac{1}{2}\alpha\alpha AA$	$+2\alpha\alpha AB$	$-\frac{1}{2}\alpha\alpha AA$
$+3\eta\eta$	$=$	$+\frac{3}{2}AA$	$+3AB\cos\omega$	$-\frac{3}{2}AA\cos 2\omega$
$+m$	$=$	$+m$		
$-2mx$	$=$		$-2mE$	$-2mF$
$+3mxx$	$=$	$+\frac{3}{2}mEE$	$+3mEF$	$+\frac{3}{2}mEE$

vnde primo concludimus:

$$m(1+\tfrac{3}{2}EE) = 3 + \alpha AE + \tfrac{1}{2}\alpha\alpha AA - \tfrac{3}{2}AA = 3$$

ideoque $m = 3 - \frac{9}{2}EE$

pro determinatione numeri m indeque diſtantia b. Manifeſtum autem eſt, eſſe proxime $m = 3$, ideoque $b = c\sqrt[3]{\frac{nn}{3}}$. Porro autem fit

$$-\alpha\alpha E - 9E - 2\alpha A - 2\alpha BE - \alpha AF + (2\alpha\alpha + 3)AB + 9EF = 0$$

vnde neglectis terminis minimis ob $\frac{E}{A} = \frac{3-\alpha\alpha}{2\alpha}$, erit $(\alpha\alpha + 9)(3 - \alpha\alpha) + 4\alpha\alpha = 0$, ſeu

$$\alpha^4 + 2\alpha\alpha - 27 = 0, \text{ hincque } \alpha\alpha = \sqrt{28} - 1.$$

Tertia

Tertia denique aequatio dat

$$-(4\alpha\alpha+9)F-4\alpha B-\alpha AE-\tfrac{1}{2}\alpha\alpha AA-\tfrac{3}{2}AA+\tfrac{9}{8}EE=0$$

ideoque:

$$\left.\begin{array}{ll}\frac{(4\alpha\alpha-3)(4\alpha\alpha+9)}{4\alpha}B & -\frac{3(\alpha\alpha-1)(\alpha\alpha-3)(4\alpha\alpha+9)}{16\alpha\alpha}AA \\ -4\alpha B & +\frac{(\alpha\alpha-3)}{2}AA \\ & -\frac{(\alpha\alpha+3)}{2}AA \\ & +\frac{9(\alpha\alpha-3)^2}{8\alpha\alpha}AA\end{array}\right\}=0$$

vnde colligitur:

$$B(16\alpha^4+8\alpha\alpha-27)=\tfrac{3}{2}AA\alpha(13-7\alpha\alpha+2\alpha^4)$$

ſeu ob $27=\alpha^4+2\alpha\alpha$

$$3B(5\alpha\alpha+2)=\frac{3AA}{2\alpha}(13-7\alpha\alpha+2\alpha^4)$$

ideoque $B=\frac{13-7\alpha\alpha+2\alpha^4}{2\alpha(5\alpha\alpha+2)}AA=\frac{67-11\alpha\alpha}{2\alpha(5\alpha\alpha+2)}AA$

$$F=\frac{291-94\alpha\alpha-23\alpha^4}{8\alpha\alpha(5\alpha\alpha+2)}AA=-\frac{165-24\alpha\alpha}{4\alpha\alpha(5\alpha\alpha+2)}AA.$$

17. Quantitas ergo A arbitrio noſtro relinquitur, a qua digreſſiones a linea ſyzygiarum pendent, pro ea autem valde paruam fractionem aſſumi oportet, quae ſi fuerit tam exigua, vt eius quadratum nullius ſit momenti, primi termini ſufficiunt. Pro diſtantia ergo $v=b(1+x)$ erit $b=c\sqrt[3]{\frac{nn}{2}}$, et angulus ω ita definitur, vt ſit $\omega=\alpha\zeta+\beta$ exiſtente $\alpha\alpha=\sqrt{28}-1$, hincque $\alpha\alpha=4{,}291502$ et $\alpha=2{,}071594$. Tum vero erit $\eta=A\,\text{ſin.}\,\omega$ et $v=b(1-\frac{(\alpha\alpha-3)}{2\alpha}A\,\text{coſ.}\,\omega)$ ſeu $v=b(1-0{,}311717\,A\,\text{coſ.}\,\omega)$.

Excurſiones fiunt maximae, ſi angulus ω ſit 90°. 270°. etc. ergo ab vna digreſſione maxima ad ſequentem eſt $\alpha\zeta = 180^\circ$ et $\zeta = 86^\circ, 53\frac{1}{2}'$: at in digreſſionibus maximis eſt $v = b$. Verum etiam huiusmodi librationis, ſi maior exiſteret, determinatio inſignibus laborat difficultatibus, vt, quo accuratius omnes variationes definire vellemus, eo minus certi de reliquis neglectis redderemur.

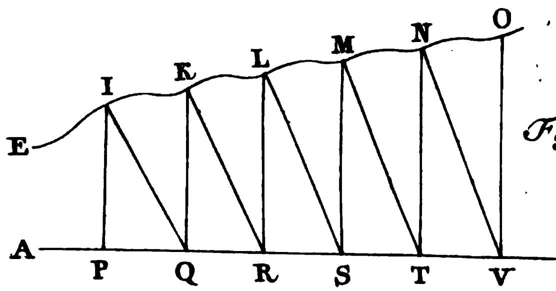


Fig. 2.

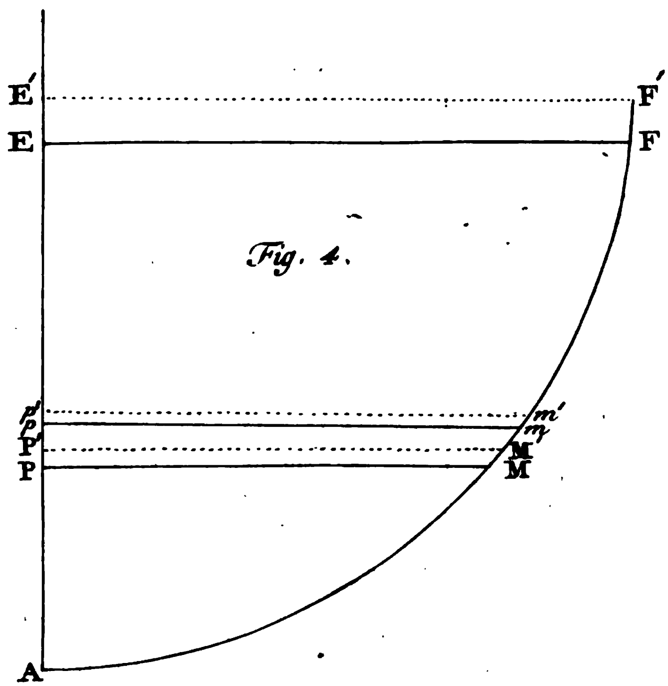


Fig. 4.



Fig. 1.

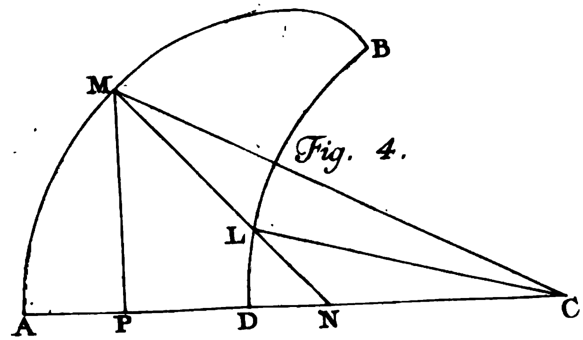
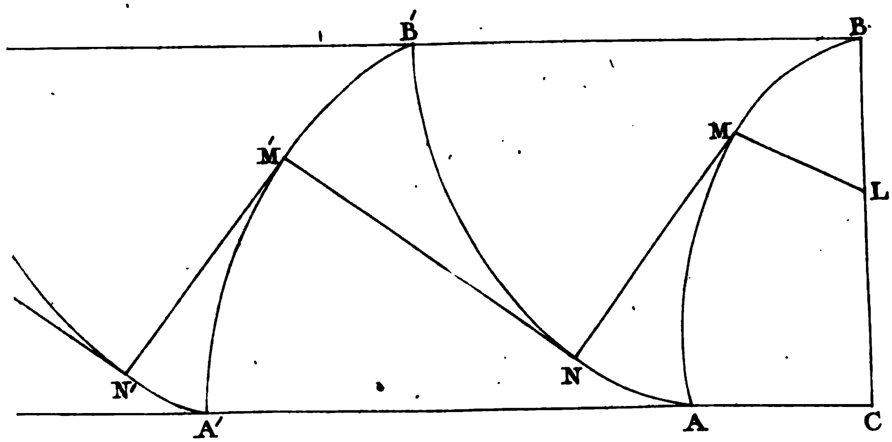


Fig. 4.



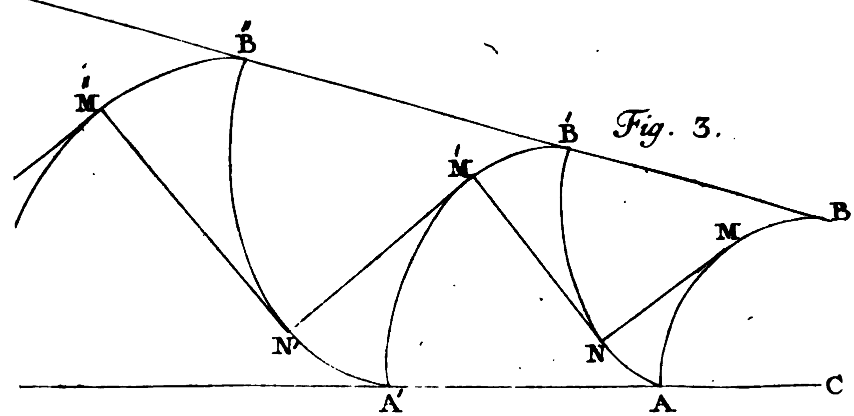


Fig. 3.

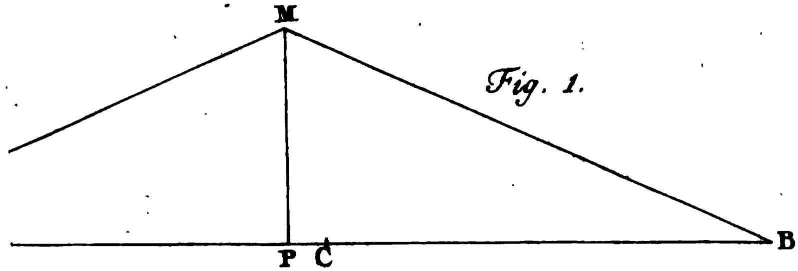
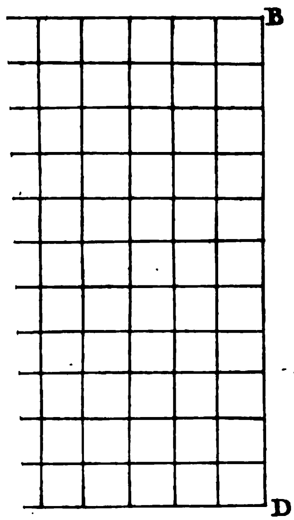


Fig. 1.



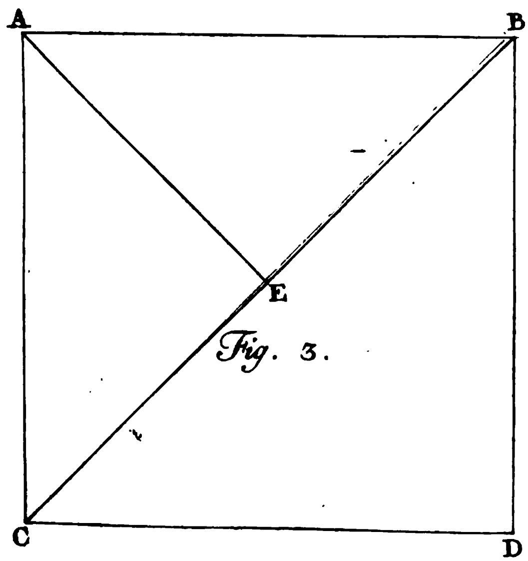


Fig. 3.

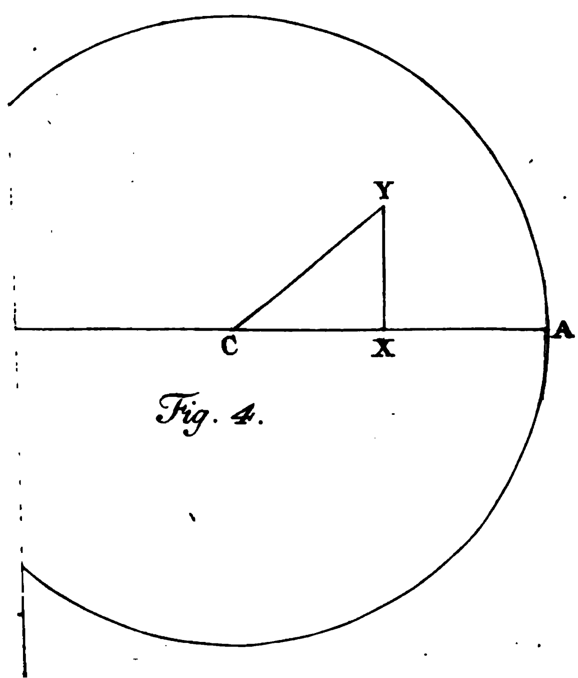
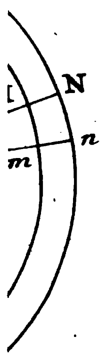


Fig. 4.



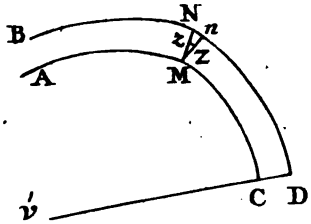


Fig. 2.

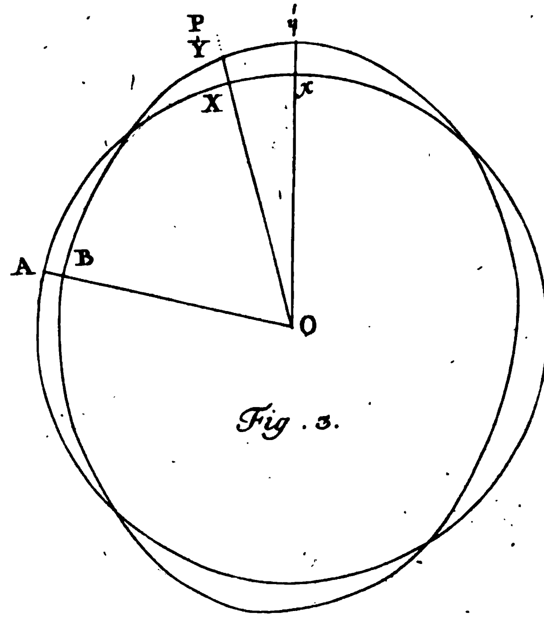
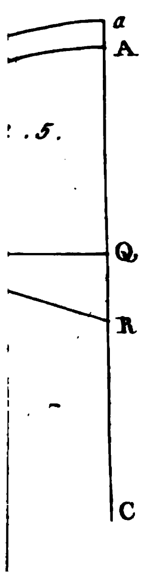


Fig. 3.





. 5.

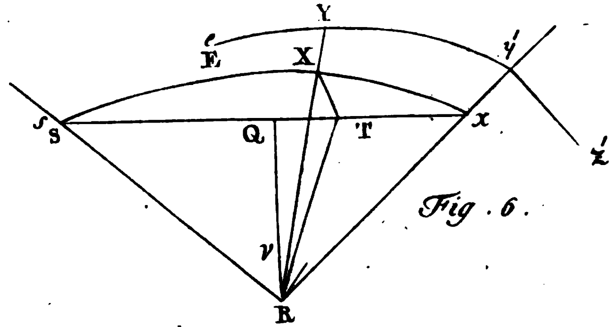


Fig. 6.

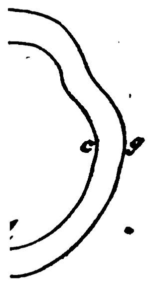


Fig. 2.

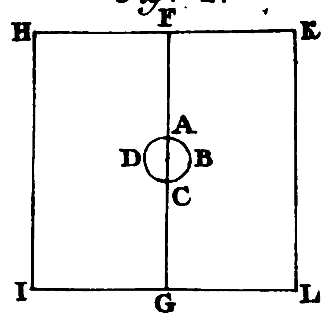


Fig. 3.

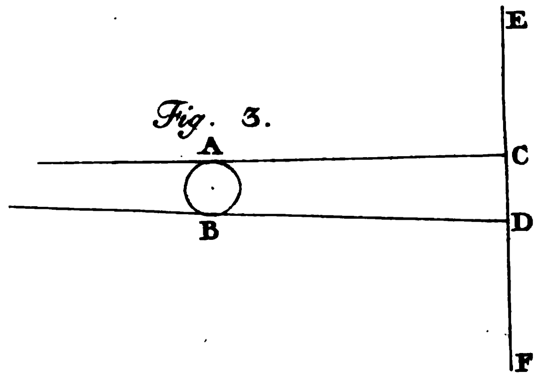


Fig. 4.

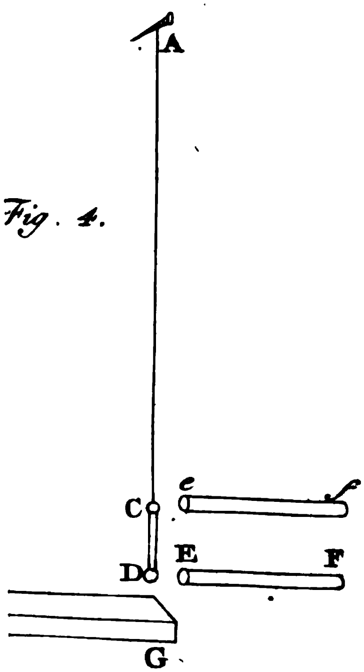
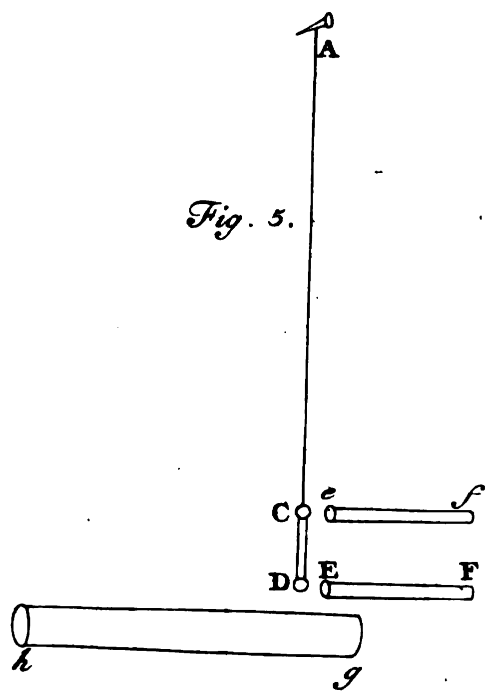


Fig. 5.



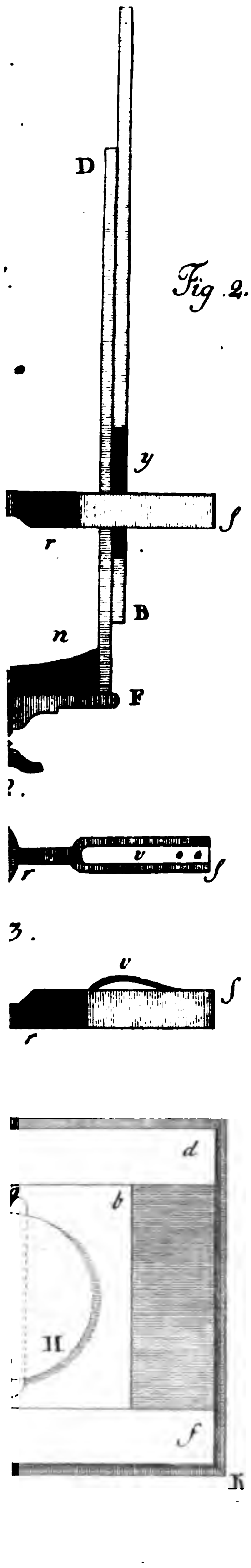
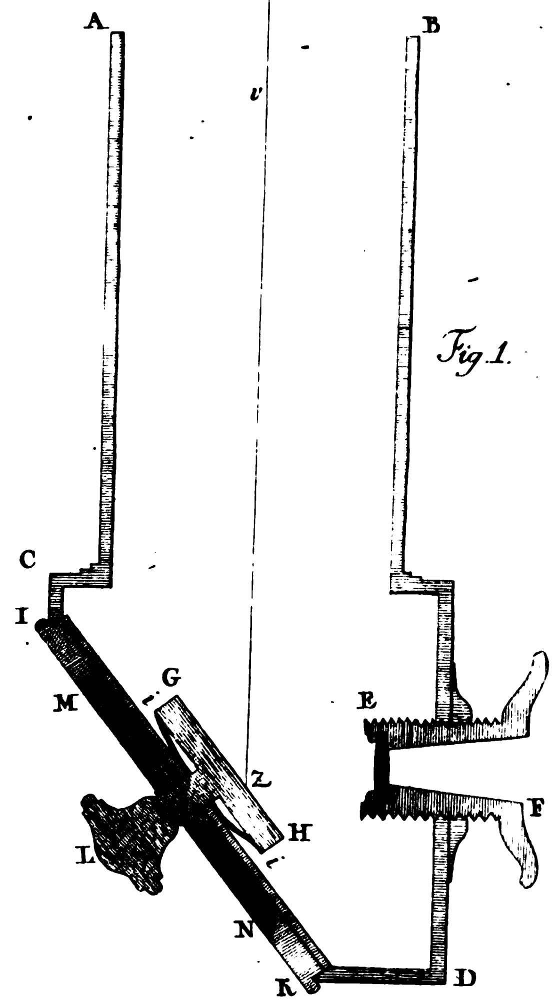
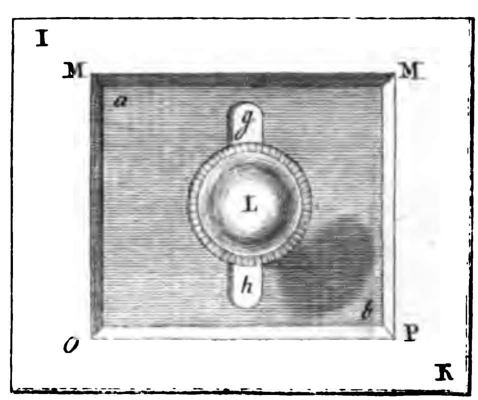


Fig. 2.
D
y
ſ
r
B
n
F
?.
v
r
ſ
3.
v
ſ
r
d
b
H
f
K



A
B
v
Fig. 1.
C
I
M
G
i
Z
H
i
L
N
K
D
E
F



I
M
M
a
g
L
h
b
O
P
K

Fig. 1.

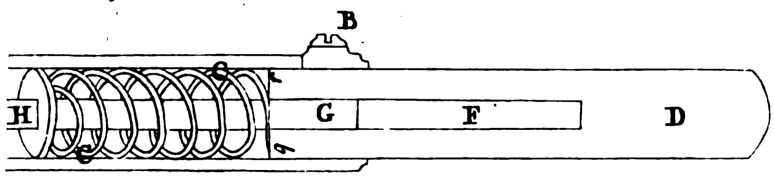
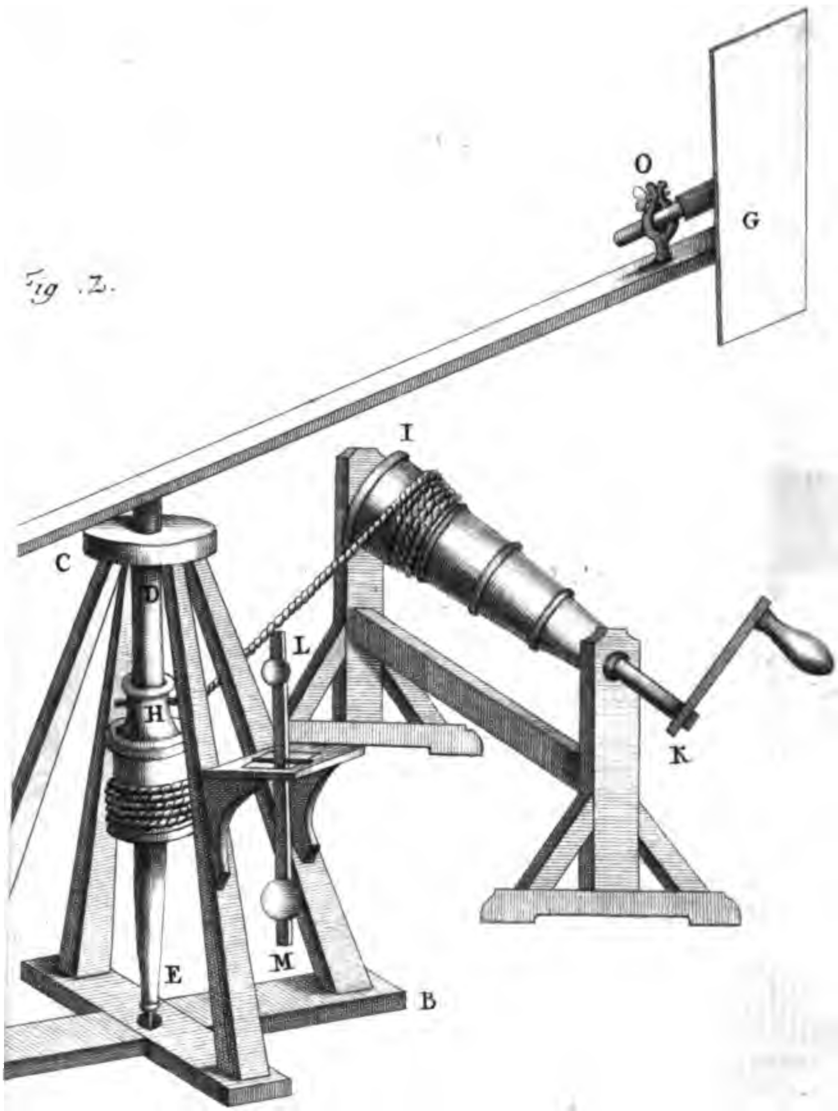
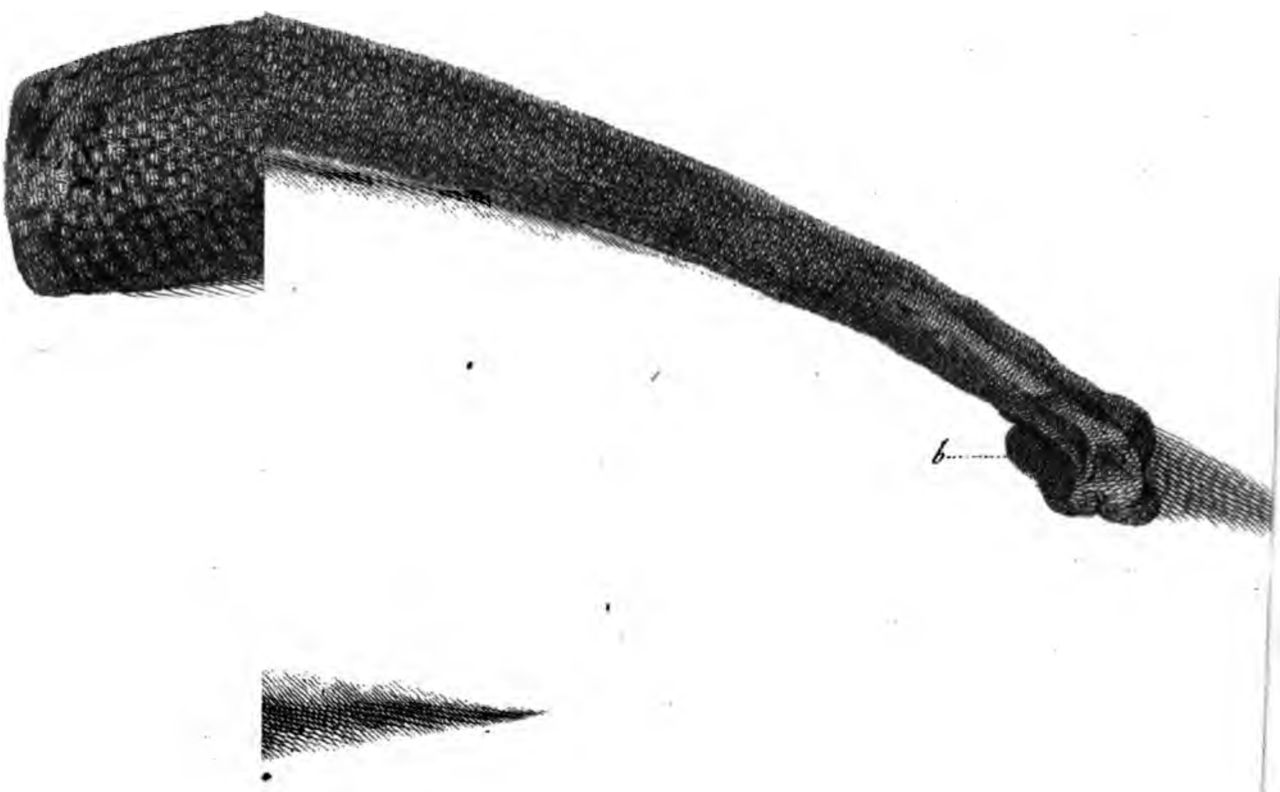


Fig. 2.




b

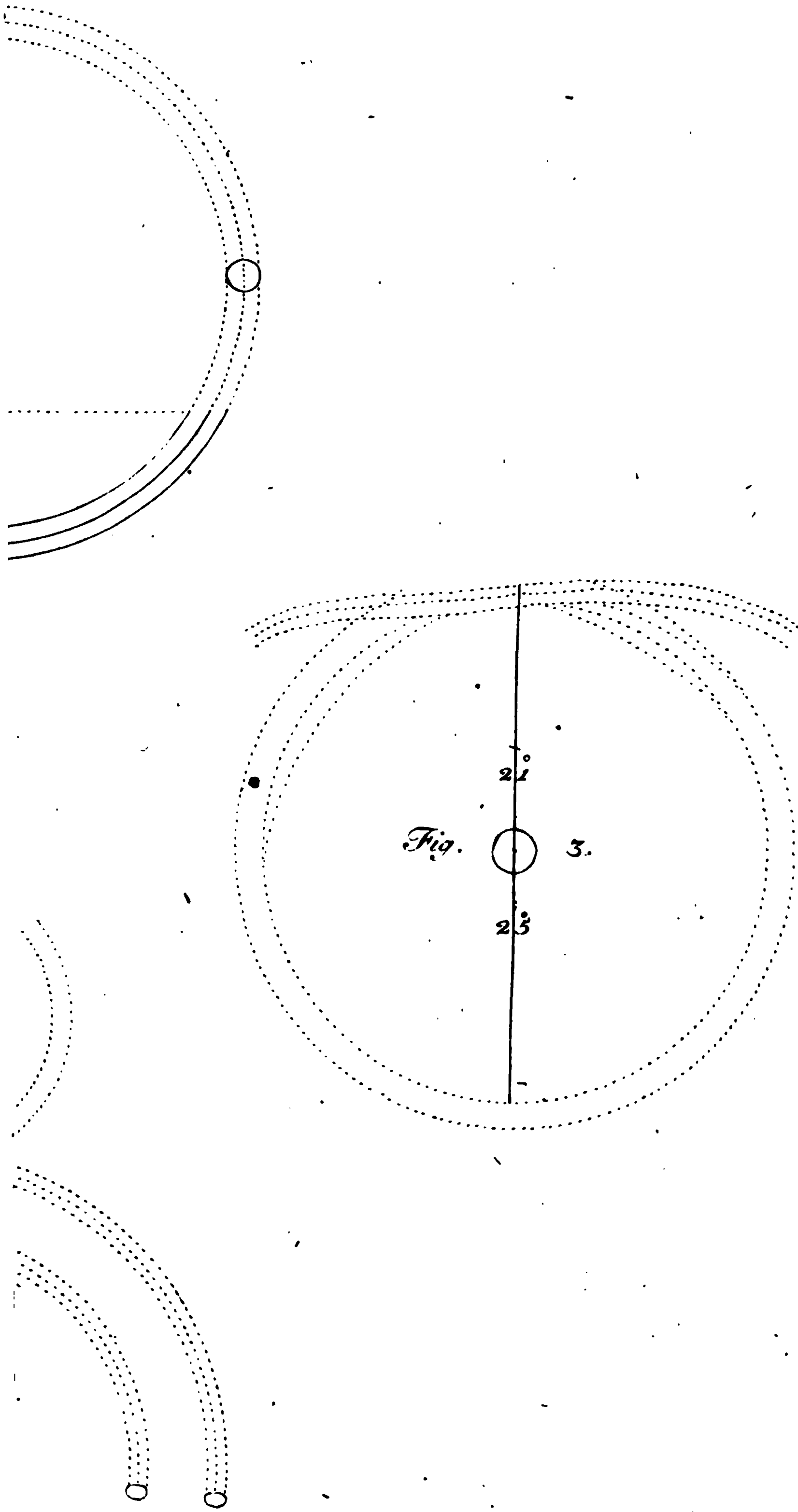


Fig. 3.

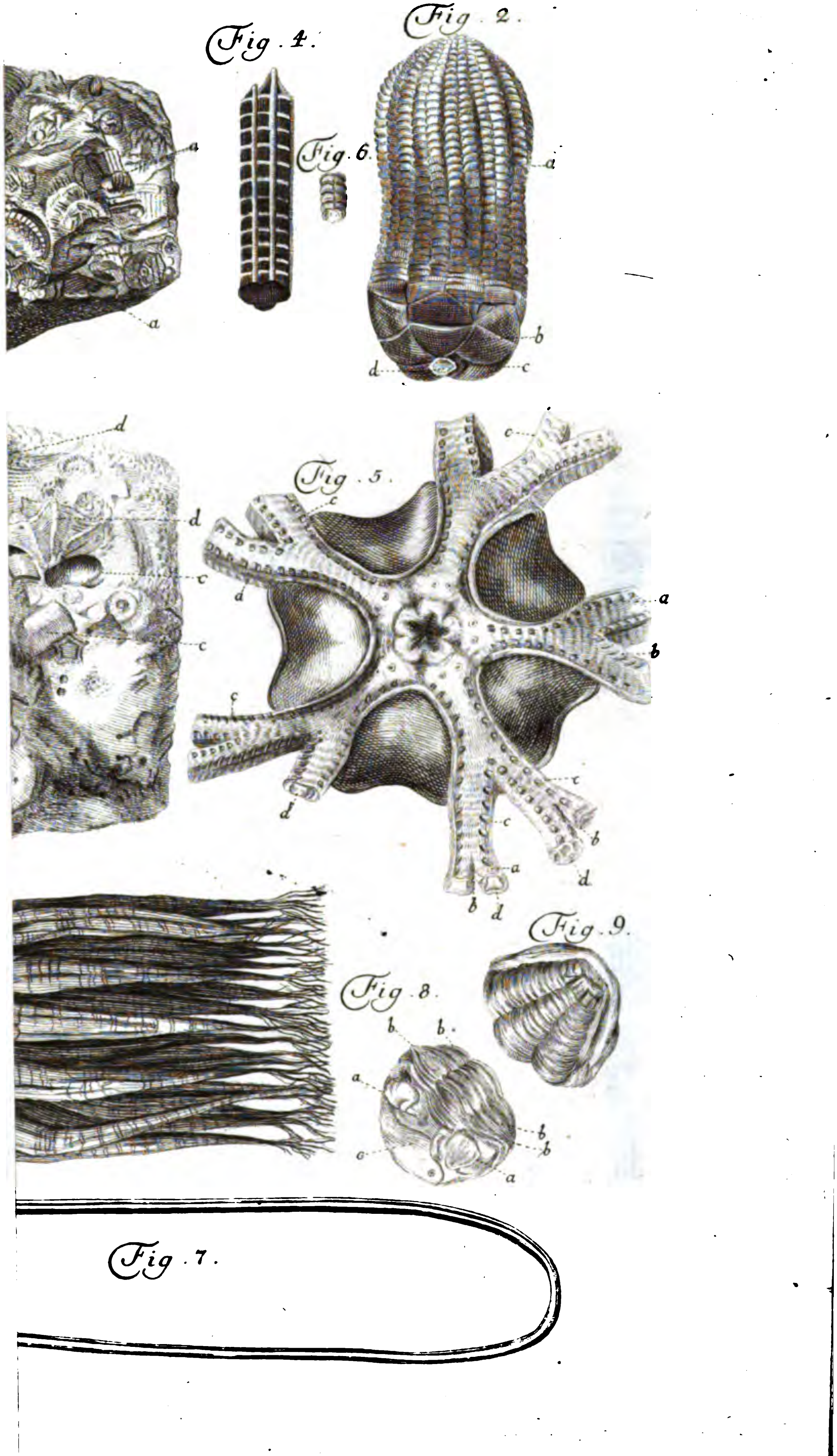

Fig. 4.
Fig. 2.
Fig. 6.
Fig. 5.
Fig. 9.
Fig. 8.
Fig. 7.



Fig. 2.

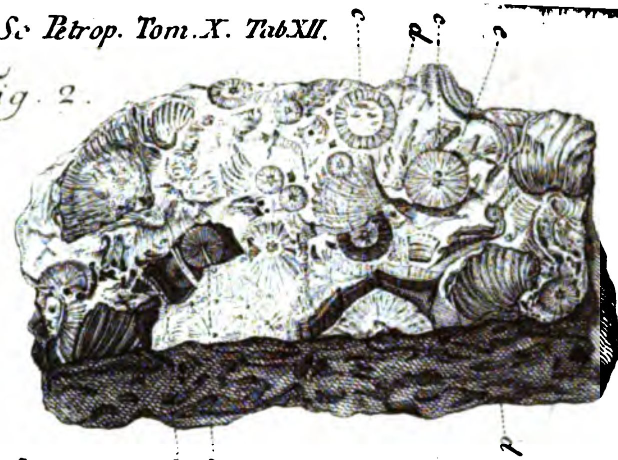
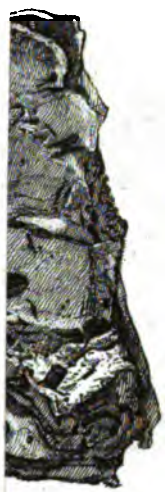


Fig. 5.



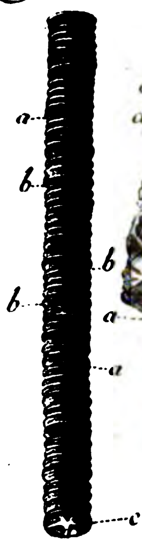


Fig. 4.

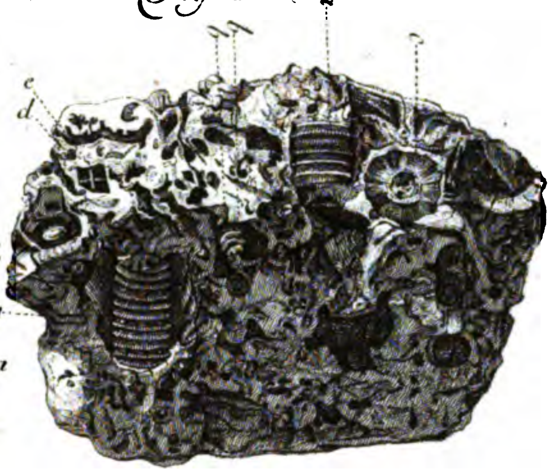
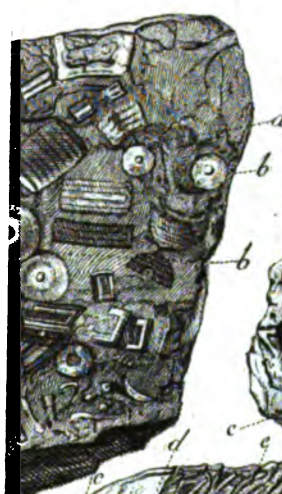
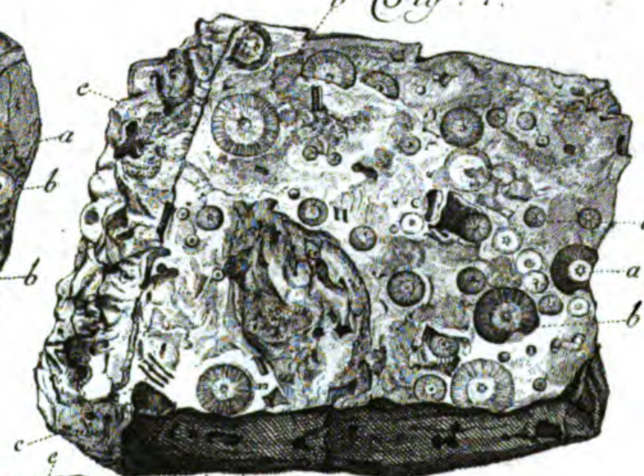


Fig. 7.





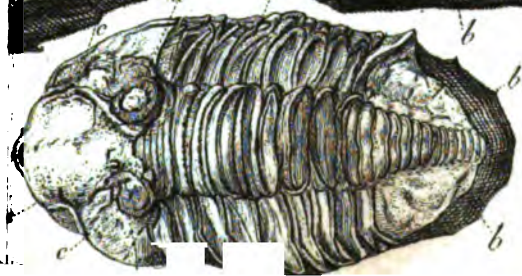


Fig. 9.



Fig. 10.

[illegible]

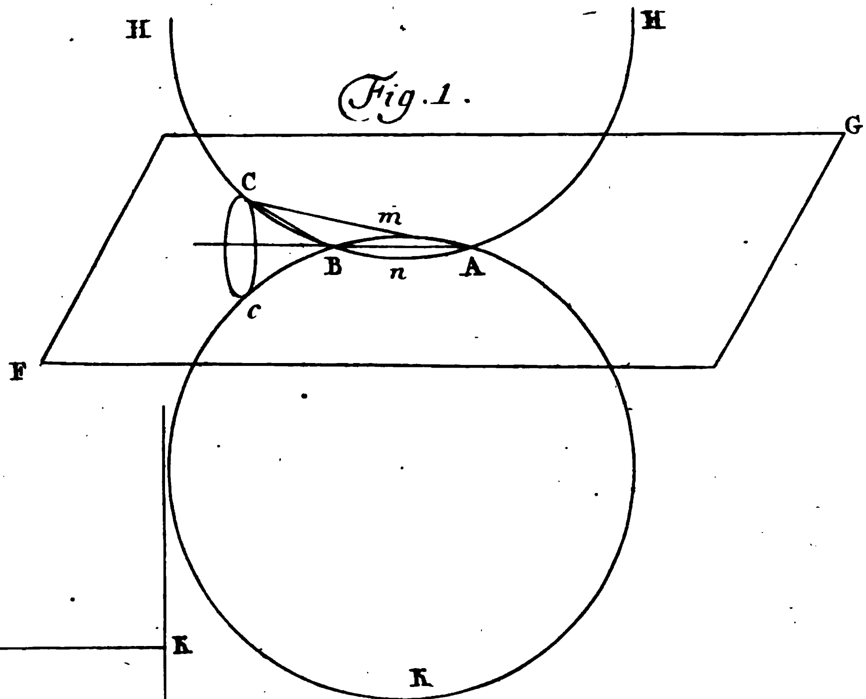
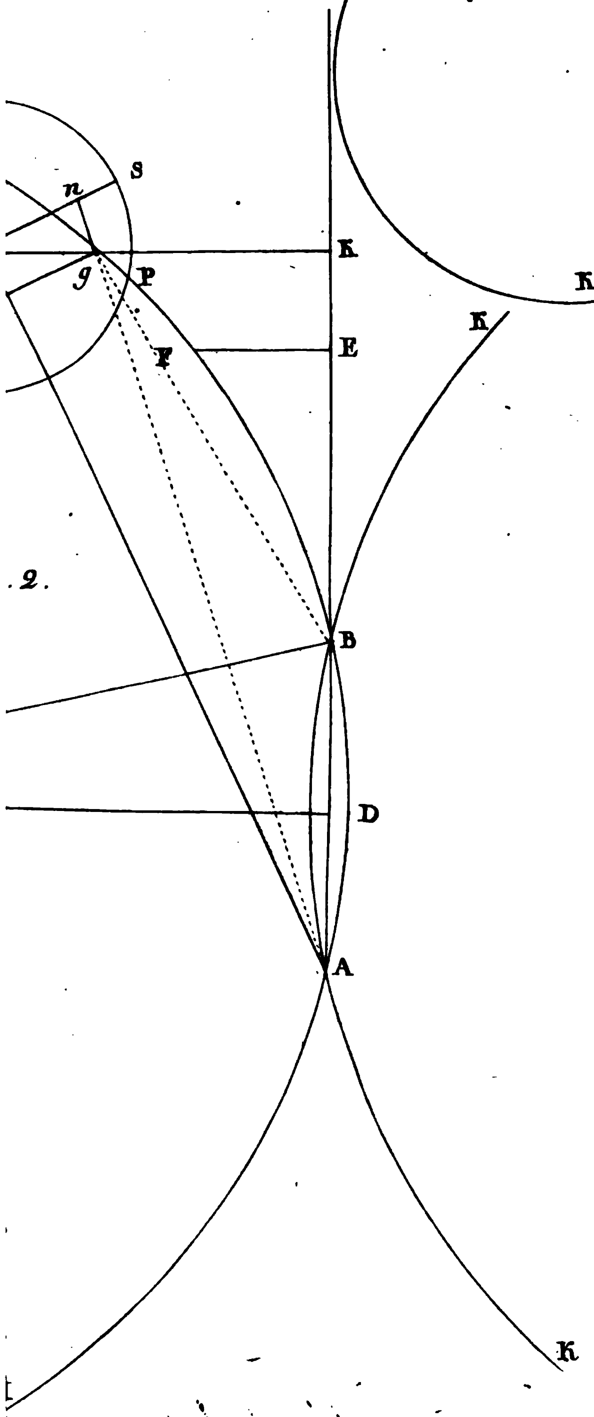


Fig. 1.



.2.

Fig. 4.

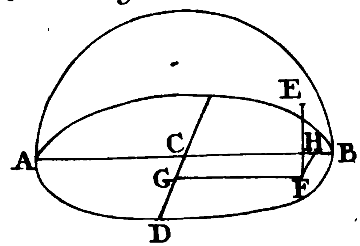
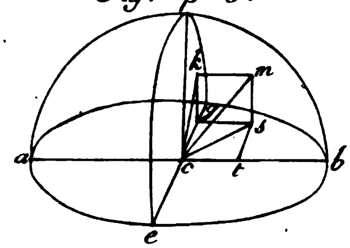


Fig. 6.



7.

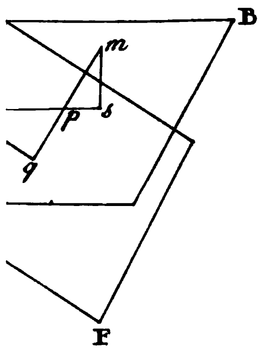
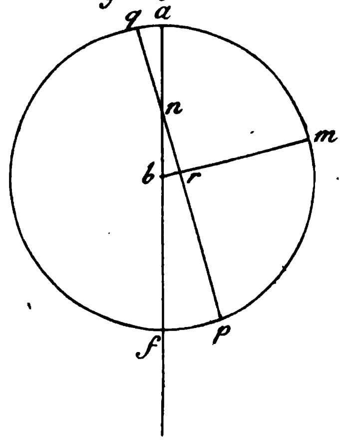


Fig. 8.



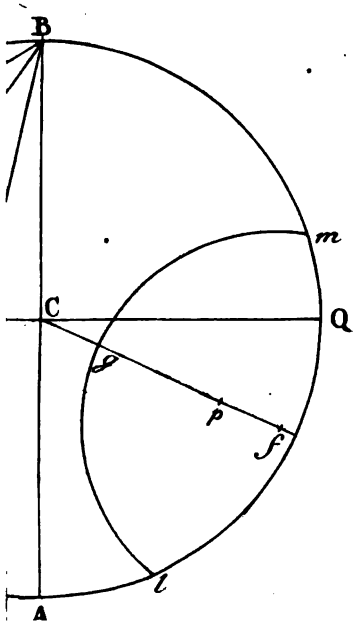
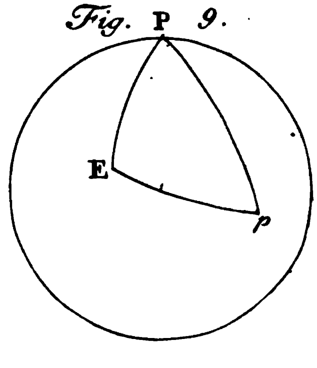
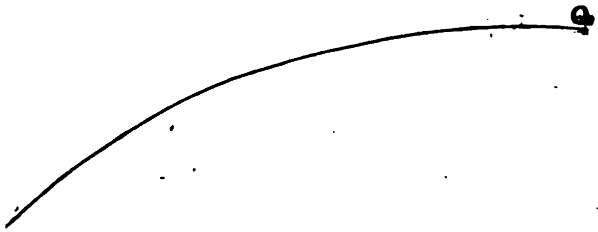


Fig. 9.





.11

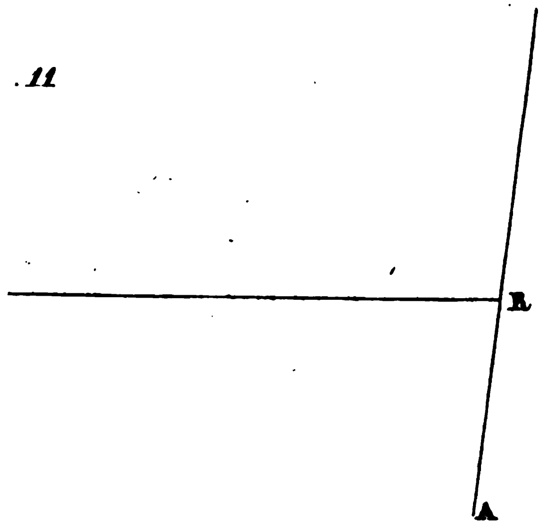
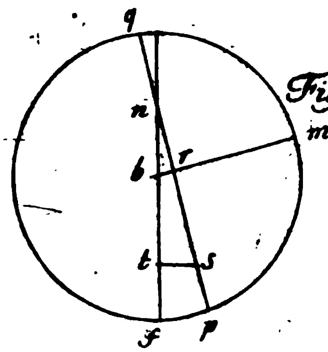
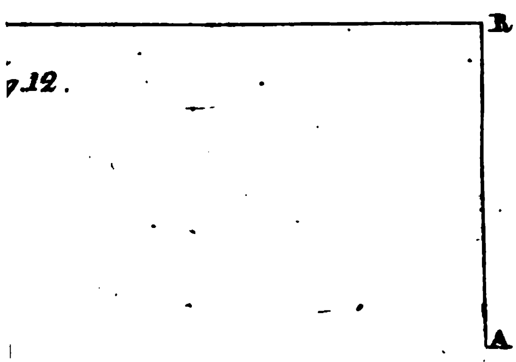


Fig 13.



g 12.



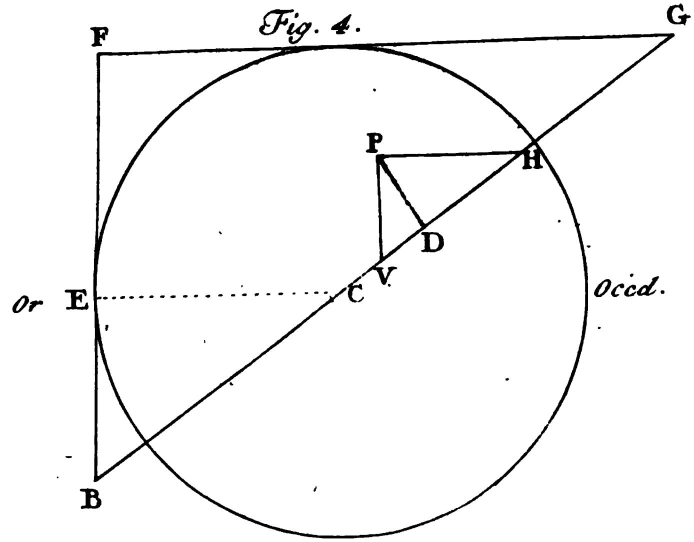


Fig. 4.

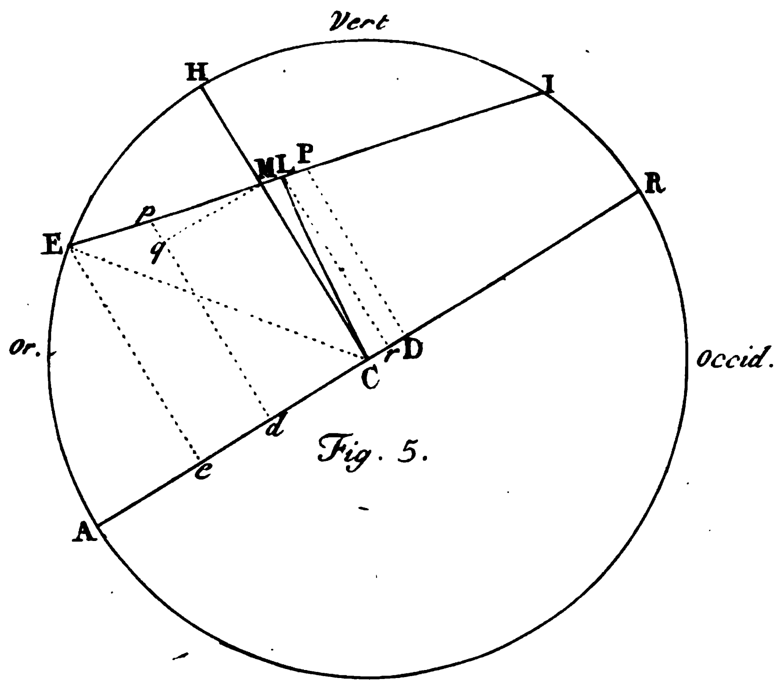
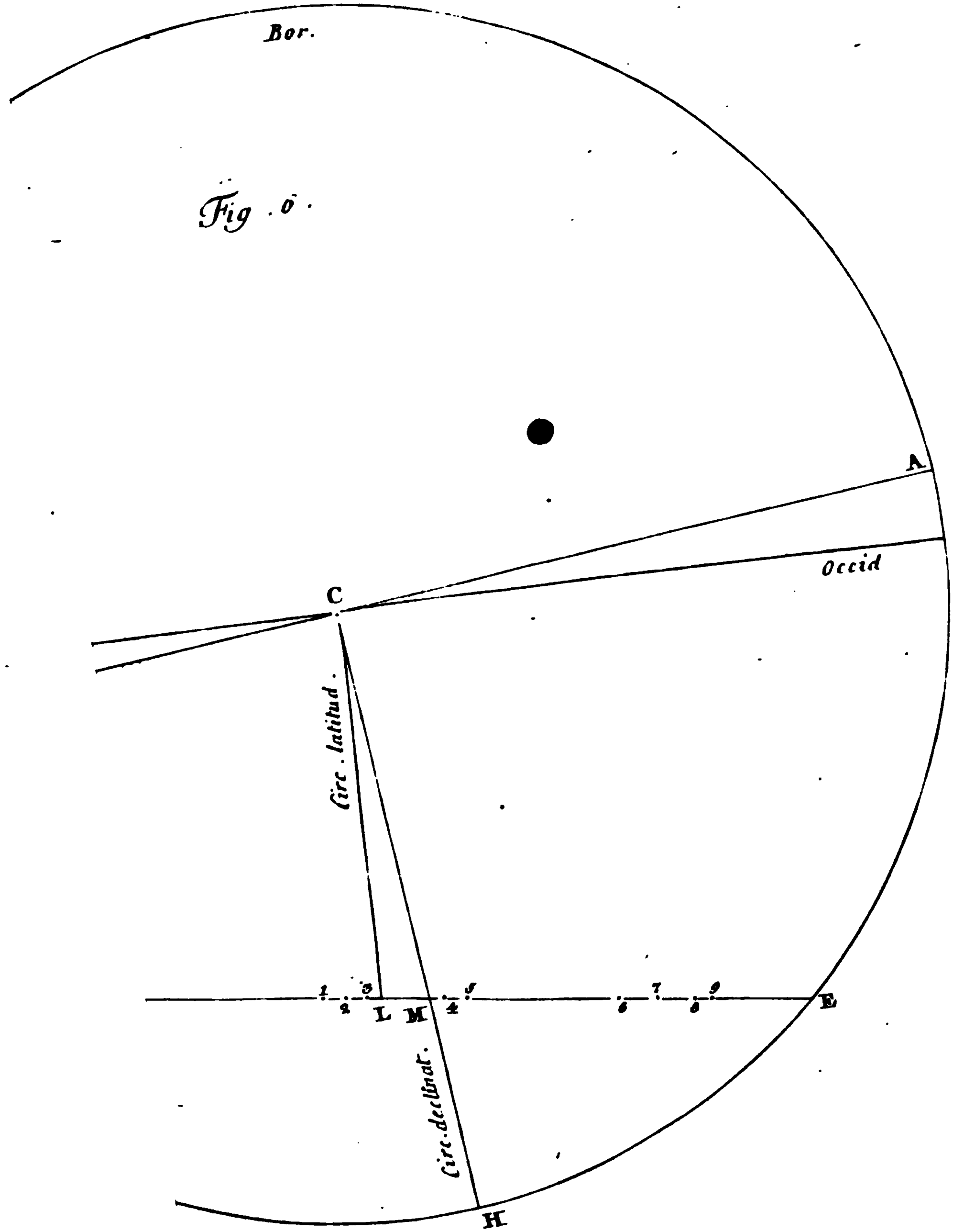


Fig. 5.

Fig. 6.



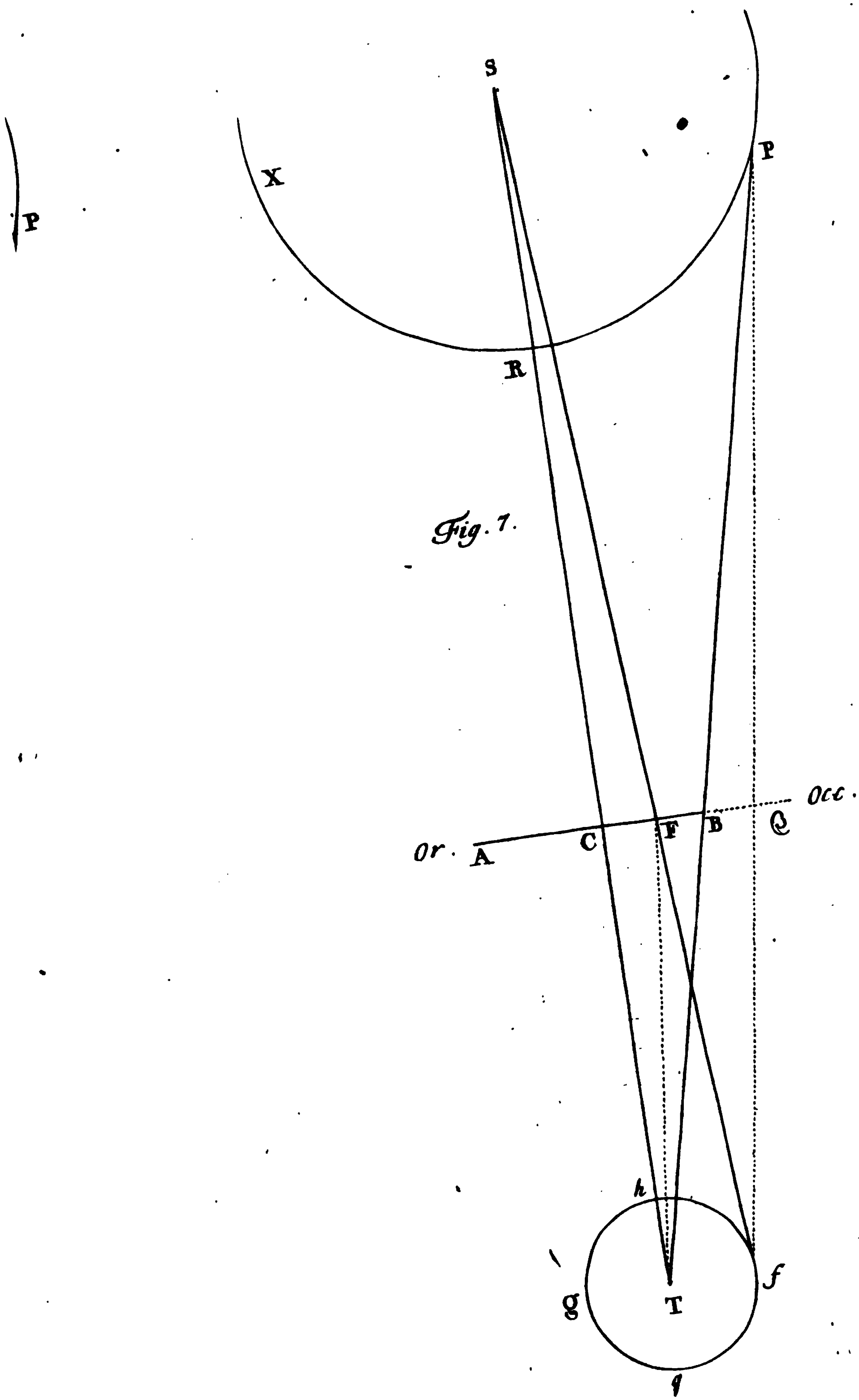


Fig. 7.

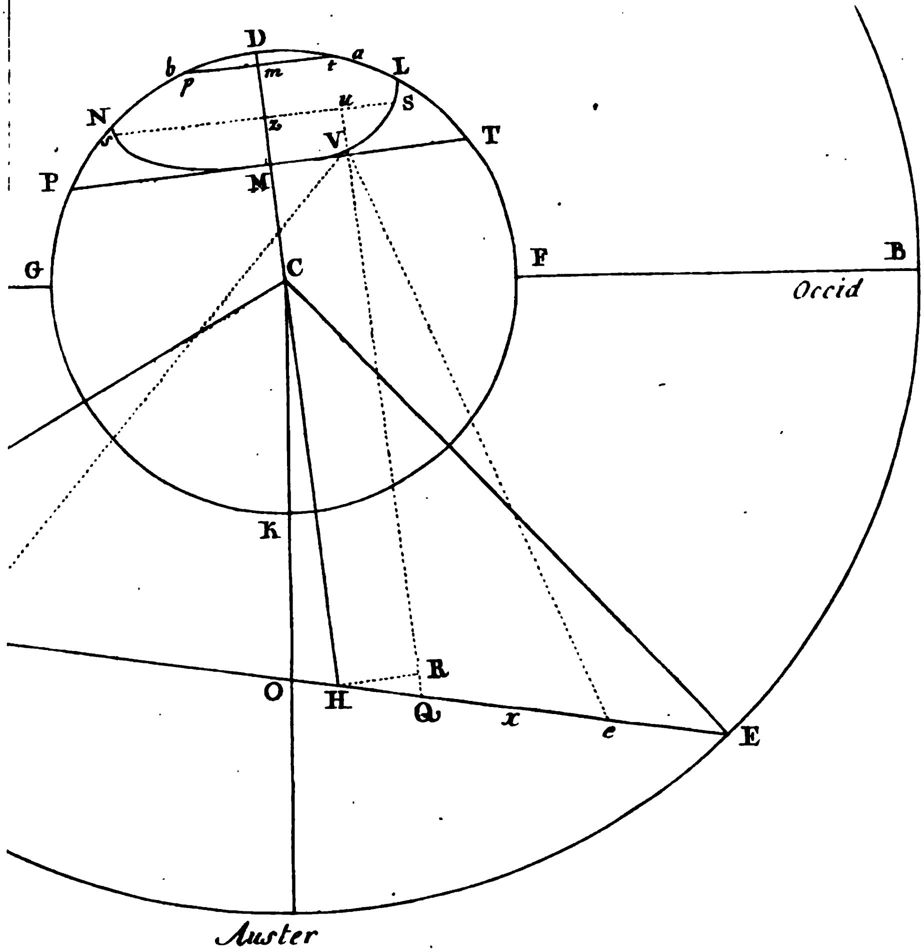
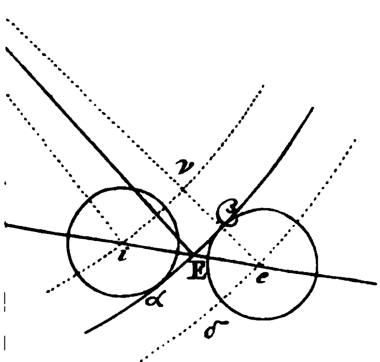

D
b
a
m
t
L
p
u
S
N
z
V
T
P
M
G
C
F
B
Occid
K
R
O
H
Q
x
e
E
Auster

Fig. 10.


v
i
E
e
α
δ

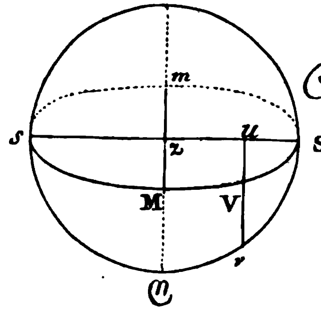

m
s
z
u
S
M
V
v

Fig. 11.

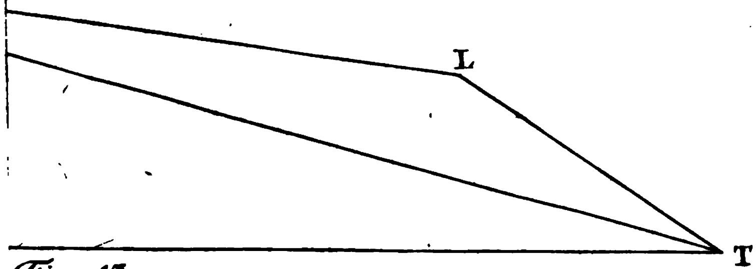
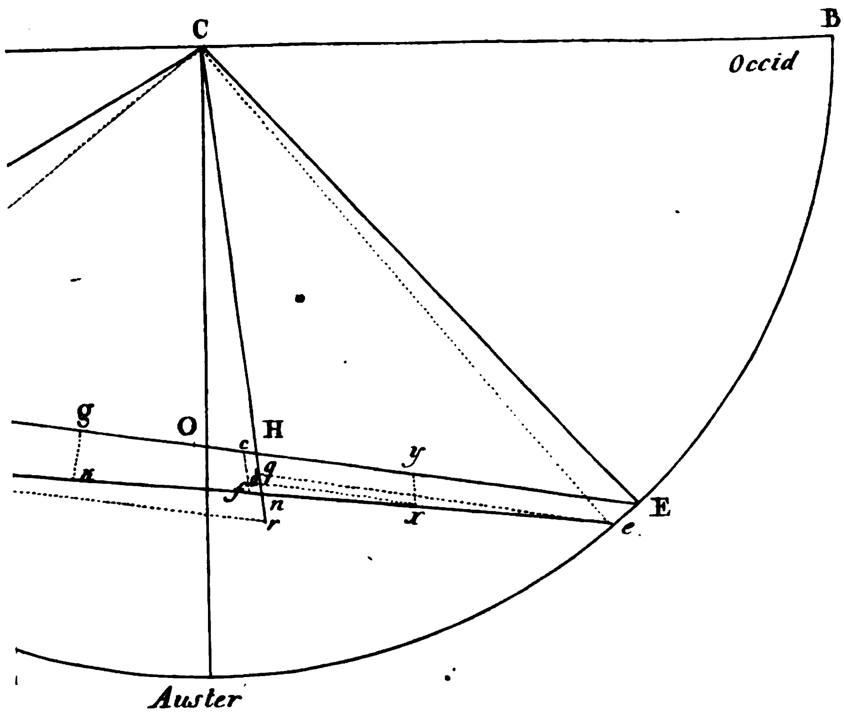


Fig. 13.



Widener Library
3 2044 092 611 805

3 2044 092 611 805